УДК 621.755-251

С. В. Кочкин, Б. А. Малёв

МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ ДИСБАЛАНСА ЖЕСТКИХ РОТОРОВ В РЕЖИМЕ СФЕРИЧЕСКОГО ЦИРКУЛЯЦИОННОГО ДВИЖЕНИЯ

В статье рассмотрен новый метод измерения дисбаланса жестких роторов при их балансировке в режиме сферического циркуляционного движения (сферической вибрации), приведена кинематическая схема устройства, получены дифференциальные уравнения движения колебательной системы под действием неуравновешенных сил инерции.

При балансировке тел вращения в динамическом режиме для определения величины и места расположения неуравновешенности повсеместно используется вращательное движение.

Метод определения дисбаланса при вращении, несмотря на очевидные преимущества, имеет и ряд недостатков:

– относительно невысокая точность определения угловой координаты неуравновешенности, которая определяется практически в пределах некоторого сектора;

– трудности при балансировке несплошных деталей, у которых масса распределена по окружности неравномерно и сосредоточена в определенных местах (например, в лопастях);

– в некоторых случаях существует опасность разрушения детали под воздействием центробежных сил;

– затруднена автоматизация процесса уравновешивания во время вращения ротора.

Указанные недостатки принципиально устраняются при использовании вибрационных методов балансировки роторов без их вращения.

Одним из сравнительно легко реализуемых способов определения дисбаланса в вибрационном режиме является метод балансировки в режиме сферического циркуляционного движения [1, 2].

При конструирования устройств, реализующих данный принцип, крайне необходимо построение математических моделей с целью выбора таких параметров колебательных систем, при которых информация о неуравновешенности ротора будет максимально приближена к достоверной. Для этого необходимо иметь уравнения движения под действием неуравновешенности, вывод которых приводится ниже.

Один из возможных вариантов кинематической схемы устройства для измерения дисбаланса в режиме сферического циркуляционного движения показан на рисунке 1.

