

ОПТИМИЗАЦИЯ НИЗКОЧАСТОТНОЙ БАЛАНСИРОВКИ РОТОРА ГД-40

О.К. Слива, В.Н. Шахринов

Для борьбы с роторной вибрацией малоразмерных роторов массой до трёх килограмм в России широко используются низкочастотные балансировочные станки серии ВМ «Морион», осуществляющие их статическую и моментную балансировку. Однако, как показала практика на предприятии, низкочастотная двухплоскостная балансировка (НЧБ) роторов ГД-40, используемых в системе наддува дизелей, в 15–20 % случаев приводит не к уменьшению, а к увеличению вибрации ротора. В предлагаемой работе исследуется причина этого явления и способы её устранения. Построена дискретно-континуальная модель ротора и определены его критические частоты вращения и собственные формы. Разработана вероятностно-статистическая модель исходного дисбаланса ротора ГД-40 с насадными деталями. Показано, что две плоскости коррекции, используемые при балансировке, расположены вблизи пучностей I и II форм ротора, так что корректирующие массы, уравнивающие статический и моментный дисбалансы, создают достаточно большие обобщённые вынуждающие силы на его I и, особенно, на II собственных формах. Это и приводит к увеличению вибронегруженности ротора после двухплоскостной НЧБ. Предложено проводить балансировку не в двух, а в трёх плоскостях коррекции, используя в качестве исходных данных результаты предварительного экспериментального определения статического и моментного дисбаланса ротора на станке «Морион», что позволяет ортогонализировать силы инерции корректирующих масс к более опасной второй собственной форме. На основании расчёта амплитуд вынужденных колебаний ротора при 50 вариантах распределения случайных дисбалансов показано, что трёхплоскостная балансировка позволяет значительно уменьшить вибронегруженность ротора во всей зоне рабочих частот, полностью исключив случаи её увеличения.

Ключевые слова: ротор, дисбаланс, критическая частота, балансировка, собственная форма, корректирующая масса, плоскость коррекции, низкочастотная балансировка, статистическая модель дисбаланса.

Работа посвящена исследованию возможностей и способов повышения эффективности балансировки ротора ГД-40 на низкочастотном балансировочном станке. Цель работы состоит в том, чтобы численными расчётами с привлечением вероятностно-статистических методов оценить эффективность использования при статической и моментной балансировке не двух, а трёх корректирующих плоскостей.

Исследовательская часть работы содержит три блока:

1. Разработка расчетной модели ротора.
2. Разработка и обоснование вероятностно-статистической модели дисбаланса ротора.
3. Исследование эффективности низкочастотной балансировки гибкого ротора при введении 3-й корректирующей плоскости с использованием предварительных результатов двухплоскостной балансировки на станке «Морион» и ортогонализации трёх корректирующих масс к одной из собственных форм гибкого ротора.

Построение расчетной модели ротора ГД-40

На рис. 1 представлен чертёж исследуемого ротора (а) и его плоская расчётная модель (б), представляющая собой тонкий стержень с шестью сосредоточенными массами в сечениях расположения наиболее крупных насадных деталей. Эти массы учитывают и распределённую массу ротора [1–4]. Спиральная пружина C_ϕ , моделирует гироскопический момент диска турбины.

Разработана программа, которая определяет критические частоты и собственные формы вращающегося ротора (рис. 1, в), задаёт случайную систему дисбалансов в плоскости xz , вычисляет обобщённые вынуждающие силы на собственных формах и методом главных координат рассчитывает амплитуды колебаний опорных сечений ротора на любых частотах вращения.

Расчет и конструирование

Так как рабочая частота ω_0 составляет 60 000 об/мин, то наибольший интерес представляют первые три формы, поскольку ротор при разгоне проходит через первую и вторую критические частоты и работает на частоте, близкой к третьей критической. Расчётные f_p и экспериментальные f_s значения критических частот ротора приведены в табл. 1. Их сопоставление показывает адекватность используемой модели.

