

4. Kaljaev I. A., Gajduk A. R., Kapustjan S. G. *Modeli i algoritmy kollektivnogo upravlenija v gruppah robotov* (Models and algorithms of collective control in groups of robots), Moscow, Fizmatlit, 2009, pp. 44–45 (in Russian).

5. Nesterov V. A., Kuprikov M. Ju., Obnosov B. V., Semenov I. M., Tihonov K. M., Trusov V. N. *Mehanika aviacionnyh robototekhnicheskijh sistem* (Mechanics aviation robotic systems), Manual, Moscow, Publishing House "Dashkov & K'", 2014, 464 p. (in Russian).

6. Sujit P. B., Sinha A., Goes D. *Multi-UAV Task Allocation using Team Theory*, Indian Institute of science, 2005.

7. Nesterov V. A., Pravidlo M. N., Obnosov B. V., Trusov V. N. *Konstruirovanie i proektirovanie ustanovok raketnogo vooruzhenija letatel'nyh apparatov* (The construction and design of rocket armament of aircrafts), Manual, Moscow, Publishing House "Dashkov & K'", 2014, 928 p. (in Russian).

8. Obnosov B. V., Nesterov V. A., Pravidlo M. N. *Teoreticheskie osnovy formirovanija racional'nogo oblika aviacionnyh upravljaemyh raket i ih sistem otdelenija pri sozdanii perspektivnyh aviacionnyh boevyh kompleksov* (The theoretical basis for the formation of a reasonable appearance of aircraft guided missiles and their systems department in the creation of advanced aviation weapons systems), Moscow, Publishing House "Dashkov & K'". 2013, pp. 78–79 (in Russian).

9. Joel G. Manathara, P. B. Sujit, Randal W. Beard Multiple UAV Coalitions for a Search and Prosecute Mission, *J. Intell. Robot Syst.*, 2011, Springer Science+Business Media B. V., 2010, no. 62, pp. 125–158, DOI 10.1007/s10846-010-9439-2.

10. Votjakov A. A., Kajunov N. T. *Ajerodinamika i dinamika poleta samoleta* (Aerodynamics and flight dynamics of aircraft), tutorial, Moscow, "DOSAAF", 1975, pp. 238–249 (in Russian).

С. З. Свердлов, канд. техн. наук, доц., проф., c3c@uni-vologda.ac.ru,
Вологодский государственный университет

Скороподъемность электрического мультикоптера

Получена зависимость скорости вертикального подъема электрического многороторного вертолета от высоты с учетом тяговооруженности, характеристики электродвигателя и силы лобового сопротивления. Получена формула для потолка висения. Приведены аппроксимированные аэродинамические характеристики пропеллеров, используемых в мультикоптерах. Предложен метод расчета скороподъемности и потолка висения при изменении напряжения питания.

Ключевые слова: беспилотный многороторный электрический вертолет, мультикоптер, скороподъемность, потолок висения, тяговооруженность, бесколлекторный электромотор

Целью исследования является изучение зависимости скорости вертикального подъема электрического многороторного вертолета (мультикоптера) от высоты. Скорость подъема вычисляется при работе электропривода летательного аппарата (ЛА) при 100 % газа. Определяются скороподъемность у поверхности Земли и потолок висения.

Принимаются во внимание следующие обстоятельства:

1. На мультикоптере используются электрические бесколлекторные (вентильные) электродвигатели, работа которых (но не работа винтомоторной группы) не зависит от плотности воздуха и высоты.

2. Используются несущие винты (пропеллеры) фиксированной геометрии.

3. Масса ЛА в течение полета остается неизменной.

4. Напряжение (ЭДС) аккумуляторной батареи снижается по мере расходования ее заряда.

5. Если не рассматривать момент старта, силы инерции не играют существенной роли при вертикальном полете ЛА рассматриваемого класса при 100 % газа. Как показывает расчет, ускорение (замедление) в этом случае не превышает $0,05 \text{ м/с}^2$, т. е. $0,5 \%$ ускорения свободного падения.

6. Уменьшением веса ЛА (ускорения свободного падения) с высотой можно пренебречь. На высоте 10 км это уменьшение составляет лишь $0,3 \%$.

Тяговооруженность мультикоптера

Ключевым фактором, определяющим скорость вертикального полета, является тяговооруженность — отношение максимальной тяги к весу мультикоптера у поверхности Земли:

$$k_T = \frac{T_{\max}}{G}, \quad (1)$$

где k_T — коэффициент запаса тяги (тяговооруженность); T_{\max} — максимальная тяга; G — вес летательного аппарата. Характерные значения тяговооруженности мультикоптеров 1,2...2,5.

Запас тяги существующего мультикоптера может быть определен экспериментально измерением тяги ЛА или отдельной винтомоторной группы. Для расчета тяговооруженности при проектировании нового ЛА нужно знать параметры электромотора, определяющие его механическую характеристику (зависимость угловой скорости от крутящего момента), и аэродинамические коэффициенты пропеллера. Производители бесколлекторных моторов публикуют данные испытаний двигателей с различными пропеллерами, в которых присутствуют сведения о тяге и оборотах двигателя при 100 % газа, позволяющие определить тяговооруженность.

Будем считать, что значение тяги $T_{\max} = T_{100}$ и частота вращения мотора n_{100} (об/с) при 100 % газа известны.

Уравнение равновесия

Пренебрегая силами инерции, условие равновесия мультикоптера при полете вверх можно записать в виде

$$T = G + Y, \quad (2)$$

где T — тяга, создаваемая несущими винтами; G — вес ЛА; Y — сила лобового сопротивления при полете вверх.