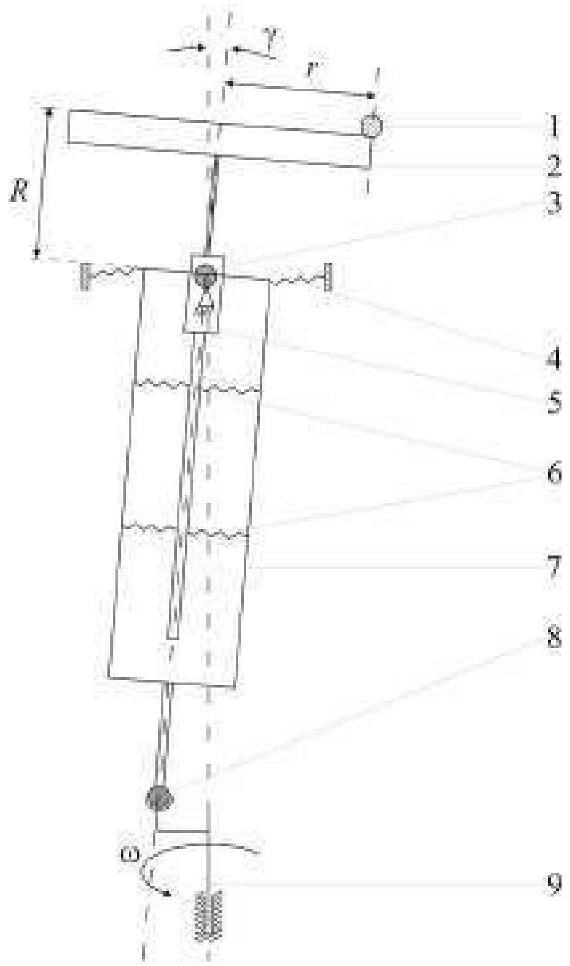


Рис. 1 Кинематическая схема колебательной системы

Балансируемый ротор 2 (рис. 1) радиуса r имеет дисбаланс 1 («тяжелое место»), расположенный на этом же радиусе. Ротор жестко закреплен на валу, который в свою очередь посредством упругих элементов 6 связан с обоймой 7. Жесткость упругих элементов в радиальном направлении выбрана максимальной, а в тангенциальном (крутильная жесткость) – исходя из требуемого режима работы устройства. В нашем случае таким режимом является дорезонансный. То есть крутильная жесткость упругих элементов 6 с нагрузкой вал–ротор–дисбаланс должна обеспечивать собственную частоту крутильных колебаний относительно главной оси инерции большую, чем частота колебаний вынуждающей силы. Обойма приводится в циркуляционное движение с частотой ω посредством эксцентрикового привода через сферический шарнир 8. Ограничение горизонтальных и вертикальных перемещений обоймы обеспечивается сферическим шарниром 3. Последний установлен на расстоянии R от плоскости приведения ротора в верхней части обоймы и жестко закреплен на ее основании. От осевого проворота обойму удерживает мембрана 4, закрепленная одной стороной на обойме, а другой на основании (станине). Сборка дисбаланс–ротор–вал–обойма имеет наклон γ относительно вертикальной оси, совпадающей с осью привода 9. При циркуляционном движении на ротор вследствие наличия дисбаланса действуют силы инерции, тангенциальная составляющая которых вызывает крутильные колебания вала и ротора относительно обоймы. Амплитуда этих колебаний пропорциональна величине неуравновешенности ротора, а фазовый сдвиг относительно начальной точки измерений указывает на ее месторасположение.

На рисунке 2 показаны параметры расположения дисбаланса на роторе при его движении.

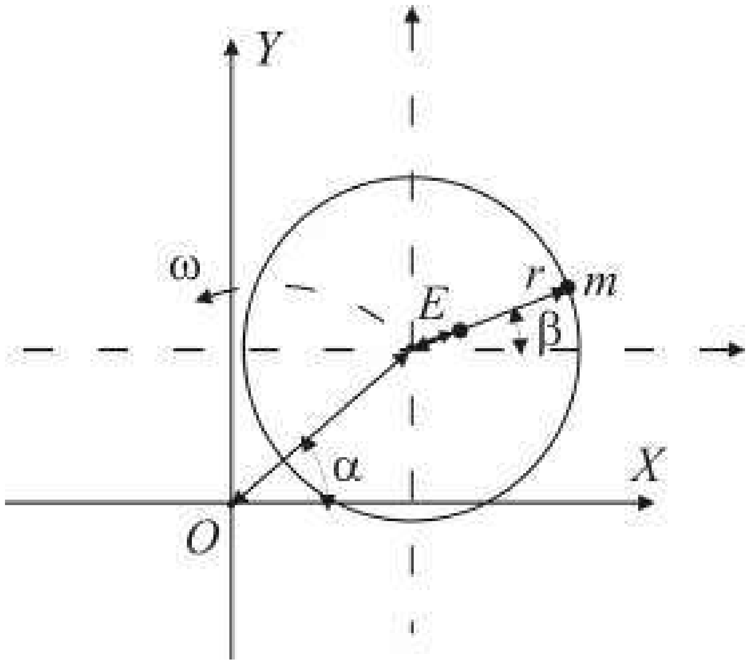


Рис. 2 Положение дисбаланса на роторе, вид сверху

Ротор с дисбалансом m перемещается с круговой частотой ω. Угол поворота геометрического центра ротора в неподвижной системе координат – α, а угол поворота дисбаланса – β.

Величина сдвига центра масс ротора E относительно его геометрической оси (условный эксцентриситет) из-за наличия дисбаланса m равна

$$E = \frac{mr}{M_0},$$

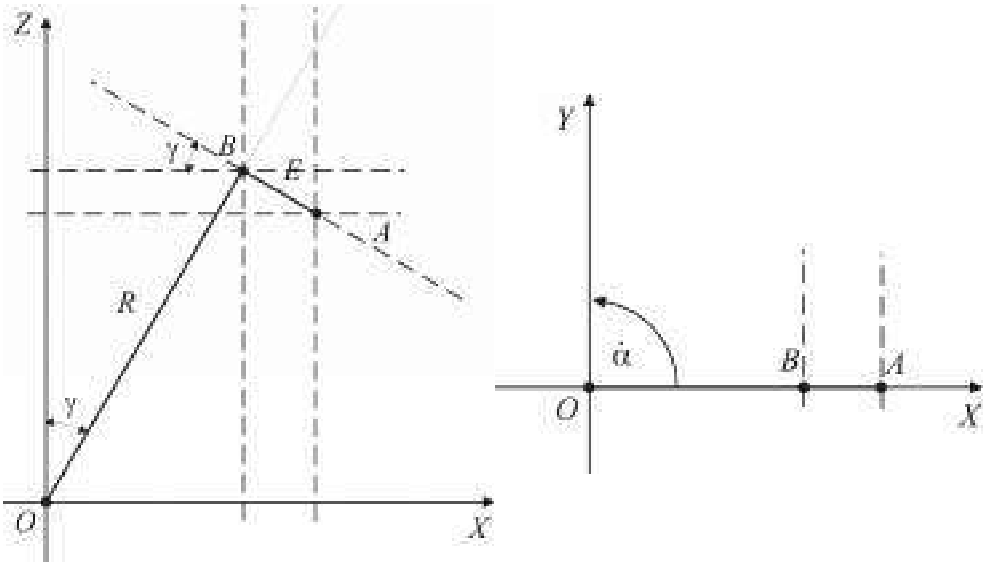
где M_0 – масса балансируемого ротора.

