

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЯ ТЕЧЕНИЯ МЕТАЛЛА С УЧЕТОМ ИСТОРИИ ПРОЦЕССА НАГРУЖЕНИЯ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ А. НАДАИ

А.В.Яковченко, Н.И.Ивлева, А.А. Пугач (ДонНТУ, Донецк)

Разработаны метод и компьютерная программа определения напряжения течения металла с учетом истории процесса нагружения на основе уравнения А.Надаи, которое в наиболее общем виде устанавливает зависимость $\sigma = f(\tau, \varepsilon, U, T)$.

Введение. Существующие методы расчета напряжения течения металла, как по средним в очаге деформации значениям термомеханических параметров, так и с учетом истории процесса нагружения, основываются на аппроксимации экспериментальных данных. Важным этапом является выбор эмпирической формулы для представления результатов механических испытаний. Широкое использование получили степенные функции, полиномы первой и второй степени, а также экспоненциальные функции. Вместе с тем, еще в 80-е годы прошлого века в работе [1] было обосновано применение для этих целей сплайн-функций, которые могут обеспечить более высокую точность аппроксимации экспериментальных данных.

В настоящее время имеются обширные экспериментальные данные о зависимости напряжения течения металла σ от степени деформации ε , скорости деформации U и температуры T , представленные в виде соответствующих графиков. Определение на их основе значений σ является трудоемким процессом и не всегда достаточно точным. Целесообразно разработать соответствующие компьютерные программы и определять значения σ путем сплайн - интерполяции экспериментальной информации. После переработки всей имеющейся графической информации в электронную таким образом может быть наиболее рационально решена задача определения напряжения течения металла по средним в очаге деформации значениям ε , U , T .

Определение напряжения течения металла с учетом истории процесса нагружения является актуальной задачей. Анализ научных исследований по этой теме выполнен в работе [2]. Известно, что история нагружения зависит от вида процесса обработки металла давлением, величины деформации, времени деформирования, геометрии инструмента и цикличности процесса [3]. Наиболее широкое применение получила формула, разработанная в монографии [2]

$$\sigma = [b - (b - a) \cdot e^{-B\varepsilon}] \cdot [1 - A_1(1 - e^{-\lambda_1\tau}) - A_2(1 - e^{-\lambda_2\tau}) - A_3(1 - e^{-\lambda_3\tau})], \quad (1)$$

где a, b, B - постоянные, характерные для данного материала и температуры (являющиеся параметрами уравнений теории старения и наследственности);

$A_{1,2,3}, \lambda_{1,2,3}$ - параметры ползучести, отражающие релаксационные свойства среды.

Левая часть формулы (1), заключенная в квадратные скобки, описывает мгновенное упрочнение металла от степени деформации ε . Другая часть выражения характеризует интенсивность разупрочнения в момент времени τ . Зависимость (1) является удачной аппроксимацией экспериментальных данных. Но, во-первых, входящие в нее коэффициенты можно получить только для фиксированных температур. Во-вторых, она не в полной мере отражает вязкие свойства металла. Это проявляется в том, что при изменении скорости деформации расчетное значение σ будет «реагировать» с некоторым запаздыванием на изменение U и только через накопленную деформацию.

Постановка задачи. Актуальной задачей является определение напряжения течения металла при его пластической деформации на основе уравнения А.Надаи [3], которое в наиболее общем виде устанавливает зависимость $\sigma = f(\tau, \varepsilon, U, T)$.

Целью работы является создание метода и компьютерной программы расчета напряжения течения металла на основе уравнения А.Надаи и сплайн-интерполяции кривых упрочнения.

Материалы и результаты исследования. По существу, уравнение А.Надаи является известным из математики выражением полного дифференциала. Если $\sigma = f(\tau, \varepsilon, U, T)$ дифференцируемая функция, то представленная ниже сумма называется полным дифференциалом и обозначается через $d\sigma$

$$d\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} d\varepsilon + \frac{\partial \sigma}{\partial U} dU + \frac{\partial \sigma}{\partial T} dT + \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} d\tau, \quad (2)$$

здесь частные производные $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial \sigma}{\partial U}, \frac{\partial \sigma}{\partial T}, \frac{\partial \sigma}{\partial \tau}$ характеризуют свойства металла к деформационному и скоростному упрочнению, температурному разупрочнению, изменению напряжения течения металла во времени в связи с его структурной неустойчивостью, соответственно.