Вес ЛА остается неизменным. Для вычисления силы лобового сопротивления используем понятие эквивалентной круглой пластины, площадь которой можно оценить, зная компоновку мультикоптера. Сила лобового сопротивления Y вычисляется по формуле

$$Y = C_x \rho S \frac{V^2}{2}, \quad (3)$$

где C_x — коэффициент лобового сопротивления эквивалентной круглой пластины (хотя речь идет о движении по вертикали, будем использовать традиционный индекс x для коэффициента лобового сопротивления), $C_x = 1,16$ [1]; ρ — плотность воздуха; S — площадь эквивалентной пластины; V — вертикальная скорость ЛА.

Можно также считать, что приведенные соотношения относятся к весу, тяге, силе сопротивления и площади эквивалентной пластины, приходящимся на одну винтомоторную группу.

Аэродинамические характеристики пропеллеров мультикоптеров

Будем использовать "французскую систему винтовых коэффициентов" [1–3]. Относительная поступь пропеллера (число Струхала, коэффициент скорости) λ характеризует скорость набегающего потока (вертикальную скорость мультикоптера):

$$\lambda = \frac{V}{nD}, \quad (4)$$

где D — диаметр пропеллера; n — частота вращения пропеллера (c^{-1}).

Безразмерный коэффициент тяги $\alpha(\lambda)$ используется для расчета силы тяги, создаваемой винтом:

$$T = \alpha(\lambda) \rho D^4 n^2. \quad (5)$$

Коэффициент $\alpha(\lambda)$ зависит от формы винта и относительной поступи. Зависимость $\alpha(\lambda)$ существенным образом определяет баланс сил при вертикальном полете мультикоптера.

Безразмерный коэффициент мощности $\beta(\lambda)$ входит в формулу расчета мощности N , необходимой для вращения винта:

$$N = \beta(\lambda) \rho D^5 n^3. \quad (6)$$

Коэффициент $\beta(\lambda)$ определяет и крутящий момент $M_{кр}$, необходимый для вращения пропеллера. Действительно,

$$N = M_{кр} \Omega = M_{кр} \cdot 2\pi n, \quad (7)$$

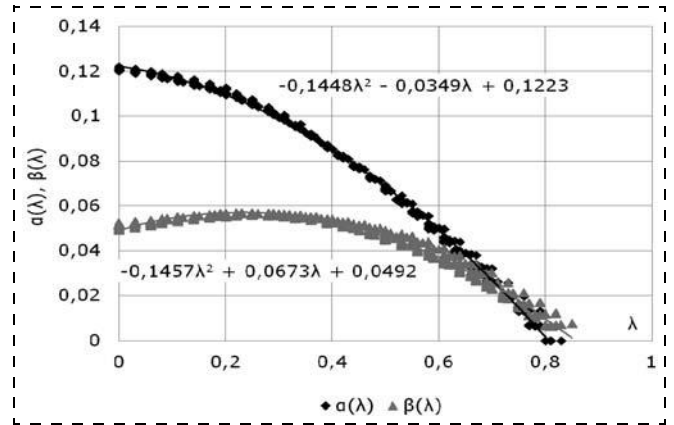


Рис. 1. Зависимость коэффициентов тяги и мощности от относительной поступи (пропеллер APC 8x45MR)

где Ω — угловая скорость пропеллера. Из соотношений (6) и (7) следует:

$$M_{кр} = \frac{N}{2\pi n} = \frac{\beta(\lambda) \rho D^5 n^3}{2\pi n} = \frac{\beta(\lambda)}{2\pi} \rho D^5 n^2. \quad (8)$$

На рис. 1 приведен пример зависимости коэффициентов α и β от относительной поступи λ для одного из пропеллеров серии MR, выпускаемых компанией Landing Products Inc. (США) под торговой маркой APC [5]. Серия пропеллеров APC MR специально предназначена для мультироторных ЛА (MR — MultiRotor). Данные, представленные Landing Products Inc., получены вычислительными методами на основе вихревой теории. Они хорошо согласуются с экспериментальными результатами, приведенными в работах [6, 7].

Для использования в аналитических расчетах зависимости $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ можно аппроксимировать. Многочлен второй степени дает хорошее соответствие фактическим данным:

$$\alpha(\lambda) \approx \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2; \quad (9)$$

$$\beta(\lambda) \approx \beta_0 + \beta_1 \lambda + \beta_2 \lambda^2. \quad (10)$$

На рис. 1 сплошными линиями показаны аппроксимирующие зависимости. В табл. 1 приведены коэффициенты аппроксимации $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ для пропеллеров APC MR.

Величины α_0 и β_0 представляют собой значения коэффициентов тяги и мощности при работе пропеллера на месте. Значения α_1 и α_2 отрицательны, что говорит о монотонном убывании $\alpha(\lambda)$. Напротив, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 < 0$, это свидетельствует о том, что $\beta(\lambda)$ при малых значениях λ возрастает.

В табл. 1 даны также нормированные значения коэффициентов аппроксимации тяги и мощности, которые будут использованы в дальнейшем:

$$\bar{\alpha}_1 = \alpha_1/\alpha_0; \quad \bar{\alpha}_2 = \alpha_2/\alpha_0; \quad \bar{\beta}_1 = \beta_1/\beta_0; \quad \bar{\beta}_2 = \beta_2/\beta_0;$$

$$\bar{\alpha}(\lambda) = 1 + \bar{\alpha}_1 \lambda + \bar{\alpha}_2 \lambda^2;$$

$$\bar{\beta}(\lambda) = 1 + \bar{\beta}_1 \lambda + \bar{\beta}_2 \lambda^2. \quad (11)$$