Пренебрегая высотой ротора и считая его абсолютно твердым телом, для расчетов представим ротор вместе с дисбалансом в виде точки. Последняя удалена на величину E в плоскости приведения от геометрического центра ротора в направлении расположения дисбаланса и имеет общую массу $M_0 + m$.

Рассмотрим характер движения колебательной системы и его параметры.

Первоначально принимаем величину дисбаланса равной нулю.

На рисунке 3,а показана расчетная схема перед началом движения (вид сбоку), а на рисунке 3,б показано начальное положение колебательной системы в проекции «вид сверху».



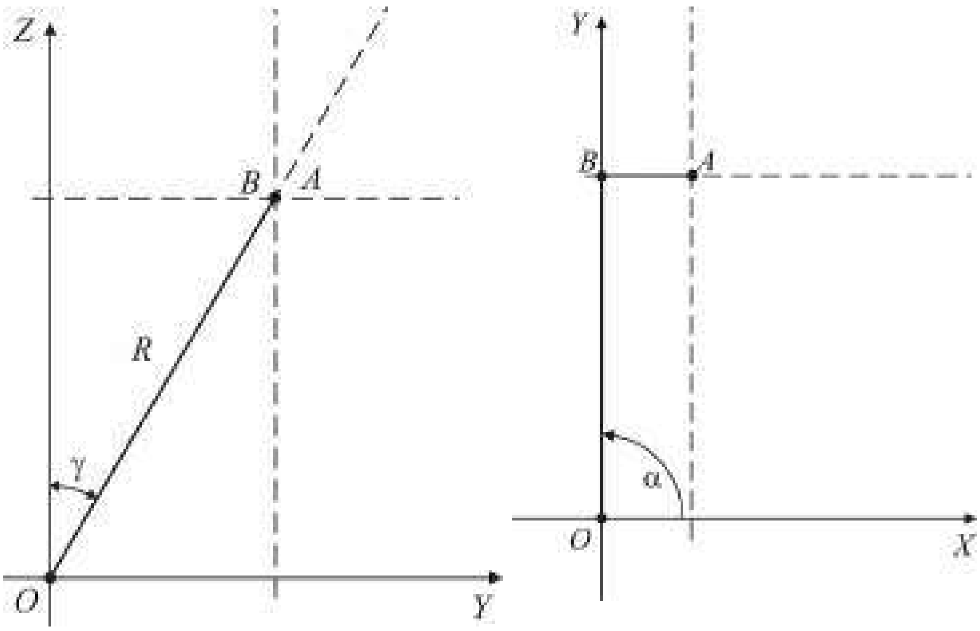
а) вид сбоку б) вид сверху

Рис. 3 Начальное положение системы

В начальном положении принято, что дисбаланс расположен в наинизшей точке ротора. Отрезок *OB* – верхняя часть вала. Отрезок *AB* – условный эксцентриситет ротора. В точке *A* сосредоточена вся масса ротора и дисбаланса.

На рисунке 3,б $\dot{\alpha} = \omega$ – угловая скорость вращения вала относительно вертикальной оси (см. рис. 1).

После поворота на угол $\alpha = 90°$ система принимает вид, показанный на рисунке 4.



а) вид сбоку б) вид сверху

Рис. 4 Система после поворота на 90°

Перейдем в подвижную систему отсчета $X'OY'$. Эта система вращается вместе с проекцией R на плоскость XOY, что показано на рисунке 5 при произвольном положении дисбаланса на роторе.