Разделив левую и правую части уравнения (2) на $d\tau$ получим

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{d\tau} + \frac{\partial \sigma}{\partial U} \cdot \frac{dU}{d\tau} + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \cdot \frac{dT}{d\tau} + \frac{\partial \sigma}{\partial \tau}, \quad (3)$$

здесь производные $\frac{d\varepsilon}{d\tau}, \frac{dU}{d\tau}, \frac{dT}{d\tau}$ - известные в рассматриваемой задаче функции, определяющие скорость изменения степени деформации, скорости деформации и температуры во времени $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_k$ в процессах обработки металлов давлением и соответственно определяющие историю процесса нагружения.

Произведя интегрирование уравнения (3), получим

$$\sigma(\tau_i) = \sigma(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau_i} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{d\tau} + \frac{\partial \sigma}{\partial U} \cdot \frac{dU}{d\tau} + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \cdot \frac{dT}{d\tau} + \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} \right) d\tau, \quad (4)$$

где $i=1,2,\dots,k$.

Для расчета напряжения течения металла σ при $\tau = \tau_1$ (см. (4)), а также частных производных $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial \sigma}{\partial U}, \frac{\partial \sigma}{\partial T}$ при $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_k$ разработано окно программы, представленное на рис.1. Левая часть окна предназначена для задания исходной информации, получаемой на основе кривых упрочнения. По каждому из факторов (ε, U, T) определяют значения, для которых в таблице, расположенной в нижней части окна, задают соответствующие величины σ . Точки, в которых определяют массив σ , удобно выбирать непосредственно на кривых упрочнения. При этом обеспечивается и наибольшая точность получения исходной информации.

Правая часть окна предназначена для отображения результатов расчета значений σ и частных производных $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial \sigma}{\partial U}, \frac{\partial \sigma}{\partial T}$ при фиксированных факторах ε^*, U^*, T^* . Указанные величины рассчитывают в следующей последовательности.

На первом этапе выполняется сплайн-интерполяция исходной информации на основе полиномов третьей степени.

На следующем этапе при $\varepsilon = \varepsilon^*$ рассчитывается первый массив σ при заданных в исходной информации значениях факторов U и T . Результаты расчетов отображаются в таблице, расположенной в верхней части окна (см. рис.1).

После выполнения сплайн-интерполяции полученных данных дополнительно задается величина $U = U^*$ и рассчитывается второй массив σ при заданных в исходной информации значениях фактора T . Результаты расчетов отображаются в другой таблице, расположенной ниже (см. рис.1).

На заключительном этапе выполняется интерполяция полученных данных и рассчитывается искомая величина σ при $T = T^*$.

Расчет частных производных $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial \sigma}{\partial U}, \frac{\partial \sigma}{\partial T}$ при фиксированных значениях ε^*, U^*, T^* выполняется в следующей последовательности. Рассмотрим определение производной $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}$. Вначале на основе изложенного выше

алгоритма выполняется расчет массива σ при $U = U^*, T = T^*$ и степенях деформации ε , заданных в таблице исходной информации. Сплайн-интерполяция полученных данных дает сплайн-функцию $\sigma = f(\varepsilon)$, на основе

которой аналитически выводится формула для частной производной $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}$. Расчет искомой производной выполняется при $\varepsilon = \varepsilon^*$.

Файл | Дополнительные расчеты

Степень деформации (ε)
Количество значений: 4

0.05
0.1
0.2
0.3

Скорость деформации (U, 1/с)
Количество значений: 3

0.05
7.5
150

Температура (T, град.С)
Количество значений: 4

900
1000
1100
1200

Марка стали: 60С2 Продолжить...