Аппроксимация коэффициентов тяги и мощности

Пропеллер	Коэффициент тяги					Коэффициент мощности					λ_{\max}
	α_0	α_1	α_2	$\bar{\alpha}_1$	$\bar{\alpha}_2$	β_0	β_1	β_2	$\bar{\beta}_1$	$\bar{\beta}_2$	
APC 8x45MR	0,1223	-0,0349	-0,1448	-0,2854	-1,1840	0,0492	0,0673	-0,1457	1,3679	-2,9614	0,80638
APC 9x45MR	0,1187	-0,0569	-0,1405	-0,4794	-1,1837	0,0459	0,0513	-0,1387	1,1176	-3,0218	0,73870
APC 10x45MR	0,1140	-0,0763	-0,1291	-0,6693	-1,1325	0,0429	0,0355	-0,1248	0,8275	-2,9091	0,68956
APC 10x55MR	0,1230	-0,0416	-0,1414	-0,3382	-1,1496	0,0511	0,0542	-0,1343	1,0607	-2,6282	0,79710
APC 11x45MR	0,1055	-0,0823	-0,1254	-0,7801	-1,1886	0,0379	0,0292	-0,1182	0,7704	-3,1187	0,64601
APC 12x45MR	0,1006	-0,0915	-0,1196	-0,9095	-1,1889	0,0351	0,0227	-0,1123	0,6467	-3,1994	0,61119
APC 12x55MR	0,1117	-0,0693	-0,1299	-0,6204	-1,1629	0,0428	0,0320	-0,1179	0,7477	-2,7547	0,69816
APC 13x55MR	0,1020	-0,0738	-0,1223	-0,7235	-1,1990	0,0373	0,0225	-0,1104	0,6032	-2,9609	0,66008
APC 14x55MR	0,0983	-0,0829	-0,1172	-0,8433	-1,1923	0,0345	0,0186	-0,1008	0,5391	-2,9217	0,62807
APC 16x55MR	0,0908	-0,0918	-0,1128	-1,0110	-1,2423	0,0300	0,0177	-0,1020	0,5900	-3,4000	0,57825
APC 18x55MR	0,0847	-0,0961	-0,1134	-1,1346	-1,3388	0,0267	0,0144	-0,0986	0,5393	-3,6929	0,53880

Приведены также значения коэффициента скорости λ_{\max} , при котором коэффициент тяги становится равным нулю.

Характеристика винтомоторной группы

Механическая характеристика бесколлекторного мотора в осях "крутящий момент — частота вращения" представляет собой прямую линию [8, 9] (рис. 2). Характеристика пропеллера — парабола: крутящий момент пропорционален квадрату частоты вращения.

Частота холостого хода мотора n_0 может быть вычислена по значениям питающего напряжения U_0 и постоянной скорости мотора K_V , которая является его паспортной характеристикой:

$$n_0 = U_0 K_V \tag{12}$$

Точка *A* на рис. 2 соответствует режиму максимальной тяги у поверхности Земли при работе на месте. Координаты этой точки известны. Уравнение характеристики двигателя — прямой, проходящей через две точки, — можно записать в виде

$$n = n_0 - \frac{n_0 - n_{100}}{M_{100}} M \tag{13}$$

Из соотношений (5) и (8) следует, что

$$M = \frac{\beta(\lambda)DT}{2\pi\alpha(\lambda)} \tag{14}$$

В частности, для точки *A* на рис. 2:

$$M_{100} = \frac{\beta(0)DT_{100}}{2\pi\alpha(0)} \tag{15}$$

Подставляя выражения (14) и (15) в соотношение (13), получим

$$n = n_0 - \frac{(n_0 - n_{100})\alpha(0)\beta(\lambda)T}{T_{100}\alpha(\lambda)\beta(0)} \tag{16}$$

Учитывая соотношения (11), поделив обе части формулы (16) на n_0 и выразив максимальную тягу через тяговооруженность и вес ЛА из формулы (1),

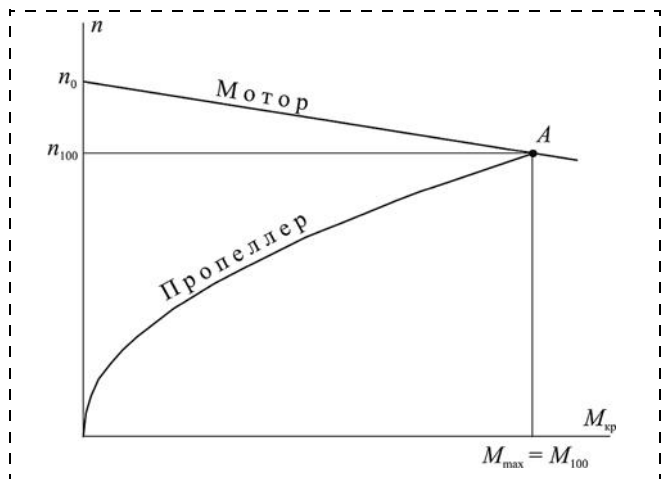


Рис. 2. Характеристика винтомоторной группы

получим уравнение механической характеристики мотора в относительных единицах:

$$\bar{n}(\lambda) = 1 - \frac{(1 - \eta_{100})\bar{\beta}(\lambda)}{k_T G \bar{\alpha}(\lambda)} T, \tag{17}$$

где $\bar{n}(\lambda)$ — относительная частота вращения, а коэффициент $\eta \leq 1$ характеризует жесткость характеристики двигателя:

$$\eta_{100} = \frac{n_{100}}{n_0} \tag{18}$$

Соотношение (17) определяет относительную частоту вращения как функцию коэффициента скорости λ . Поэтому здесь и далее будем использовать обозначение $\bar{n}(\lambda)$. Величина η_{100} приближенно равна коэффициенту полезного действия двигателя под нагрузкой, создаваемой моментом M_{100} .