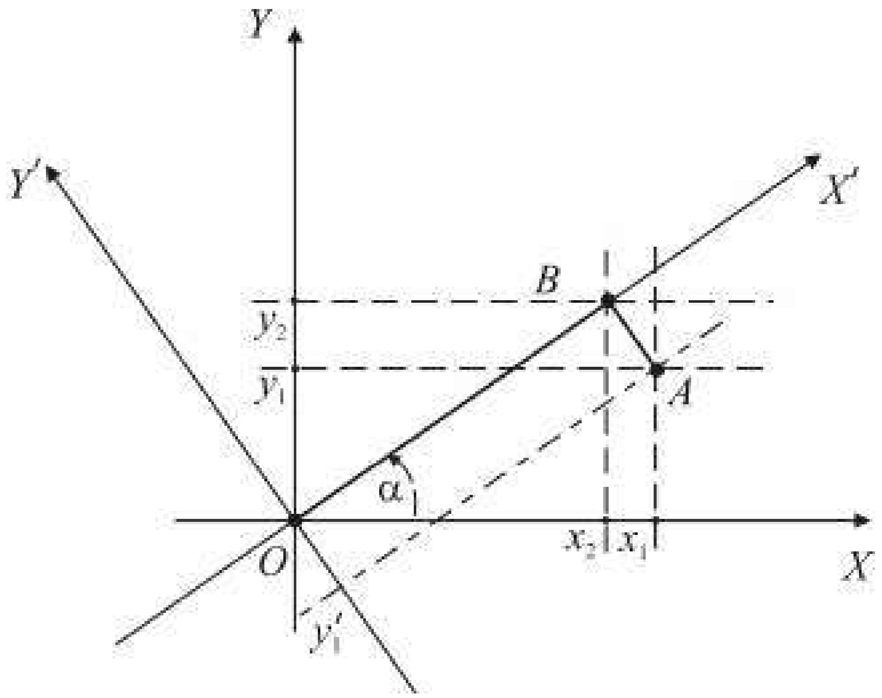


Рис. 5 Переход в подвижную систему отсчета

Так как в начальный момент времени неподвижная и подвижная системы координат совпадают, то о параметрах системы можно судить по рисунку 3. В подвижной системе координат в начальный момент времени $(\alpha = 0°)$, проекции точки A на оси X' и Y' равны:

$$X' = R\sin\gamma + E\cos\gamma\,; \tag{1}$$

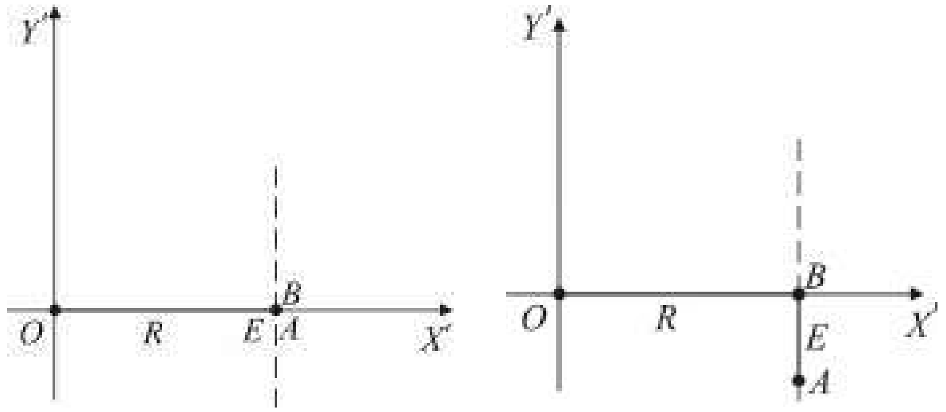
$$Y' = 0\,. \tag{2}$$

После поворота подвижной системы координат вместе с валом последний повернется вокруг собственной оси на угол $\beta = \alpha = 90°$. На рисунке 6 показан вид системы до и после поворота на угол $\alpha = 90°$.

При повороте системы на угол $\alpha > 0°$ (если смотреть со стороны вертикальной оси Z сверху, то против часовой стрелки), поворот на угол β вокруг оси вала будет происходить по часовой стрелке.

В этом случае первая составляющая проекции точки A на ось X' в уравнении (1) $R\sin\gamma$ сохранится, а за время поворота вала с $\beta = 0°$ до $\beta = 90°$, вторая составляющая проекции точки A на ось X' – $E\cos\gamma$ гармонически изменится со значения $E\cos\gamma$ до 0. Поэтому проекция точки A на ось X' принимает вид:

$$X' = R\sin\gamma + E\cos\gamma\cos\beta\,. \tag{3}$$



а) система в начальный момент времени   б) система после поворота на 90°

Рис. 6 Вид системы сверху

В то же время проекция точки *A* на ось Y' за время поворота вала с $\beta = 0°$ до $\beta = 90°$ изменится с 0 до –*E*. Это значит

$$Y' = -E\sin\beta\,. \tag{4}$$

Применим известные формулы преобразования координат:

$$\begin{aligned} X &= X'\cos\alpha - Y'\sin\alpha; \\ Y &= X'\sin\alpha + Y'\cos\alpha. \end{aligned} \tag{5}$$