Таблица экспериментальных значений напряжения течения металла в зависимости от факторов (ε, U, T)

Степень деформации	0.05	0.1	0.2	0.3
T = 900, U = 0.05	97.1	113.6	142	142
T = 900, U = 7.5	120	150.2	179.3	183.4
T = 900, U = 150	162.4	182.7	217.3	239.7
T = 1000, U = 0.05	71.6	82.5	98.4	92.7
T = 1000, U = 7.5	86.2	102.2	129.1	138.6
T = 1000, U = 150	120.4	142.4	164.4	175.9
T = 1100, U = 0.05	44.7	48.8	58.3	57.9
T = 1100, U = 7.5	59.7	69	82	89.5
T = 1100, U = 150	74.6	87.5	108.5	116.6

Вычисление значений напряжения течения металла и производных при фиксированных значениях факторов (ε^*, U^*, T^*)

ε^* [0.050496] U^* [1/с] [72.232087] T^* [град.С] [1000] OK

Расчетные значения напряжения течения металла при фиксированном значении фактора (ε^*)

	T = 900	T = 1000	T = 1100	T = 1200
U = 0.05	97.264	71.708	44.741	31.815
U = 7.5	120.301	86.359	59.792	40.795
U = 150	162.602	120.619	74.728	62.230

Расчетные значения напряжения течения металла при фиксированных значениях факторов (ε^*, U^*)

	T = 900	T = 1100	T = 1200
σ (МПа)	142.194	68.412	51.543

Расчетные значения напряжения течения металла и производных при фиксированных значениях факторов (ε^*, U^*, T^*)

	$\partial \sigma / \partial \varepsilon$	$\partial \sigma / \partial U$	$\partial \sigma / \partial T$
σ (МПа)	103.57523	388.45552	0.22344
			-0.36891

<< Назад

Рис.1. Окно программы слайд-интерполяции кривых упругости, а также расчета напряжения течения металла и его частных производных

Аналогично при определении производной $\frac{\partial \sigma}{\partial U}$ рассчитывается массив σ при $\varepsilon = \varepsilon^*$, $T = T^*$ и скоростях деформации U , заданных в таблице исходной информации. Сплайн-интерполяция полученных данных дает сплайн-функцию $\sigma = f(U)$, на основе которой аналитически выводится формула для частной производной $\frac{\partial \sigma}{\partial U}$. Расчет искомой производной выполняется при $U = U^*$.

При определении производной $\frac{\partial \sigma}{\partial T}$ рассчитывается массив σ при $\varepsilon = \varepsilon^*$, $U = U^*$ и температурах T , заданных в таблице исходной информации. Сплайн-интерполяция полученных данных дает сплайн-функцию $\sigma = f(T)$, на основе которой аналитически выводится формула для расчета частной производной $\frac{\partial \sigma}{\partial T}$. Расчет искомой производной выполняется при $T = T^*$.

Результаты расчета напряжения течения металла и частных производных отображаются в нижней части окна программы, показанного на рис.1. На основе изложенного метода разработана программа расчета этих величин при вычислении интеграла (4).

Следующий этап решения задачи связан с учетом истории нагружения. Историю процесса нагружения при обработке металла давлением определяют функции $\varepsilon(\tau)$, $U(\tau)$, $T(\tau)$. Исходная информация по ним задается в таблице, расположенной в верхней части окна программы, показанного на рис.2. Предусмотрено четыре варианта задания и расчета этой информации.

По первому варианту расчета задается вся информация, то есть массивы τ , ε , U , T .

По второму варианту расчета массив U определяется в зависимости от таблично заданных значений ε и τ . Для этого воспользуемся известной зависимостью

$$U = \frac{d\varepsilon}{d\tau}. \quad (5)$$

Запишем (5) в виде конечно-разностного уравнения. В первой и последней точках временного интервала $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_k$ это уравнение будет иметь вид:

$$U_1 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\tau_2 - \tau_1}; \quad U_n = \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}}{\tau_k - \tau_{k-1}}. \quad (6)$$

В промежуточных точках уравнение имеет следующий вид

$$U_i = \frac{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i-1}}{\tau_{i+1} - \tau_{i-1}}. \quad (7)$$