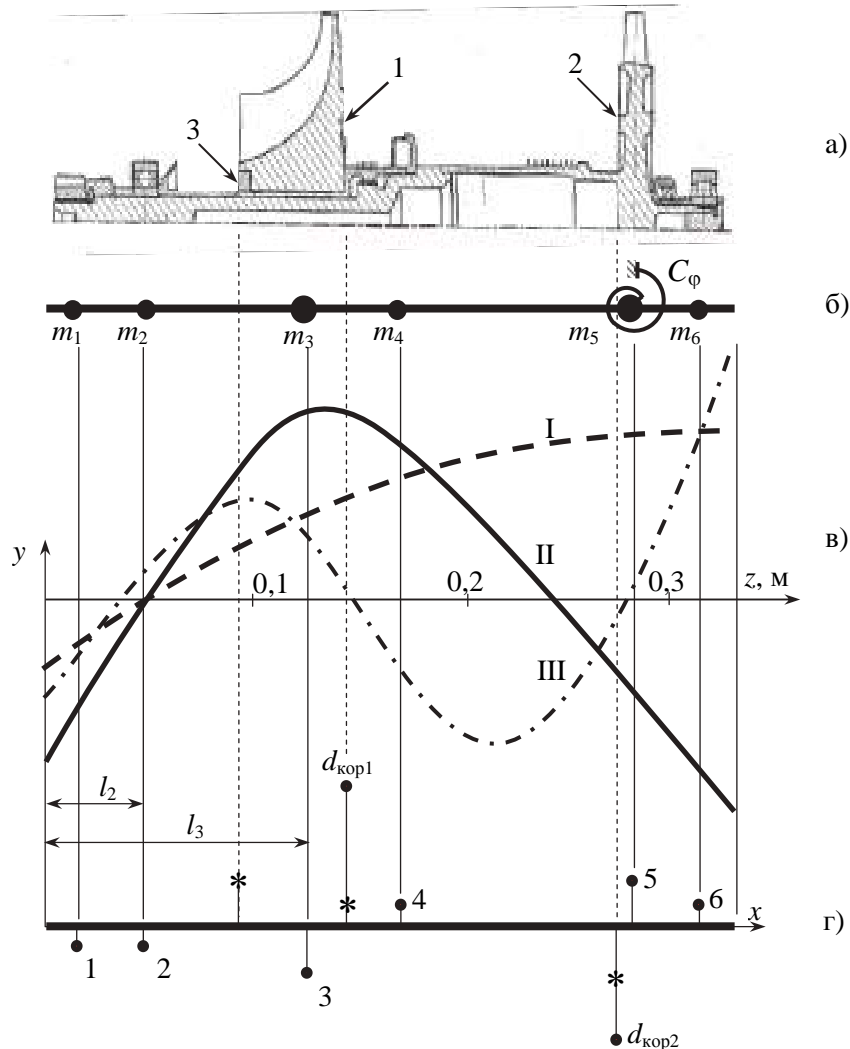


Рис. 1. Расчетная схема ротора: а – чертёж ротора; б – расчётная схема ротора; в – первые три собственные формы ротора ГД-40 на податливых опорах; г – один из неблагоприятных вариантов случайного распределения дисбалансов в осевой плоскости xz и соответствующих корректирующих масс при двух и трёх (*) плоскостях коррекции

Таблица 1
Критические частоты ротора

Форма	f_p , об/мин (Гц)	f_s , об/мин (Гц)
I	14 800 (297)	15 100 (302)
II	28 800 (576)	31 200 (624)
III	94 195 (1884)	95 300 (1906)