Лобовое сопротивление

На заданной высоте мультикоптер при подъеме вверх обладает скоростью, соответствующей определенному значению λ . Плотность воздуха ρ и высота в стандартной атмосфере связаны взаимно однозначной зависимостью. Задача о скороподъемно-

сти может быть сведена к определению зависимости $\rho(\lambda)$, т. е. такой плотности воздуха, которая при данном значении λ обеспечивает баланс сил в соответствии с формулой (2). Введем в рассмотрение относительную плотность воздуха $\bar{\rho}(\lambda)$:

$$\bar{\rho}(\lambda) = \frac{\rho(\lambda)}{\rho_0}, \quad (19)$$

где ρ_0 — плотность воздуха у поверхности Земли. Скорость подъема V выражается через относительную поступь λ из формулы (4) следующим образом:

$$V = \lambda n(\lambda) D. \quad (20)$$

Поделив обе части соотношения (20) на $n_0 D$, получим выражение для безразмерной относительной скорости $\bar{v}(\lambda)$:

$$\bar{v}(\lambda) = \frac{V}{n_0 D} = \lambda \bar{n}(\lambda). \quad (21)$$

Учитывая выражения (19) и (21), преобразуем формулу (3):

$$Y = \frac{C_x \rho_0 S n_0^2 D^2}{2} \bar{\rho}(\lambda) \bar{v}^2(\lambda). \quad (22)$$

Введем в рассмотрение безразмерный коэффициент

$$K_x = \frac{C_x \rho_0 S n_0^2 D^2}{2 G}. \quad (23)$$

Значение K_x равно отношению силы лобового сопротивления к весу при скорости набегающего потока $n_0 D$ и плотности воздуха ρ_0 . Величина $n_0 D$, в свою очередь, пропорциональна скорости на конце лопасти пропеллера при оборотах холостого хода. Диапазон изменения K_x как величины относительной может быть меньше, чем диапазон изменения соответствующих абсолютных величин, что упрощает исследование. Формула (22) теперь запишется в виде

$$Y = G K_x \bar{\rho}(\lambda) \lambda^2 \bar{n}^2(\lambda). \quad (24)$$

Связь плотности воздуха и коэффициента скорости

Запишем выражение (5) для тяги пропеллера, учитывая, что в рассматриваемой задаче не только коэффициент тяги, но также частота вращения и плотность воздуха, при которой достигается заданная скорость подъема, зависят от коэффициента скорости λ :

$$T = \alpha(\lambda) \rho(\lambda) D^4 n^2(\lambda). \quad (25)$$

При работе пропеллера на месте при 100 % газа имеет место соотношение

$$G k_T = \alpha(0) \rho_0 D^4 n_{100}^2. \quad (26)$$

Чтобы перейти к относительным величинам, разделим выражение (25) на (26):

$$\frac{T}{G k_T} = \frac{\alpha(\lambda) \rho(\lambda) n^2(\lambda)}{\alpha(0) \rho_0 n_{100}^2} = \frac{\bar{\alpha}(\lambda) \bar{\rho}(\lambda) n^2(\lambda)}{n_{100}^2}. \quad (27)$$

Разделив числитель и знаменатель правой части соотношения (27) на n_{100}^2 , получим

$$\frac{T}{G k_T} = \frac{\bar{\alpha}(\lambda) \bar{\rho}(\lambda) \bar{n}^2(\lambda)}{n_{100}^2}, \quad (28)$$

откуда

$$T = G k_T \frac{\bar{\alpha}(\lambda) \bar{\rho}(\lambda) \bar{n}^2(\lambda)}{n_{100}^2}. \quad (29)$$

Подставляя выражения для тяги (29) и лобового сопротивления (24) в уравнение равновесия (2) и выполняя сокращения, получаем

$$k_T \frac{\bar{\alpha}(\lambda) \bar{\rho}(\lambda) \bar{n}^2(\lambda)}{n_{100}^2} = 1 + K_x \bar{\rho}(\lambda) \lambda^2 \bar{n}^2(\lambda). \quad (30)$$

Из выражения (30) можно найти зависимость относительной плотности воздуха от коэффициента скорости:

$$\bar{\rho}(\lambda) = \frac{n_{100}^2}{[k_T \bar{\alpha}(\lambda) - n_{100}^2 K_x \lambda^2] \bar{n}^2(\lambda)}. \quad (31)$$

Частота вращения пропеллера

В формулу (31) входит неизвестная величина относительной частоты вращения пропеллера $\bar{n}(\lambda)$. Для ее определения подставим выражение для тяги (2) в уравнение механической характеристики двигателя (17). С учетом (24) получим

$$\bar{n}(\lambda) = 1 - \frac{(1 - \eta_{100}) \bar{\beta}(\lambda)}{k_T \bar{\alpha}(\lambda)} [1 + K_x \bar{\rho}(\lambda) \lambda^2 \bar{n}^2(\lambda)]. \quad (32)$$

Формула (32) не может использоваться непосредственно для вычисления $\bar{n}(\lambda)$, однако из (31) можно найти выражение $\bar{\rho}(\lambda) \bar{n}^2(\lambda)$:

$$\bar{\rho}(\lambda) \bar{n}^2(\lambda) = \frac{n_{100}^2}{k_T \bar{\alpha}(\lambda) - n_{100}^2 K_x \lambda^2}. \quad (33)$$

Подставляя правую часть формулы (33) в правую часть (32) вместо $\bar{\rho}(\lambda) \bar{n}^2(\lambda)$, получим

$$\bar{n}(\lambda) = 1 - \frac{(1 - \eta_{100}) \bar{\beta}(\lambda)}{k_T \bar{\alpha}(\lambda)} \left[1 + \frac{n_{100}^2 K_x \lambda^2}{k_T \bar{\alpha}(\lambda) - n_{100}^2 K_x \lambda^2} \right]. \quad (34)$$

Зависимость скорости от высоты

Полученные формулы позволяют найти зависимость скорости подъема мультикоптера V от высоты H (назовем ее скороподъемностью) в виде параметрически заданной функции. Роль параметра при этом исполняет коэффициент скорости λ . Изменение λ от 0 до значения, при котором $\bar{\rho}(\lambda) = 1$, соответствует изменению скорости от нуля до скорости вертикального подъема у поверхности Земли, а высоты — от потолка висения до нуля.