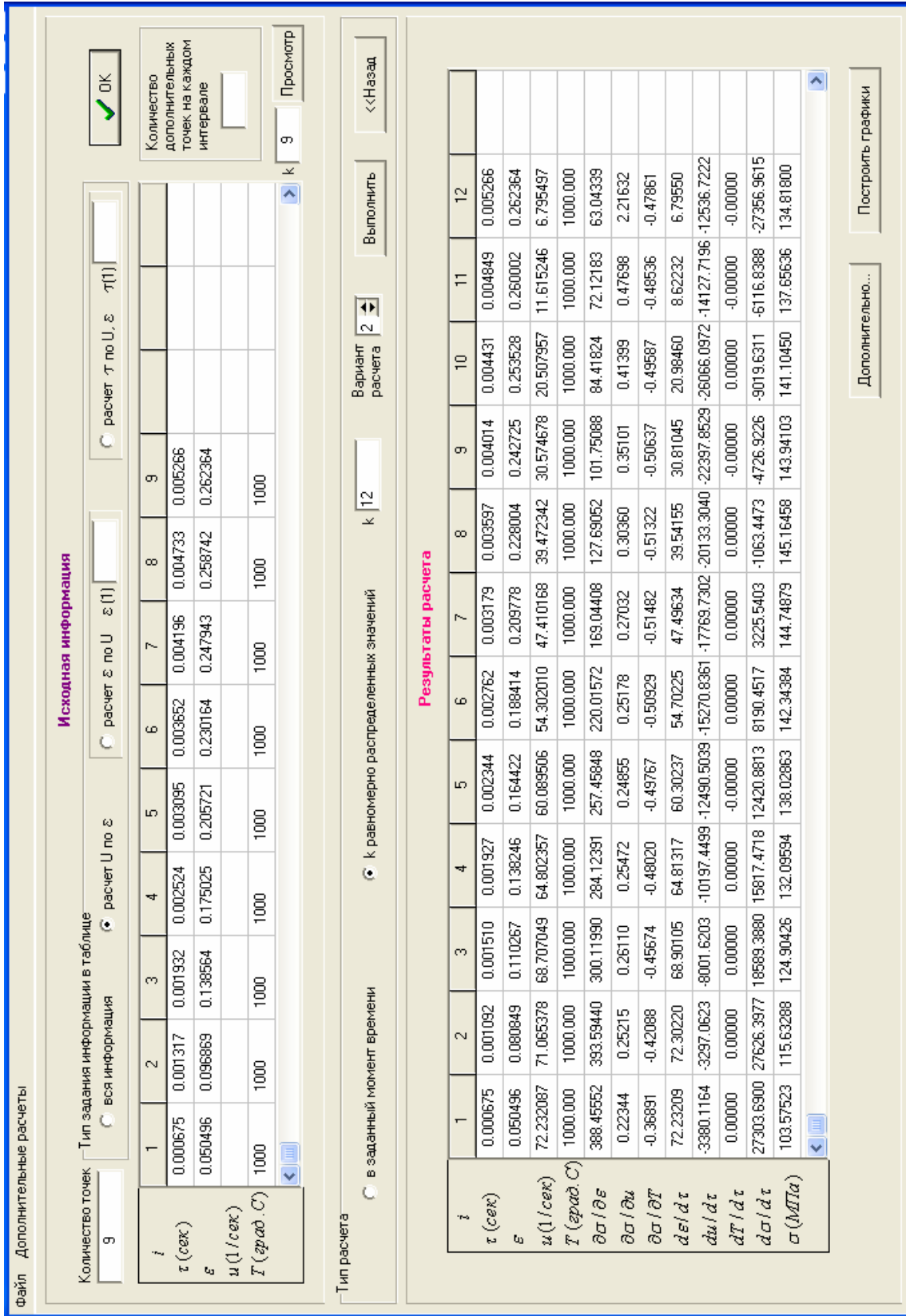


Рис.2. Окно программы задания исходной информации и отображения результатов при расчете напряжения течения металла

В формуле (7) производная $\frac{d\varepsilon}{d\tau}$ записана в виде симметричного конечно-разностного отношения, которое является более точным.

По третьему варианту расчета массив ε определяется в зависимости от таблично заданных значений U, τ . Из уравнений (6), (7) получаем:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + U_1(\tau_2 - \tau_1); \quad (8)$$

$$\varepsilon_k = \varepsilon_{k-1} + U_k(\tau_k - \tau_{k-1}); \quad (9)$$

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_{i-1} + U_i(\tau_{i+1} - \tau_{i-1}). \quad (10)$$

По четвертому варианту расчета массив τ определяется в зависимости от таблично заданных значений ε, U . Из уравнений (6), (7) получаем:

$$\tau_2 = \tau_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{U_1}; \quad (11)$$

$$\tau_k = \tau_{k-1} + \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}}{U_k}; \quad (12)$$

$$\tau_{i+1} = \tau_{i-1} + \frac{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i-1}}{U_i}. \quad (13)$$

В таблице, расположенной в верхней части окна программы, которое показано на рис.2, также задается k дискретных значений величины T в определенные моменты времени τ .