Подставив в уравнения (5) соотношения (3) и (4), получим:

$$\begin{aligned} X &= (R\sin\gamma + E\cos\gamma\cos\beta)\cos\alpha + E\sin\beta\sin\alpha; \\ Y &= (R\sin\gamma + E\cos\gamma\cos\beta)\sin\alpha - E\sin\beta\cos\alpha. \end{aligned} \tag{6}$$

После преобразований уравнений (6) имеем:

$$\begin{aligned} X &= R\sin\gamma\cos\alpha + E\cos\gamma\cos\beta\cos\alpha + E\sin\beta\sin\alpha; \\ Y &= R\sin\gamma\sin\alpha + E\cos\gamma\cos\beta\sin\alpha - E\sin\beta\cos\alpha. \end{aligned} \tag{7}$$

Уравнения (7) показывают зависимость изменения проекций точки *A* на оси *X* и *Y* без учета дисбаланса.

Рассмотрим изменения проекции точки *A* на ось *Z*.

Из рисунка 3,а видно, что в начальном положении величина проекции точки *A* на ось *Z* равна

$$Z = R\cos\gamma - E\sin\gamma\,, \tag{8}$$

а при повороте системы на угол $\alpha = 90°$ проекция точки *A* на ось *Z* равна

$$Z = R\cos\gamma\,.$$

Очевидно, что с изменением величины угла α с 0° до 90° составляющая проекции точки *A* на ось *Z* изменяется с величины $-E\sin\gamma$ до 0. При этом происходит поворот вала на угол $\beta = 90°$. То есть в общем виде величина проекции точки *A* на ось *Z* равна

$$Z = R\cos\gamma - E\sin\gamma\cos\beta\,. \tag{9}$$

Присоединив уравнения (7) к уравнению (9), получаем систему уравнений, описывающую положение точки *A* при сферическом циркуляционном движении в проекциях на оси *X*, *Y*, *Z* без учета влияния на движение дисбаланса:

$$\begin{aligned} X &= R\sin\gamma\cos\alpha + E\cos\gamma\cos\beta\cos\alpha + E\sin\beta\sin\alpha; \\ Y &= R\sin\gamma\sin\alpha + E\cos\gamma\cos\beta\sin\alpha - E\sin\beta\cos\alpha; \\ Z &= R\cos\gamma - E\sin\gamma\cos\beta. \end{aligned} \tag{10}$$

Оценим порядки величин сил инерции, действующих на дисбаланс.

Как следует из описания рисунка 1, упругие элементы в радиальном направлении имеют максимально возможную жесткость. В то же время тангенциальная жесткость этих элементов достаточно мала. Отношение радиальной жесткости к тангенциальной достигает 20 и более. Учитывая это, можно сделать вывод, что степень влияния тангенциальной составляющей сил инерции на угловое перемещение ротора с валом значительно превосходит степень влияния радиальной, а следовательно влиянием последней можно пренебречь.

В этом случае при движении системы вследствие наличия дисбаланса происходит отставание вращения вала от идеального значения β на угол δ. Это следствие воздействия тангенциальных сил инерции, действующих на неуравновешенную массу дисбаланса.

Введем понятие места расположения дисбаланса. Как видно из рисунков 3,а,б, при показанном положении дисбаланса координата расположения дисбаланса совпадает с начальной фазой возникающих колебаний. В случае иной угловой координаты места расположения дисбаланса на роторе в любой момент времени угол закручивания вала β будет уменьшаться на значение φ, что и является угловой координатой расположения дисбаланса.

Запишем систему уравнений, описывающую положение точки *A* при сферическом движении в проекциях на оси *X*, *Y*, *Z* с учетом влияния на движение дисбаланса:

$$\begin{aligned} X &= R\sin\gamma\cos\alpha + E\cos\gamma\cos(\beta-\delta-\varphi)\cos\alpha + E\sin(\beta-\delta-\varphi)\sin\alpha; \\ Y &= R\sin\gamma\sin\alpha + E\cos\gamma\cos(\beta-\delta-\varphi)\sin\alpha - E\sin(\beta-\delta-\varphi)\cos\alpha; \\ Z &= R\cos\gamma - E\sin\gamma\cos(\beta-\delta-\varphi). \end{aligned} \tag{11}$$

Считаем связи, наложенные на систему, показанную на рисунке 1, голономными. Силы, действующие на систему, являются потенциальными (сила тяжести и сила упругости). Тогда изучаемая система является консервативной [3, 4]. Поэтому вывод уравнения движения можно выполнять на основе уравнения Лагранжа для консервативной системы:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \tag{12}$$

где $L = T - U$ – функция Лагранжа, равная разности кинетической *T* и потенциальной *U* энергии; q_i и $\dot{q}_i$ – обобщенные координаты колебательной системы и их производные.

