

УЛУЧШЕНИЕ КАЛМАНОВСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ

Статья посвящена решению задач улучшения качества несмещенной эффективной фильтрации переменных состояния динамических объектов на основе линейных процедур.

Анализ калмановского подхода фильтрации переменных состояния

Фильтрация переменных состояния имеет важное значение как таковое, а также для решения задач прогнозы и управления динамическими объектами, в особенности для их оптимального управления. Во многих случаях для решения задач выделения переменных состояния используются фильтры Калмана. Однако они обладают обнаруженным нами существенным недостатком.

Как известно, фильтры Калмана, являются динамическими объектами. В связи с этим качество оценок переменных состояния зависит не только от вида и интенсивности помех на входе объекта $w(t)$ и выходе измерителя $v(t)$ его выходной величины $y(t)$, но и от рассогласования начальных условий $x(0)$ переменных состояния $x(t)$ объекта и оценок фильтра $\hat{x}(0)$. Фильтр Калмана оптимален лишь в случае, если указанные условия совпадают.

Как правило, начальные условия переменных состояния объекта неизвестны. Отсюда вытекает, что в общем случае отсутствует возможность установления необходимых начальных условий на фильтр для обеспечения его оптимальности. Этот факт и обуславливает статистическую не оптимальность фильтра Калмана. Отмеченный недостаток естественным образом связан с постановкой задачи их синтеза.

Постановка задачи синтеза улучшенных фильтров переменных состояния

Вышеуказанное замечание приводит к необходимости более корректной постановки задач фильтрации, в которой требование эффективности оценок должно формулироваться в виде минимума суммарной дисперсии оценок $\sigma_x^2 = \sigma_x^2[w(t), v(t), \varepsilon(0)]$. Последняя при статистической независимости аргументов равна $\sigma_x^2 = \sigma_{\varepsilon(0)}^2 + \varepsilon_{w,v}^2$, где $\varepsilon_{w,v}^2$ – суммарная дисперсия оценок, зависящие от помех $w(t), v(t), \sigma_{\varepsilon(0)}^2$ – дисперсия оценок, обусловленная рассогласованием начальных условий $\varepsilon(0) = x(0) - \hat{x}(0)$.

С учетом отмеченного для случая белых некоррелированных помех $w(t), v(t)$ и независимости $w(t), v(t), \varepsilon(0)$ задачу фильтрации переменных

© А.Г. Кику, В.М. Бурлаков О.С. Аглоткова, 2003

состояния предлагается рассматривать в следующей более корректной постановке:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + Bu(t) + G(t)w(t), \\
 y(t) &= C(t)x(t) + D(t)v(t), \\
 M\hat{x} &= Mx(t), \quad M^M w(t) = 0, \quad M^M v(t) = 0, \\
 \hat{x}^* &= \arg\left\{ \frac{\min}{\hat{x}} [\sigma_{\varepsilon(0)}^2 + trP_{\varepsilon}] \right. \\
 &\quad \left. \begin{aligned}
 Cov[w(t), w(\tau)] &= Q_w \delta(t - \tau), \\
 Cov[v(t), v(\tau)] &= R_w \delta(t - \tau), \\
 Cov[w(t), v(\tau)] &= 0, \quad Cov[\hat{x}(0), \hat{x}(0)] = P(0), \\
 \hat{\dot{x}}(t) &= L\hat{x}(t) + Ky(t) + B_k u(t)
 \end{aligned} \right\},
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где \hat{x}^* – оптимальная оценка переменных состояния, $trP_{\varepsilon}(t)$ – след ковариационной матрицы $P_{\varepsilon}(t)$ ошибки $\varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, M, Cov – операторы математического ожидания и ковариации, δ – функция Дирака, L, K, B_k – матрицы состояния, усиления и входа улучшенного фильтра соответственно. Последнее выражение в наборе ограничений задачи (1) выражает требование линейности процедуры фильтрации переменных состояния.

При “небелых” шумах $w(t), v(t)$ в постановку задачи должны быть внесены соответствующие операторы “отбеливания”.

В этой статье приводится вариант приближенного решения этой задачи, основанный на следующих эвристических соображениях. Для увеличения скорости уменьшения влияния рассогласования $\varepsilon(0) = x(0) - \hat{x}(0)$ начальных условий переменных состояния и их оценок на начальном интервале времени необходимо увеличить матрицу усиления улучшенного фильтра. Это мероприятие должно быть выполнено с учетом динамических свойств объекта, например с учетом его весовой функции. В частности, для объектов второго порядка структура матрицы усиления улучшенного фильтра может быть выбрана следующим образом $K(t) = (K_0 e^{-\alpha t} \cos \beta t + E)K_1(t)$. В этой структуре K_1 представляет собой матрицу усиления обычного фильтра Калмана. Сомножитель $K_0 e^{-\alpha t} \cos \beta t + E$ внедрен для целей перестройки матрицу усиления обычного фильтра Калмана. В нем матрица K_0 предусмотрена для обеспечения требуемой скорости процесса убывания влияния $\varepsilon(0)$ на эффективность оценки, параметры $\alpha > 0, \beta$ – для обеспечения требуемых затухания и колебательности соответственно, а E – единичная матрица. При увеличении времени матрица усиления $K(t)$ улучшенного фильтра стремится к матрице усиления $K_k(t)$ обычного фильтра Калмана. Элементы K_0, α и β должны быть выбраны с учетом обеспечения минимума обобщенного критерия эффективности $\sigma_{\hat{x}}^2 = \sigma_{\varepsilon(0)}^2 + \varepsilon_{w,v}^2$.