После определения массивов τ, ε, U, T , входящих в таблицу исходной информации (см.рис.2), выполняется их сплайн-интерполяция и получение сплайн-функций $\varepsilon = f(\tau), U(\tau), T(\tau)$. На их основе аналитически были выведены формулы для расчета производных $\frac{d\varepsilon}{d\tau}, \frac{dU}{d\tau}, \frac{dT}{d\tau}$, входящих в интеграл (4).

В итоге, нами определены алгоритмы расчета всех функций, входящих в уравнение (4), и их производных за исключением последнего слагаемого в подинтегральном выражении, которое в дальнейшем не учитывали.

Вычисление интеграла в уравнении (4) выполняется по методу Гаусса с точностью $1 \cdot 10^{-6}$.

Результаты расчета $\sigma(\tau)$, а также других величин и их производных отображаются в таблице, которая представлена в нижней части окна программы, показанного на рис.2.

Разработанная компьютерная программа и окна (см. рис.1,2) могут быть использованы для расчета напряжения течения металла в зависимости от времени τ в различных процессах обработки металлов давлением.

Рассмотрим частный пример – прокатку полосы на гладких цилиндрических валках с радиусом R . Выполним упрощенный расчет степени деформации ε и времени τ по длине очага L . Схема геометрического очага деформации и обозначения основных параметров даны в окне программы на рис.3.

Степень деформации ε определим по известной формуле

$$\varepsilon = \ln \frac{H}{h_T}, \quad (14)$$

где h_T - текущая по длине очага деформации толщина полосы.

$$h_T = F_2 - F_1; \quad F_1 = \sqrt{R^2 - y^2}; \quad F_2 = 2R + h - \sqrt{R^2 - y^2}, \quad (15)$$

здесь F_1, F_2 - границы контакта металла с валками.

Время τ движения частицы металла в очаге деформации необходимо поставить в соответствие с координатой y (см. рис.2). Связь между ними устанавливает известное уравнение

$$d\tau = \frac{dy}{V_y}, \quad (16)$$

где V_y - продольная составляющая скорости течения металла в очаге деформации.

Если, во-первых, принять гипотезу плоских сечений и, во-вторых, пренебречь уширением Δb , то функцию V_y определяет следующее известное уравнение

$$V_y = V_0 \frac{H}{h_T}, \quad (17)$$

где V_0 - скорость течения металла на входе в очаге деформации при $y = L$ (см. рис.3);

$$L = \sqrt{R \cdot \Delta h - \left(\frac{\Delta h}{2}\right)^2}; \quad \Delta h = H - h.$$

Подставим зависимость (17) в уравнение (16)