Обобщенными координатами являются угол поворота системы α и угол поворота вала δ. Считаем, что система движется с постоянной угловой скоростью, а координата α циклическая. Поэтому достаточно составить уравнение движения относительно одной обобщенной координаты – угла δ.

Уравнение движения получено на основе рисунков 3–6 в принятых обозначениях: *A* – центр масс системы ротор–дисбаланс; $M = M_0 + m$ – масса ротора с дисбалансом; *m* – масса дисбаланса; *r* – радиус места расположения дисбаланса; M_0 – масса балансируемого ротора; *R* – длина вала; *I* – осевой момент инерции вала относительно его главной оси инерции; $E = \frac{mr}{M_0}$ – условный эксцентриситет; φ – угловая координата места расположения дисбаланса.

Рассмотрим все энергии, входящие в лагранжиан.

Полная кинетическая энергия точки *A*, являющейся центром масс системы ротор–дисбаланс, равна

$$T_1 = \frac{MV^2}{2},$$

где V^2 – квадрат полной скорости этой точки.

Кинетическая энергия вращения вала вокруг собственной оси при колебательном движении равна

$$T_2 = \frac{I}{2}\left(\dot{\beta} - \dot{\delta}\right)^2.$$

Движение происходит в потенциальных полях силы тяжести и упругой возвращающей силы упругих элементов 6 (рис. 1). При повороте на угол δ происходит закручивание вала вокруг собственной оси и возникает изменение потенциальной энергии упругих элементов колебательной системы.

Тогда при малых углах δ получаем потенциальную энергию упругих элементов:

$$U_1 = \frac{1}{2} C_{\text{уэ}} \delta^2,$$

где $C_{\text{уэ}}$ – совокупная крутильная (угловая) жесткость упругих элементов.

Изменение потенциальной энергии в системе происходит от изменения высоты (координаты *Z*) центра масс. Уравнение потенциальной энергии имеет вид

$$U_2 = MgE \sin\gamma(1 - \cos(\beta - \delta - \varphi)),$$

где *g* – ускорение свободного падения.

Функция Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{MV^2}{2} + \frac{I}{2}\left(\dot{\beta} - \dot{\delta}\right)^2 - \frac{1}{2} C_{\text{уэ}} \delta^2 - MgE \sin\gamma(1 - \cos(\beta - \delta - \varphi)). \qquad (13)$$

Находим квадрат полной скорости точки *A*. Для этого продифференцируем по времени уравнения (11), а затем по формуле

$$V^2 = V_X{}^2 + V_Y{}^2 + V_Z{}^2 \tag{14}$$

определяем квадрат полной скорости.

Заметим, что при дифференцировании угол γ считается постоянным, не зависящим от времени:

$$\begin{gathered} V_X = \frac{dX}{dt} = -R\sin\gamma\sin(\alpha)\dot{\alpha} - E\cos\gamma\sin(\beta-\delta-\varphi)\cdot\left(\dot{\beta}-\dot{\delta}\right)\cos\alpha - \\ -E\cos\gamma\cos(\beta-\delta-\varphi)\cdot\cos(\alpha)\cdot\dot{\alpha} + E\cos(\beta-\delta-\varphi)\cdot\left(\dot{\beta}-\dot{\delta}\right)\cdot\sin\alpha + \\ +E\sin(\beta-\delta-\varphi)\cdot\cos(\alpha)\cdot\dot{\alpha}; \end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered} V_Y = \frac{dY}{dt} = R\sin\gamma\cos(\alpha)\cdot\dot{\alpha} - E\cos\gamma\sin(\beta-\delta-\varphi)\cdot\left(\dot{\beta}-\dot{\delta}\right)\sin\alpha + \\ +E\cos\gamma\cos(\beta-\delta-\varphi)\cdot\cos(\alpha)\cdot\dot{\alpha} - E\cos(\beta-\delta-\varphi)\cdot\left(\dot{\beta}-\dot{\delta}\right)\cos\alpha + \\ +E\sin(\beta-\delta-\varphi)\cdot\sin(\alpha)\cdot\dot{\alpha}; \end{gathered} \tag{16}$$

$$V_Z = \frac{dZ}{dt} = E\sin\gamma\sin(\beta-\delta-\varphi)\cdot\left(\dot{\beta}-\dot{\delta}\right). \tag{17}$$