Высота в метрах в зависимости от относительной плотности воздуха в стандартной атмосфере вычисляется по формуле В. Бьеркнеса [10]:

$$H(\lambda) = 44\,300(1 - \bar{\rho}^{1/4,256}(\lambda)), \quad (35)$$

скорость — по формуле, которая следует из соотношения (21):

$$V(\lambda) = \lambda \bar{n}(\lambda) D n_0. \quad (36)$$

Относительная частота вращения $\bar{n}(\lambda)$, входящая в выражение (36), определяется по формуле (34), а относительная плотность воздуха $\bar{\rho}(\lambda)$, из выражения (35) — по формуле (31). Данные для вычисления относительных коэффициентов тяги $\bar{\alpha}(\lambda)$ и мощности $\bar{\beta}(\lambda)$ по формулам (11) приведены в табл. 1.

Вместо $V(\lambda)$ можно рассматривать относительную безразмерную скорость $\bar{v}(\lambda)$, определенную в соответствии с формулой (21). Это позволит при анализе скороподъемности уменьшить число обсуждаемых вариантов.

Пример расчета

Выполним расчет скороподъемности для построенного автором квадрокоптера [11] со следующими параметрами: полетная масса 2,7 кг, четыре мотора T-Motor 3506, $K_V = 650 \text{ мин}^{-1} \cdot \text{В}^{-1}$, пропеллеры APC 12x45MR диаметром 12 дюймов, $D = 0,30 \text{ м}$, максимальная тяга одной ВМГ $1,17 \cdot 10^{-2} \text{ Н}$ при 6255 мин^{-1} и напряжении питания $U_0 = 14,8 \text{ В}$. Тяговооруженность $k_T = 1,17 \cdot 4/2,7 = 1,73$. Диаметр эквивалентной по лобовому сопротивлению круглой пластины оценивается в 0,15 м, безразмерный коэффициент лобового сопротивления в этих условиях $K_x = 1,13$. Обороты холостого хода $n_0 = 650 \cdot 14,8 = 9620 \text{ мин}^{-1} = 160,3 \text{ с}^{-1}$, коэффициент жесткости характеристики двигателя $\eta_{100} = 6255/9620 = 0,65$. Рассчитанный по этим данным график зависимости скорости вертикального подъема и высоты показан на рис. 3.

Максимальная скорость подъема на уровне Земли 10,95 м/с, максимальная высота (потолок висения) 8926 м.



Рис. 3. Диаграмма скороподъемности мультикоптера

Потолок висения

Полученные результаты позволяют вычислить потолок висения мультикоптера. Для этого достаточно подставить в соответствующие формулы $\lambda = 0$. Учитывая, что $\bar{\alpha}(0) = 1$ и $\bar{\beta}(0) = 1$, из соотношения (34) получаем

$$\bar{n}(0) = 1 - \frac{(1 - \eta_{100})}{k_T}. \quad (37)$$

Из формулы (31) с учетом выражения (37) следует

$$\bar{\rho}(0) = \left(\frac{\eta_{100} \sqrt{k_T}}{k_T + \eta_{100} - 1} \right)^2. \quad (38)$$

Потолок висения в метрах выражается формулой

$$H_{\text{вис}} = 44\,300 \cdot \left[1 - \left(\frac{\eta_{100} \sqrt{k_T}}{k_T + \eta_{100} - 1} \right)^{2/4,256} \right]. \quad (39)$$

Зависимость от характеристик пропеллера

Как видно из формулы (39), потолок висения не зависит от аэродинамических характеристик пропеллера. Однако в формулы, определяющие скороподъемность на меньших высотах, входят коэффициенты тяги $\bar{\alpha}(\lambda)$ и мощности $\bar{\beta}(\lambda)$. Чтобы при изучении влияния параметров мультикоптера на скорость подъема не рассматривать каждый пропеллер в отдельности, можно попытаться унифицировать характеристики пропеллеров.

Значения нормированных коэффициентов тяги $\bar{\alpha}(\lambda)$ и мощности $\bar{\beta}(\lambda)$ при $\lambda = 0$ равны 1. Значения же коэффициента скорости, при которых коэффициент тяги становится равным нулю (обозначим λ_{max}), для различных пропеллеров существенно отличаются. Чтобы найти эти значения, нужно решить квадратное уравнение $\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 = 0$. Вычисленные таким образом значения λ_{max} приведены в табл. 1.

На рис. 4 показана диаграмма скороподъемности, рассчитанная для трех пропеллеров: APC 8x45MR, APC 12x45MR и APC 18x55MR. При этом по оси абсцисс отложены значения $\bar{v}/\lambda_{\text{max}}$, т. е. относительная скорость, нормированная значениями λ_{max} .