$$d\tau = \frac{h_T}{H \cdot V_0} dy. \quad (18)$$

Выполняя интегрирование уравнения (18), получим

Расчет массивов ε и τ по длине очага деформации

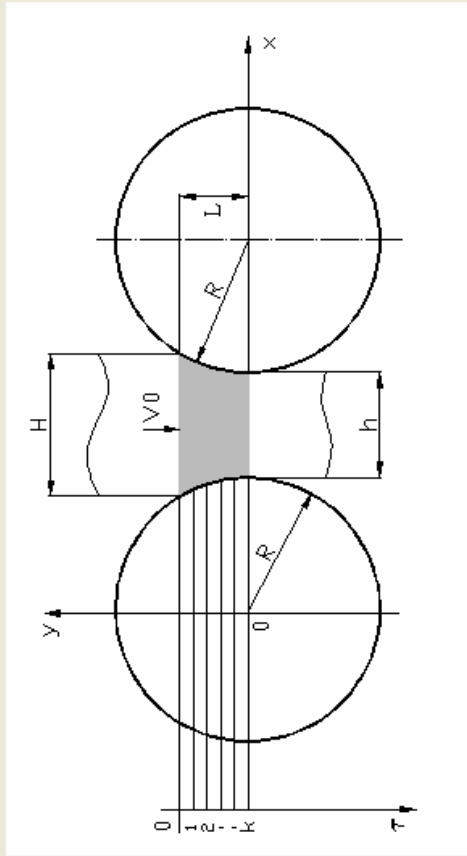
Исходная информация

H (мм)	78
h (мм)	60
R (мм)	220
V0 (мм/с)	10000

Количество разбитий очага деформации

9

Вычислить



Результаты расчета

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
τ (сек)	0.000675	0.001317	0.001932	0.002524	0.003095	0.003652	0.004196	0.004733	0.005266
ε	0.050496	0.096869	0.138564	0.175025	0.205721	0.230164	0.247943	0.258742	0.262364
T (град. C)	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
y_T (мм)	55.361	48.441	41.521	34.601	27.681	20.761	13.840	6.920	0.000
F_1 (мм)	212.920	214.601	216.046	217.262	218.252	219.018	219.564	219.891	220.000
F_2 (мм)	287.080	285.399	283.954	282.738	281.748	280.982	280.436	280.109	280.000
h_T (мм)	74.159	70.799	67.907	65.476	63.497	61.963	60.872	60.218	60.000
V_y (мм/сек)	10517.9	11017.2	11486.2	11912.8	12284.1	12588.1	12813.9	12953.0	13000.0

Передать информацию

<< Назад

$$\tau_i = \tau_0 + \int_{y_i}^L \frac{hT}{H \cdot V_0} dy. \quad (19)$$

Расчет интеграла в формуле (19) выполняется по методу Гаусса с точностью $1 \cdot 10^{-6}$.

Результаты расчета по рассматриваемому примеру представлены на рис.1-5. Исходная информация о напряжении течения металла для стали 60С2 (по данным работы [2]) представлена на рис.1, а по основным параметрам очага деформации при прокатке полосы на гладких цилиндрических валках - на рис.3.

Результаты расчета массивов τ_i, ε_i , полученные в окне программы на рис.3 автоматически были переданы в окно программы на рис.2.

Результаты расчета напряжения течения металла σ с учетом истории процесса нагружения представлены в окне программы на рис.2.

На рис.4. представлены графики функций $\varepsilon(\tau), U(\tau), T(\tau), \sigma(\tau)$.

На рис.5 представлены графики функций $\sigma(\tau)$ (результаты расчета по формуле (4)), а также $\sigma_1(\tau), \sigma_2(\tau)$ (результаты расчета по формуле (1)). Так как расчеты по формуле (1) (как для одной, так и двух экспонент) выполняются только при $T = \text{const}$, то и по формуле А.Надаи (4) они были выполнены при постоянной температуре ($T = 1000^\circ\text{C}$).

Выводы. Напряжение течения металла в начале очага деформации интенсивно растет (см. рис.4, 5). Это объясняется превалированием процессов упрочнения над разупрочнением в условиях, когда интенсивно увеличивается степень деформации $\varepsilon(\tau)$, а скорость деформации $U(\tau)$ уменьшается незначительно (см. рис.4). Во второй половине очага деформации рост σ замедляется, а затем напряжение течения металла начинает уменьшаться. Это объясняется превалированием процессов разупрочнения над упрочнением, когда интенсивно уменьшается скорость деформации $U(\tau)$, а степень деформации $\varepsilon(\tau)$ увеличивается незначительно (см. рис.4).

Изложенное позволяет сделать вывод о том, что на базе уравнения А.Надаи получена качественно правильная зависимость $\sigma = f(\tau)$ для условий прокатки. Количественная оценка выполнена по отношению к результатам расчета по формуле (1) [2] (см. рис.5).

Разработанный метод и компьютерная программа позволили практически реализовать расчет напряжения течения металла с учетом истории процесса нагружения на базе уравнения А.Надаи, которое в наиболее общем виде устанавливает зависимость $\sigma = f(\tau, \varepsilon, U, T)$.