Подставляя в уравнение (14) выражения (15), (16) и (17), получим уравнение квадрата полной скорости точки A:

$$\begin{gathered} V^2 = V_X{}^2 + V_y{}^2 + V_z{}^2 = -E^2\left(\dot{\alpha}\right)^2\cdot\left(\cos(\beta-\delta-\varphi)\right)^2 + E^2\left(\dot{\delta}\right)^2 + E^2\left(\dot{\beta}\right)^2 + \\ +E^2\left(\dot{\alpha}\right)^2 - R^2\left(\dot{\alpha}\right)^2\cdot\left(\cos\gamma\right)^2 - 2E^2\dot{\beta}\dot{\delta} + R^2\left(\dot{\alpha}\right)^2 + 2E^2\cos\gamma\cdot\dot{\delta}\dot{\alpha} + \\ +2R\sin\gamma\cdot\dot{\alpha}E\cos(\beta-\delta-\varphi)\cdot\dot{\delta} - 2R\sin\gamma\cdot\dot{\alpha}E\cos(\beta-\delta-\varphi)\cdot\dot{\beta} + \\ +E^2(\cos(\gamma))^2\left(\cos(\beta-\delta-\varphi)\right)^2(\dot{\alpha})^2 + \\ +2R\sin\gamma(\dot{\alpha})^2 E\cos\gamma\cos(\beta-\delta-\varphi) - 2E^2\cos\gamma\cdot\dot{\beta}\dot{\alpha}. \end{gathered} \tag{18}$$

Подставляя в уравнение (13) значение квадрата полной скорости (18), получаем функцию Лагранжа в виде

$$\begin{gathered} L = \left(\frac{1}{2}M\left[-E^2\left(\dot{\alpha}\right)^2\cdot\left(\cos(\beta-\delta-\varphi)\right)^2 + E^2\left(\dot{\delta}\right)^2 + E^2\left(\dot{\beta}\right)^2 + \right.\right. \\ +E^2\left(\dot{\alpha}\right)^2 - R^2\left(\dot{\alpha}\right)^2\cdot\left(\cos\gamma\right)^2 - 2E^2\dot{\beta}\dot{\delta} + R^2\left(\dot{\alpha}\right)^2 + \\ 2E^2\cos\gamma\cdot\dot{\delta}\dot{\alpha} + 2R\sin\gamma\cdot\dot{\alpha}E\cos(\beta-\delta-\varphi)\cdot\dot{\delta} - \\ -2R\sin\gamma\cdot\dot{\alpha}E\cos(\beta-\delta-\varphi)\cdot\dot{\beta} + E^2(\cos(\gamma))^2\left(\cos(\beta-\delta-\varphi)\right)^2(\dot{\alpha})^2 \\ \left.\left. +2R\sin\gamma(\dot{\alpha})^2 E\cos\gamma\cos(\beta-\delta-\varphi) - 2E^2\cos\gamma\cdot\dot{\beta}\dot{\alpha}\right]\right) \\ +\frac{I}{2}\cdot\left(\dot{\beta}-\dot{\delta}\right)^2 - \frac{1}{2}C_{\text{уэ}}\delta^2 - MgE\sin\gamma(1-\cos(\beta-\delta-\varphi)). \end{gathered} \tag{19}$$

Принимая во внимание, что значение α численно равно значению β, сделаем замену $\dot{\beta} = \omega$. Тогда уравнение (19) примет вид

$$L=\left(\frac{1}{2}M\left[-E^2\omega^2\cdot\left(\cos(\beta-\delta-\varphi)\right)^2+E^2\left(\dot{\delta}\right)^2+E^2\omega^2+E^2\omega^2-\right.\right.$$
$$-R^2\omega^2\cdot\left(\cos\gamma\right)^2-2E^2\omega\dot{\delta}+R^2\omega^2+2E^2\cos\gamma\cdot\dot{\delta}\omega+$$
$$+2R\sin\gamma\cdot\omega E\cos(\beta-\delta-\varphi)\cdot\dot{\delta}-2R\sin\gamma\cdot\omega E\cos(\beta-\delta-\varphi)\cdot\omega+ \tag{20}$$
$$+E^2(\cos(\gamma))^2\left(\cos(\beta-\delta-\varphi)\right)^2\omega^2+2R\sin\gamma\omega^2E\cos\gamma\cos(\beta-\delta-\varphi)-$$
$$\left.\left.-2E^2\cos\gamma\cdot\omega^2\right]\right)+\frac{I}{2}\cdot\left(\omega-\dot{\delta}\right)^2-\frac{1}{2}C_{\text{уэ}}\delta^2-MgE\sin\gamma(1-\cos(\beta-\delta-\varphi)).$$