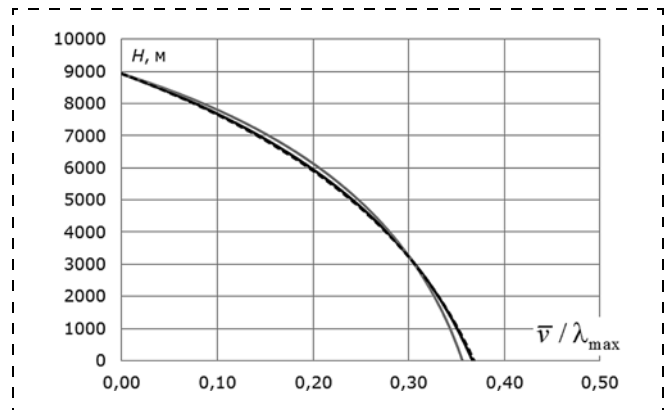


Рис. 4. Нормированные диаграммы скороподъемности

Относительная скороподъемность у поверхности Земли

K_x	η_{100}	Тяговооруженность k_T					
		1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50
		Относительная скорость \bar{v}					
0,0	1,0	0,1783	0,2707	0,3294	0,3704	0,4008	0,4243
	0,8	0,1399	0,2273	0,2859	0,3277	0,3590	0,3832
	0,6	0,1032	0,1787	0,2328	0,2725	0,3026	0,3261
1,0	1,0	0,1623	0,2445	0,2986	0,3378	0,3678	0,3917
	0,8	0,1306	0,2088	0,2621	0,3013	0,3315	0,3556
	0,6	0,0988	0,1679	0,2176	0,2546	0,2834	0,3063
2,0	1,0	0,1505	0,2255	0,2760	0,3134	0,3426	0,3663
	0,8	0,1233	0,1948	0,2443	0,2813	0,3103	0,3339
	0,6	0,0952	0,1593	0,2055	0,2405	0,2680	0,2903

Таблица 3

Скороподъемность у поверхности Земли

K_x	η_{100}	Тяговооруженность k_T					
		1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50
		Скорость, м/с					
0,0	1,0	8,7	13,2	16,1	18,1	19,6	20,7
	0,8	6,8	11,1	14,0	16,0	17,5	18,7
	0,6	5,0	8,7	11,4	13,3	14,8	15,9
1,0	1,0	7,9	11,9	14,6	16,5	18,0	19,1
	0,8	6,4	10,2	12,8	14,7	16,2	17,4
	0,6	4,8	8,2	10,6	12,4	13,8	15,0
2,0	1,0	7,4	11,0	13,5	15,3	16,7	17,9
	0,8	6,0	9,5	11,9	13,7	15,2	16,3
	0,6	4,7	7,8	10,0	11,8	13,1	14,2

Как видно, отличия в ходе кривых невелики. Поэтому в дальнейших расчетах будем использовать характеристики пропеллера APC 12x45MR. Чтобы получить приближенные значения относительной скорости подъема для другого пропеллера, можно воспользоваться формулой

$$\bar{v} = \bar{v}^* \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\max}^*}, \quad (40)$$

где звездочкой обозначены данные пропеллера APC 12x45MR.

Скороподъемность у поверхности Земли

Чтобы определить максимальную скорость вертикального подъема у поверхности Земли, нужно найти значение коэффициента скорости λ , при котором относительная плотность воздуха $\bar{\rho}(\lambda)$ равна 1, т. е. решить относительно λ уравнение (31) с левой частью, равной 1. Затем по формулам (34) и (21) вычисляются относительная частота вращения и относительная безразмерная скорость подъема.

В табл. 2 приведены рассчитанные таким способом значения относительной безразмерной скорости v для различных значений тяговооруженности, коэффициента лобового сопротивления K_x и коэффициента жесткости характеристики двигателя η_{100} . Расчет выполнен с использованием нормированных аэродинамических коэффициентов пропеллера APC 12x45MR.

Данные табл. 2 можно использовать для определения скороподъемности при других значениях параметров путем интерполяции табличных значений.

В табл. 3 для примера даются значения абсолютной скорости подъема у поверхности Земли для квадрокоптера из приведенного выше примера: пропеллер диаметром 12 дюймов ($D = 0,30$ м), обороты холостого хода 9620 мин^{-1} ($n_0 = 160,3 \text{ с}^{-1}$).

Зависимость от напряжения питания

Напряжение аккумуляторной батареи (АКБ) уменьшается по мере расходования ее заряда. Поэтому, например, зависимость, показанную на графике на рис. 3, нельзя использовать для расчета времени подъема ЛА на заданную высоту. Этот график лишь показывает, с какой скоростью может подниматься ЛА на заданной высоте при том же напряжении питания, при котором определялся запас тяги. В рассмотренном выше примере это 14,8 В — номинальное напряжение батареи из четырех литий-полимерных аккумуляторов.

Чтобы не увеличивать число параметров задачи при учете изменения напряжения АКБ, можно вычислить значения тяговооруженности и коэффициента жесткости механической характеристики двигателя для винтомоторной группы (ВМГ), работающей при изменившемся напряжении. Для этого нужно определить координаты точки A' (рис. 5) на характеристике ВМГ по известным координатам точки A .