Моделирование случайной функции дисбаланса

Известно, что амплитуды вынужденных колебаний системы по k -й форме зависит как от вида и величины случайной функции дисбалансов $D(z)$ [5–12], так и от формы колебаний $u(z)$, то есть от обобщённых вынуждающих сил Q_k :

$$Q_k(\omega) = \omega^2 \int_L D(z) \cdot u_k(z) dz \quad (1)$$

на тех собственных формах $u_k(z)$ системы, частоты которых близки к рабочей частоте или лежат ниже неё, поскольку через эти частоты система проходит при разгоне. Естественно, что при моделировании случайной функции $D(z)$ для ротора ГД-40, работающего на частоте $\omega_{кр2} < \omega < \omega_{кр3}$, должны быть вычислены и учтены величины обобщенных сил Q_1, Q_2, Q_3 . Что же касается более высоких частот и форм, то здесь отсутствует единое мнение у различных авторов. Большинство считает необходимым учитывать при балансировке гибких роторов до 6–8 собственных форм. Сторонники этой позиции ссылаются на известный факт о низкой скорости сходимости разложения изгибающих моментов в ряд по собственным формам и о столь же низкой скорости сходимости опорных реакций. Заметим, однако, что это справедливо для абсолютно жёстких опор. Реакции же податливых опор пропорциональны амплитудам колебаний, которые сходятся как $1/k^4$. Эти соображения говорят о том, что роль высших форм, частоты которых не очень близки к рабочей частоте ротора, менее существенна, чем в случае жёстких опор. Практика низкочастотной балансировки подтверждает этот факт, что позволяет при моделировании случайной функции дисбаланса $D(z)$ потребовать сохранения величины обобщенных вынуждающих сил только низших порядков. При исследовании ротора ГД-40 – это Q_1, Q_2 и, возможно, Q_3 .

Распределение дисбалансов $D(z, \varphi)$ по длине ротора z и по углу φ в плоскости, перпендикулярной его оси, можно представить двумя дискретными функциями $D_x(z_i)$ и $D_y(z_i)$ в плоскостях xz и yz (рис. 2).

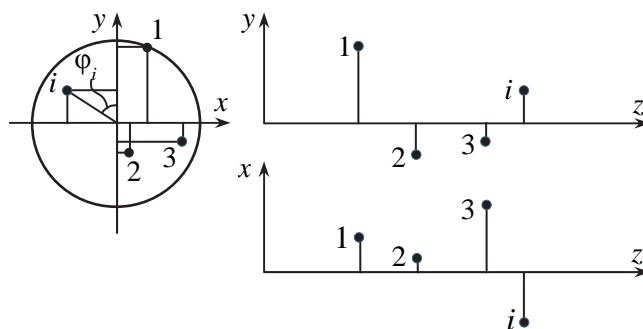


Рис. 2. Распределение случайных дисбалансов по длине ротора

Далее в работе будем рассматривать колебания в одной из плоскостей, представив дисбаланс ротора $D(z_i)$ в виде произведения известной сосредоточенной массы модели ротора m_i на проекцию e_{xi} или e_{yi} её случайного эксцентриситета e_i , предполагая [13–16], что функция φ_i является случайной величиной с равномерным распределением. Тогда

$$D_{xi} = m_i e_{xi} \beta. \quad (2)$$

Константу β возьмём для определённости такой, чтобы соответствующая проекция суммарной силы инерции дисбалансов на рабочей частоте равнялась, например, весу ротора $P = 3$ кГс.

Расчет вынужденных колебаний ротора при различных видах балансировки

Рассматриваются колебания ротора в одной осевой плоскости. Вычисляются виброскорость стационарных колебаний опорных сечений ротора во всем диапазоне частот вращения и амплитуды опорных реакций на рабочем режиме [17–19]. Коэффициент динамичности на всех формах колебаний вала принят равным $\mu = 10$.

Расчеты выполнены при четырех вариантах нагружения:

Вариант 1. Ротор нагружен исходным случайным дисбалансом, который представлен шестью составляющими в точках расположения сосредоточенных масс ротора (рис. 1, б).