Заметим, что для объектов второго порядка возможен вариант выбора матрицы усиления улучшенного фильтра в следующем виде $K(t) = K_k(t) + K_0 e^{-\alpha t} \cos \beta t$.

Аналогичным образом могут быть выбраны структуры матриц усиления

ния $K(t)$ для объектов более высокого порядка.

В связи с указанным задача синтеза улучшенного фильтра переменных состояния принимает параметрический вид и может быть рассмотрена в следующей постановке:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Gw, \\ y &= Cx + Du + v, \\ M\hat{x} &= Mx, Mw = 0, Mv = 0, \\ \text{Cov}[w(t), w(\tau)] &= Q_w \delta(t - \tau), \\ \text{Cov}[v(t), v(\tau)] &= R_w \delta(t - \tau), \\ \text{Cov}[w(t), v(\tau)] &= 0, \text{Cov}[\hat{x}(0), \hat{x}(0)] = P_0, \\ K(\infty) &= K_k(\infty), \\ \hat{\dot{x}}(t) &= Lx(t) + Ky(t) + B_k u(t) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где K_0^*, α^*, β^* – оптимальные значения параметров K_0, α и β соответственно.

Алгоритм решения задачи синтеза улучшенного фильтра переменных состояния

Согласно предложенной постановке (2) процедура синтеза улучшенных фильтров переменных состояния разбивается на два этапа.

Этап 1 - Синтез обычного фильтра Калмана для определения его матрицы усиления $K_k(t)$.

Этап 2 - Определение тройки K_0, α, β матрицы $K_0 e^{-\alpha t} \cos \beta t$ для формирования сомножительной матрицы $K_0 e^{-\alpha t} \cos \beta t + E$ улучшенного фильтра.

Первый этап указанной процедуры представляет собой обычную процедуру синтеза стандартных фильтров Калмана и может быть выполнен аналитически как таковой. В этой статье а второй этап реализован на основе итерационной градиентной процедуры.

Исследование эффективности улучшенного фильтра переменных состояния

Проверка эффективности предложенного подхода улучшения калмановской фильтрации была выполнена на основе статистического моделирования.

В статье приведены результаты исследования для случая, когда:

в качестве объекта был выбран линейный динамический объект второго порядка;

в качестве выборки расхождений ε начальных условий были использованы выборки объема $n=100$ из нормального распределения с параметрами $M\varepsilon = 0, \sigma_\varepsilon^2 = 10$;

помехи на входе объекта $w(t)$ и выходе измерителя его выходной величины $v(t)$ – “белые” некоррелированные шумы интенсивностей $\sigma_w^2 = 0.2, \sigma_v^2 = 0.1$, соответственно.

Наиболее важные результаты выполненных экспериментальных исследований приведены на нижеследующих рисунках.

Рис.1 демонстрирует нормальную стратегию выбора числа n_i элементов выборки со значениями ε_i . При этом $n_i = 100W[\varepsilon(0) \in \Delta_i]$, где $W[\varepsilon(0) \in \Delta_i]$ – частота значений рассогласования начальных условий $\varepsilon(0)$, принадлежащих их i -му интервалу.

На Рис. 2 приведена интегральная оценка $\sigma_{эф}^2$ эффективности

$$\sigma_{эф}^2 = \frac{M[(\hat{x}_{k1} - x_1)^2 + (\hat{x}_{k2} - x_2)^2] - M[(\hat{x}_{km1} - x_1)^2 + (\hat{x}_{km2} - x_2)^2]}{M[(\hat{x}_{k1} - x_1)^2 + (\hat{x}_{k2} - x_2)^2]}$$

фильтрации переменных состояния, где $\hat{x}_{k1}, \hat{x}_{k2}$ – калмановские оценки, \hat{x}_1, \hat{x}_2 – оценки, полученные улучшенным фильтром, x_1, x_2 – переменные состояния.