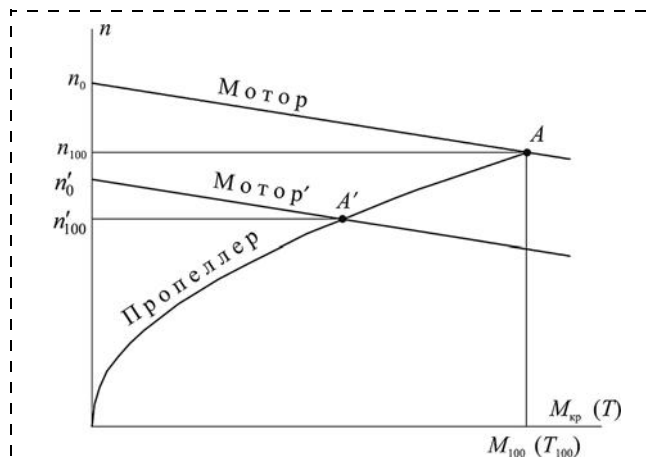


Рис. 5. Характеристика ВМГ при изменении напряжения питания

На рис. 5 штрихом отмечены параметры мотора, работающего при напряжении U'_0 , отличном от U_0 . Обозначим коэффициент изменения напряжения

$$u = \frac{U'_0}{U_0}. \quad (41)$$

Характеристики двигателя при различном напряжении питания представляют собой параллельные линии. При этом

$$n'_0 = U'_0 K_V = un_0. \quad (42)$$

Из уравнения характеристики двигателя (16) при $\lambda = 0$ (тяговооруженность определяется при работе на месте) получаем

$$n = n_0 - \frac{(n_0 - n_{100})}{T_{100}} T. \quad (43)$$

Наклон характеристики не меняется при изменении напряжения. Учитывая, что $T_{100} = Gk_T$, а $T'_{100} = Gk'_T$, можно записать:

$$\begin{aligned} n'_{100} &= n'_0 - \frac{(n_0 - n_{100})}{T_{100}} T'_{100} = \\ &= n'_0 - \frac{(n_0 - n_{100})}{k_T} k'_T. \end{aligned} \quad (44)$$

Уравнение характеристики пропеллера:

$$n = n_{10} \sqrt{\frac{T}{T_{100}}}, \quad (45)$$

для точки A' :

$$n'_{100} = n_{100} \sqrt{\frac{T'_{100}}{T_{100}}} = n_{100} \sqrt{\frac{k'_T}{k_T}}. \quad (46)$$

Подставляя n'_{100} из формулы (46) в соотношение (44), получим уравнение для нахождения k'_T — коэффициента тяговооруженности при измененном напряжении:

$$n_{100} \sqrt{\frac{k'_T}{k_T}} = n'_0 - \frac{(n_0 - n_{100})}{k_T} k'_T. \quad (47)$$

Разделим выражение (47) на n_0 . Получим

$$\eta_{100} \sqrt{\frac{k'_T}{k_T}} = u - \frac{(1 - \eta_{100})}{k_T} k'_T. \quad (48)$$

Обозначим $x = \sqrt{k'_T}$, соответственно, $k'_T = x^2$. Тогда из соотношения (48) получаем уравнение:

$$(1 - \eta_{100})x^2 + \sqrt{k_T} \eta_{100} x - k_T u = 0. \quad (49)$$

При $\eta_{100} = 1$ его решением является

$$x = \sqrt{k_T} u; \quad k'_T = k_T u^2. \quad (50)$$

При $\eta_{100} < 1$ решением будет один из корней квадратного уравнения (49):

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{k_T} \frac{\sqrt{\eta_{100}^2 + 4u(1 - \eta_{100})} - \eta_{100}}{2(1 - \eta_{100})}; \\ k'_T &= k_T \left[\frac{\sqrt{\eta_{100}^2 + 4u(1 - \eta_{100})} - \eta_{100}}{2(1 - \eta_{100})} \right]^2. \end{aligned} \quad (51)$$

Обозначим коэффициент пересчета тяговооруженности \bar{k}_T :

$$\bar{k}_T = \begin{cases} u_2 \text{ при } \eta_{100} = 1; \\ \left[\frac{\sqrt{\eta_{100}^2 + 4u(1 - \eta_{100})} - \eta_{100}}{2(1 - \eta_{100})} \right]^2 \text{ при } \eta_{100} < 1; \end{cases} \quad (52)$$

$$k'_T = \bar{k}_T k_T. \quad (53)$$

Для нахождения коэффициента жесткости характеристики двигателя при измененном напряжении разделим левую и правую части уравнения (44) на n'_0 , а затем числитель и знаменатель дроби в правой части разделим еще и на n_0 :

$$\eta'_{100} = 1 - \frac{(n_0 - n_{100})}{n'_0} \frac{k'_T}{k_T} = 1 - \frac{1 - \eta_{100}}{u} \bar{k}_T. \quad (54)$$

Формулы (52), (53) и (54) с учетом (41) и (42) позволяют для расчета скорости подъема и потолка висения при напряжении, отличном от того, при котором определялась тяговооруженность, воспользоваться приведенными выше результатами, полученными без учета изменения напряжения.

На рис. 3 показана диаграмма скороподъемности мультикоптера при напряжении, пониженном до 14,0 В. Расчет выполнен по следующим параметрам: коэффициент изменения напряжения $u = 14,0/14,8 = 0,946$; коэффициент пересчета тяговооруженности $\bar{k}_T = 0,921$ по формуле (52) при $\eta_{100} = 0,65$; измененный коэффициент тяговооруженности $k'_T = \bar{k}_T k_T = 0,921 \cdot 1,73 = 1,59$; измененный коэффициент жесткости характеристики двигателя по формуле (54) $\eta'_{100} = 0,659$; обороты холостого хода $n'_0 = un_0 = 0,946 \cdot 160,3 = 151,7 \text{ с}^{-1}$.