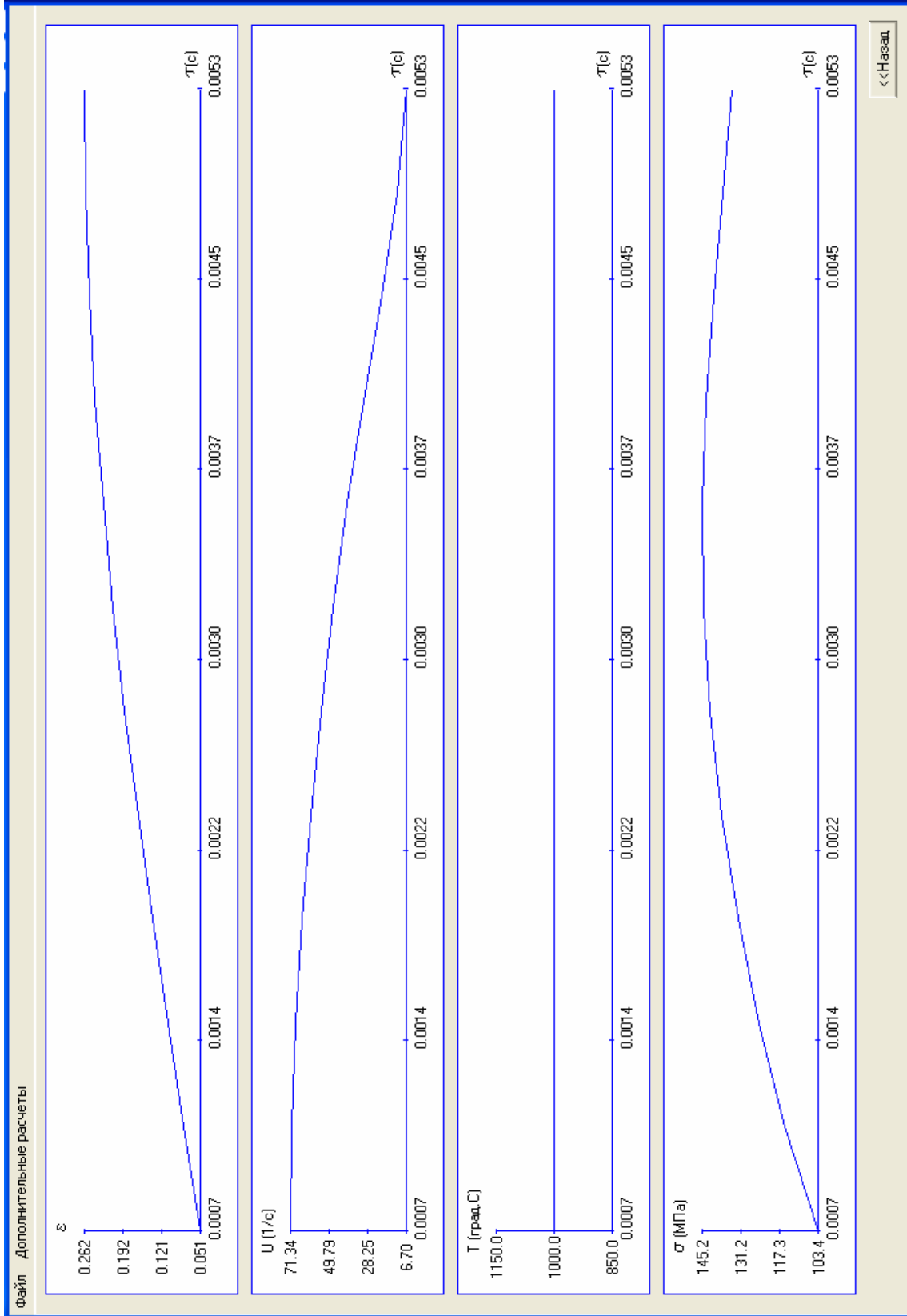


Рис.4. Окно программы визуализации графических зависимостей $\epsilon(\tau)$, $U(\tau)$, $T(\tau)$, $\sigma(\tau)$