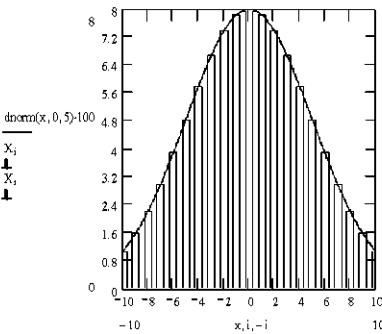


Рис. 1

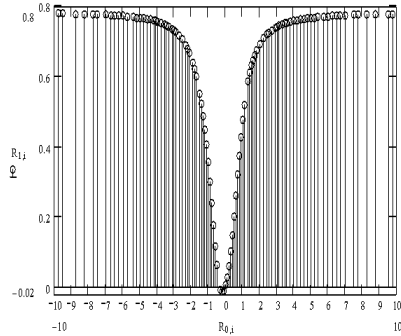


Рис. 2

На рисунках 3, 4а, 4б приведен графики выхода измерителя выходной величины объекта, коэффициентов усиления фильтра Калмана (Рис.4а) и улучшенного фильтра (Рис.4б) по переменным состояния x_1 (показаны точками) и x_2 (сплошные линии) соответственно при условиях $\sigma_w^2 = 0.2, \sigma_v^2 = 0.1$.

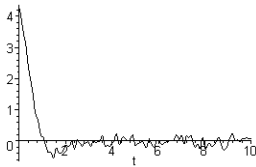


Рис. 3

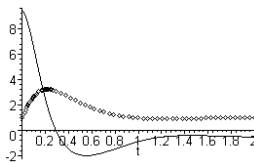


Рис. 4(а)

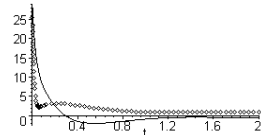


Рис. 4(б)

На рисунках 5а, 5б приведен графики переменных состояния объекта x_1, x_2 (сплошные линии), их калмановских оценок $\hat{x}_{k1}, \hat{x}_{k2}$ (показаны точками)

в виде ромбов) и оценок $\hat{x}_{km1}, \hat{x}_{km2}$ полученных улучшенным фильтром (показаны точками в виде окружностей), соответственно.

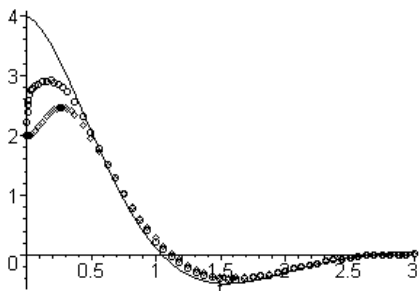


Рис. 5(а)

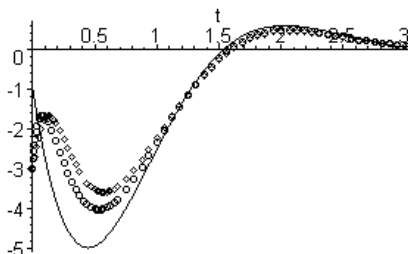


Рис. 5(б)

На Рис.6 приведены графики эффективности улучшенной фильтрации $\sigma_{эф}^2$, полученные при различных рассогласованиях начальных условий по переменным состояния x_1, x_2 . (Первые цифры в правой колонке указывают рассогласование по переменной x_1 , а вторые – по x_2)

На Рис.7 приведен вариант графика частотей эффективности фильтра, на основе которых были получены точки графиков, указанных на Рис.6. На Рис.6 данная точка отмечена маркером в виде черного квадрата.

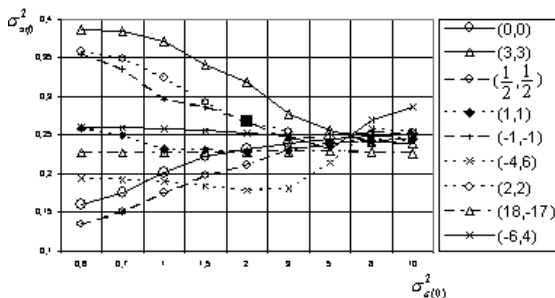


Рис. 6

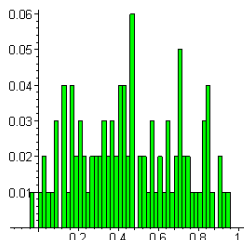


Рис. 7

Выводы

На основе результатов выполненных вытекают следующие убедительные выводы:

Синтезируемые предложенным методом фильтры переменных состояния приводит к значительно более эффективным в статистически смысле оценкам, чем обычный фильтр Калмана;

Предложенная постановка задачи фильтрации переменных состояния обладает более общим характером по сравнению с калмановской постановкой;

Для решения прикладных задач фильтрации переменных состояния в том числе и для синтеза оптимальных регуляторов предложенный фильтр более предпочтителен, чем обычный фильтр.

Литература

1. Kalman R.E. The theory of Optimal Control and the Calculus of Variations. Mathematical Optimization Technigues // Univercity of California Press , Berkeley – 1963.
2. Кіку А.Г., Білоус Т.І. Оценка переменных состояния линейных объектов общего вида // Адаптивні Системи Автоматичного Управління
3. Браммер К., Эйффлинг Г. Фильтр Калмана-Бьюси // Москва: Наука, 1982.- с. 200.