Список литературы

1. **Справочник** авиаконструктора. Т. 1. Аэродинамика самолета. М.: Изд. ЦАГИ, 1937. 512 с.
2. **Юрьев Б. Н.** Аэродинамический расчет вертолетов. М.: Оборонгиз, 1956.
3. **Прицкер Д. М., Сахаров Г. И.** Аэродинамика. М: Машиностроение, 1968.
4. **Обуховский А. Д.** Аэродинамика воздушного винта: учеб. пособ. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2009. 80 с.
5. **Landing Products Inc.** APC Propeller Performance Data. URL: <http://www.apcprop.com/Articles.asp?ID=270>
6. **Brandt J. B., Selig M. S.** Propeller Performance Data at Low Reynolds Number // 49th AIAA Aerospace Sciences Meeting, AIAA Paper. 2011-1255, Orlando, FL, January 2011.
7. **Brandt J. B., Deters R. W., Ananda G. K., Selig M. S.** UIUC Propeller Database, University of Illinois at Urbana-Champaign. URL: <http://m-selig.ae.illinois.edu/props/propDB.html>
8. **Овчинников И. Е.** Вентильные электрические двигатели и привод на их основе (малая и средняя мощность) / Курс лекций. СПб.: Корона-Век, 2006. 336 с.
9. **Xia Chang-Hang.** Permanent magnet brushless DC motor drives and controls. John Wiley & Sons Singapore Pte. Ltd., 2012.
10. **Фабрикант Н. Я.** Аэродинамика. Общий курс. М.: Наука, 1964. 815 с.
11. **Свердлов С.** Квадрокоптер. URL: <http://forum.rcdesign.ru/blogs/174358/blog18011.html>

Rate of Climb of Electric Multicopter

S. Z. Sverdlov, c3c@uni-vologda.ac.ru✉,
Vologda State University, Vologda, 160000, Russian Federation

Corresponding author: **Sverdlov Sergei Z.**, PhD, Associate Professor,
Vologda State University, Vologda, 160000, Russian Federation,
e-mail: c3c@uni-vologda.ac.ru

Received on January 25, 2016
Accepted on February 04, 2016

The aim of the research is to study the dependence of the ascensional rate of electric multicopter from the height. Ascent rate is calculated for the operation of electric drive with 100 % of the throttle. The following facts are considered: brushless electric motors, which functioning does not depend on the air density and height, are used; fixed geometry rotors are used; the weight of the aircraft during the flight remains unchanged; the battery voltage decreases as its charge runs down; except for the time of start, the inertial forces do not play a significant role in a vertical flight. Rate of climb on the ground and hovering ceiling are determined. The dependence of the multicopter vertical velocity on the altitude was discovered. The calculation takes into account thrust-weight ratio, electric motor characteristics and drag force. Dependence is defined as a parametric function with advance ratio as a parameter. The formula of the hovering ceiling is proposed. Approximated aerodynamic characteristics of propellers used in multicopters are provided. The dependence of the rate of climb of the aerodynamic characteristics of the propeller is examined. A method of adaptation of the results for different propellers is proposed. The calculation of the rate of climb on the ground requires a numerical solution of the equation with advance ratio as the unknown. Solution results for several parameters values are presented as a table. These data can be used for calculation of climb as an interpolation of table values. The method of calculation of the rate of climb and hovering ceiling with changing supply voltage is proposed. Instead of increasing the dimension of the problem, it's proposed to perform the calculation of the thrust-weight coefficients and inflexibility of the engine characteristics for altered supply voltage. Examples of calculation per the method proposed are provided for a quadcopter built by the author.

Keywords: electric multicopter, rate of climb, hovering ceiling, thrust-to-weight ratio, BLDC-motor

For citation:

Sverdlov S. Z. Rate of Climb of Electric Multicopter, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 6, pp. 425–432.

DOI: 10.17587/mau.17.425-432

References

1. **Spravochnik aviakonstruktora. V. I. Ajerodinamika samoleta** (Aircraft designer handbook. The aerodynamics of the aircraft), Moscow, CAGI Publishing, 1937, 512 p.
2. **Jur'ev B. N. Ajerodinamicheskij raschet vertoletov** (Aerodynamic calculation of helicopters), Moscow, Oborongiz, 1956.
3. **Pricker D. M., Saharov G. I. Ajerodinamika** (Aerodynamics), Moscow, Mashinostroenie, 1968.
4. **Obuhovskij A. D. Ajerodinamika vozdushnogo vinta** (Propeller aerodynamics), Novosibirsk, NGTU Publishing, 2009, 80 p.
5. **Landing Products Inc. APC Propeller Performance Data**, available at: <http://www.apcprop.com/Articles.asp?ID=270>
6. **Brandt J. B., Selig M. S.** Propeller Performance Data at Low Reynolds Numbers, *49th AIAA Aerospace Sciences Meeting, AIAA Paper 2011-1255*, Orlando, FL, January 2011.
7. **Brandt J. B., Deters R. W., Ananda G. K., Selig M. S.** UIUC Propeller Database, University of Illinois at Urbana-Champaign, available at: <http://m-selig.ae.illinois.edu/props/propDB.html>
8. **Ovchinnikov I. E. Ventil'nye jelektricheskie dvigateli i privod na ih osnove** (malaja i srednjaja moshhnost') (BLDC electric motors and drive based on them (small and average power)), Kurs lekcij, SPb., Korona-Vek, 2006, 336 p.
9. **Xia Chang-Hang.** Permanent magnet brushless DC motor drives and controls, John Wiley & Sons Singapore Pte. Ltd., 2012.
10. **Fabrikant N. Ja. Ajerodinamika** (Aerodynamics), Moscow, Nauka, 1964, 815 p.
11. **Sverdlov S. Kvadroljot** (Quadcopter), available at: <http://forum.rcdesign.ru/blogs/174358/blog18011.html>

Издательство «НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

107076, Москва, Стромьинский пер., 4

Телефон редакции журнала: (499) 269-5397, тел./факс: (499) 269-5510

Технический редактор *Е. В. Конова*. Корректор *Т. В. Пчелкина*.

Сдано в набор 31.03.2016. Подписано в печать 12.05.2016. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 8,86. Заказ МН616. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Авансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Авансед солюшнз".
119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1.