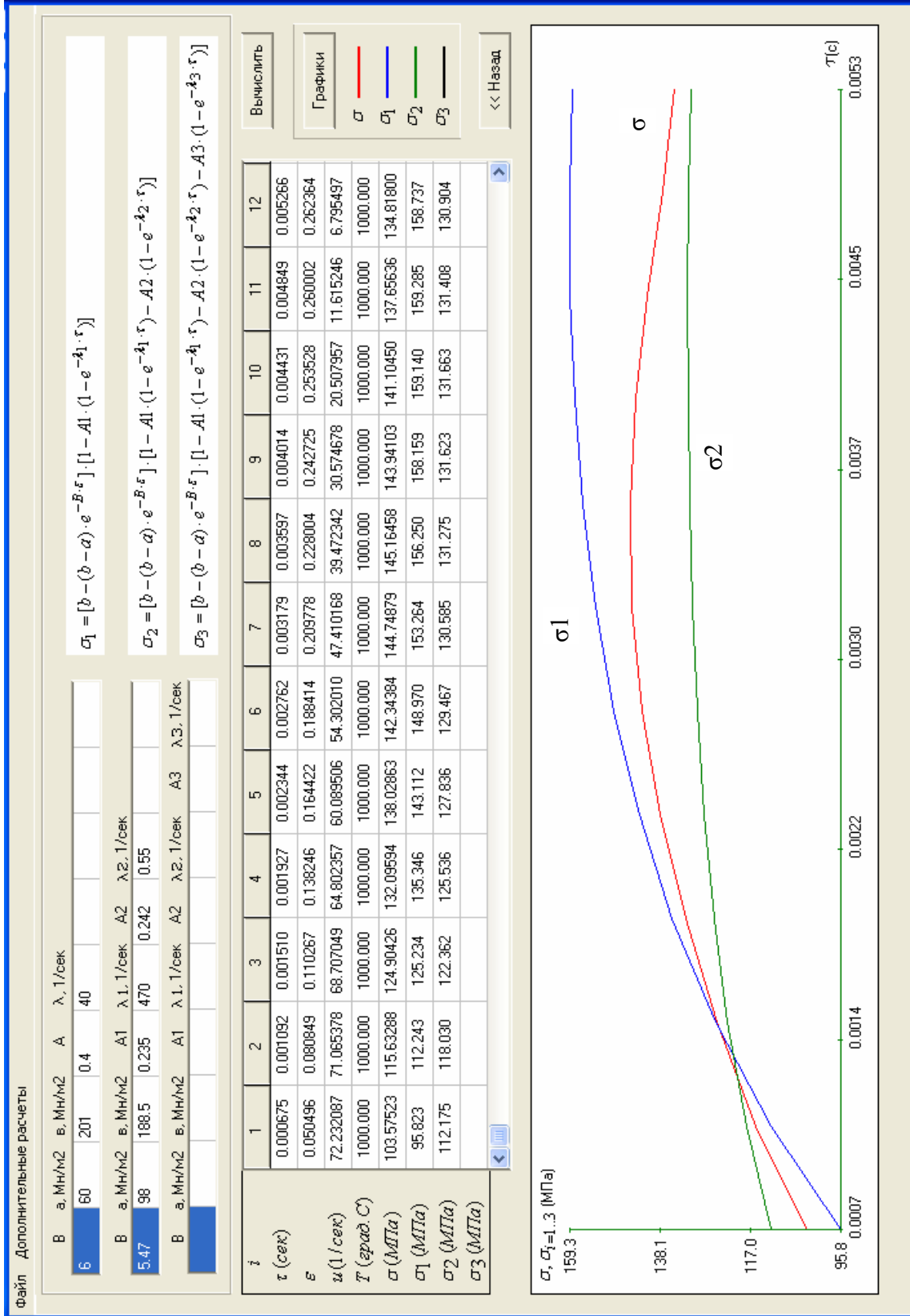


Рис.5. Окно программы визуализации графических зависимостей σ (τ) (по формуле А.Надаи,) σ_1 (τ) и σ_2 (τ) по формуле [2])

σ

15

Литература

1. Гун Г.Я. Об интерполяции кривых деформационного упрочнения / Г.Я. Гун, А.М. Галкин // Изв. АН СССР. Металлы. – 1982. - №4. - С.150 -152.
2. Применение теории ползучести при обработке металлов давлением / [Поздеев А.А., Тарновский В.И., Еремеев В.И., Баакашвили В.С.]. – М.: Металлургия, 1973, - 192 с.
3. Полухин П.И. Сопротивление пластической деформации металлов и сплавов: Справочник / П.И. Полухин, Г.Я. Гун, А.М. Галкин. - М.: Металлургия, 1983. - 352 с.