Находим частную производную функции Лагранжа (20) по $\dot{\delta}$:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\delta}}=M(E^2\dot{\delta}-E^2\omega+2E^2\cos\gamma\cdot\omega+2R\sin\gamma\cdot\omega E\cos(\beta-\delta-\varphi))-I(\omega-\dot{\delta}). \tag{21}$$

Далее ищем производную по времени уравнения (21):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\delta}}\right)=M(E^2\ddot{\delta}-R\sin\gamma\omega E\sin(\beta-\delta-\varphi)\cdot(\omega-\dot{\delta}))+I\ddot{\delta}. \tag{22}$$

Затем определяем частную производную функции Лагранжа (19) по δ:

$$\frac{\partial L}{\partial\delta}=M\left(-\left[E^2\omega^2\cos(\beta-\delta-\varphi)\sin(\beta-\delta-\varphi)\right]+R\sin\gamma\omega E\sin(\beta-\delta-\varphi)\cdot\dot{\delta}-\right.$$
$$-R\sin\gamma\omega^2\cdot E\sin(\beta-\delta-\varphi)+E^2(\cos\gamma)^2\cos(\beta-\delta)\omega^2\sin(\beta-\delta-\varphi)+ \tag{23}$$
$$\left.+R\sin\gamma\omega^2E\cos\gamma\sin(\beta-\delta-\varphi)\right)-C_{\text{уэ}}\delta+MgE\sin\gamma\sin(\beta-\delta-\varphi).$$

Подставляя уравнения (22) и (23) в (12), получаем уравнение установившегося движения системы:

$$M\left[E^2\ddot{\delta}-R\sin\gamma\omega E\sin(\beta-\delta-\varphi)\cdot(\omega-\dot{\delta})\right]+I\ddot{\delta}-$$
$$-M\left(-\left[E^2\omega^2\cos(\beta-\delta-\varphi)\cdot\sin(\beta-\delta-\varphi)\right]+R\sin\gamma\omega E\sin(\beta-\delta-\varphi)\cdot\dot{\delta}-\right.$$
$$-R\sin\gamma\omega^2E\sin(\beta-\delta-\varphi)+E^2(\cos\gamma)^2\cdot\cos(\beta-\delta-\varphi)\omega^2\sin(\beta-\delta-\varphi)+ \tag{24}$$
$$\left.+R\sin\gamma\omega^2E\cos\gamma\sin(\beta-\delta-\varphi)\right)-C_{\text{уэ}}\delta+MgE\sin\gamma\cdot\sin(\beta-\delta-\varphi)=0.$$

В ходе исследований было выполнено решение уравнения (24) с использованием программ, реализующих численные методы решения дифференциальных уравнений. Результаты решений оказались близки к данным, полученным при проведении экспериментов на действующих макетных образцах.

В дальнейшей работе с целью повышения достоверности математического моделирования, реализуемого на основе составленных дифференциальных уравнений движения, рекомендуется проведение углубленных теоретических исследований с целью получения полной (менее упрощенной) картины поведения колебательной системы. Кроме этого, с целью уменьшения уровня помех, вызываемых проявлением нормальных составляющих сил инерции, необходимо уделить серьезное внимание разработке конструкции упругих элементов, удовлетворяющей условиям применения в колебательных системах устройств, работающих в режиме сферического либо кругового циркуляционного движения.

Список литературы

1. Патент на изобретение РФ № 2270985. Способ и устройство для балансировки ротора / А. Н. Николаев, Б. А. Малев, Л. А. Брякин, М. А. Щербаков, С. В. Кочкин.
2. Патент на изобретение РФ № 2299409. Станок для балансировки роторов / А. Н. Николаев, Б. А. Малев, Л. А. Брякин, М. А. Щербаков, С. В. Кочкин.
3. **Голдстейн, Г.** Классическая механика / Г. Голдстейн. – М. : Гостехиздат, 1957. 408 с.
4. **Маркеев, А. П.** Теоретическая механика : учебник для университетов / А. П. Маркеев. –М. : ЧеРо, 1999. – 569 с.