Вариант 2. Ротор подвергается стандартной НЧБ в двух плоскостях коррекции. Корректирующие дисбалансы $d_k = m_k \cdot e_k$ определяются системой уравнений:

Расчет и конструирование

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^2 m_{kj} \cdot e_{kj} = -\sum_{i=1}^6 m_i \cdot e_i; \\ \sum_{j=1}^2 m_{kj} \cdot e_{kj} \cdot l_{kj} = -\sum_{i=1}^6 m_i \cdot e_i \cdot l_i. \end{cases} \quad (3)$$

В качестве корректирующих плоскостей используются внутренние поверхности крыльчатки и диска турбины. Они указаны на рис. 1 ($d_{\text{кор1}}$ и $d_{\text{кор2}}$).

Вариант 3. Статическая и моментная балансировка ротора на низкой частоте выполнена в трех плоскостях коррекции. Третьей плоскостью коррекции является левая сторона крыльчатки. В качестве системы дисбалансов используются найденные расчётом в варианте 2 корректирующие дисбалансы $d_{\text{кор1}}$ и $d_{\text{кор2}}$, являющиеся эквивалентом исходной системы дисбалансов. Вектор корректирующих дисбалансов D_1, D_2, D_3 определяется из условия устранения статического и моментных дисбалансов от этих двух корректирующих масс, найденных из системы уравнений (3), (либо определяемых прибором «Морион» экспериментально), а также ортогональности системы трёх искоемых корректирующих дисбалансов к вектору второй собственной формы вращающегося ротора на податливых опорах:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^3 m_{kj} \cdot e_{kj} = -(m_1 \cdot e_1 + m_2 \cdot e_2); \\ \sum_{j=1}^3 m_{kj} \cdot e_{kj} \cdot l_{kj} = -(m_1 \cdot e_1 \cdot l_1 + m_2 \cdot e_2 \cdot l_2); \\ \sum_{j=1}^3 m_{kj} \cdot e_{kj} \cdot u_{\text{II}}(z_j) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Вариант 4. Статическая и моментная балансировка ротора на низкой частоте выполнена в тех же трёх плоскостях коррекции, но вектор корректирующих дисбалансов D_1, D_2, D_3 определяется из условия устранения статического и моментных дисбалансов исходных случайных дисбалансов, а также, как и в варианте (3), ортогональности системы корректирующих дисбалансов к вектору второй собственной формы ротора на податливых опорах, то есть:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^3 m_j \cdot e_j = -\sum_{i=1}^6 m_i \cdot e_i; \\ \sum_{j=1}^3 m_j \cdot e_j \cdot l_j = -\sum_{i=1}^6 m_i \cdot e_i \cdot l_i; \\ \sum_{j=1}^3 m_j \cdot e_j \cdot u_{\text{II}}(z_j) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Результаты расчетов в виде зависимости математического ожидания амплитуды виброскорости левой опоры ротора ГД-40 от частоты вращения приведены на рис. 3. При расчётах использовано 50 вариантов случайного распределения дисбалансов.

В табл. 2 даны численные значения соотношения амплитуд колебаний левой и правой опор ротора при двухплоскостной (A_2) и трёхплоскостной (A_3) балансировке на рабочих оборотах (60 000 об/мин). A_0 – амплитуда колебаний до балансировки.

Таблица 2

Соотношения амплитуд колебаний
левой и правой опор ротора на рабочей частоте

Соотношение амплитуд	Левая опора	Правая опора
A_2/A_0	0,76	0,71
A_3/A_0	0,55	0,54

Приведенные на рис. 3 и в табл. 2 результаты показывают, что трёхплоскостная балансировка, не требующая практически никаких дополнительных материальных затрат, намного эффективнее двухплоскостной. Более того, практика на предприятии СКБ «Турбина» показала, что

двухплоскостная балансировка, дающая очень большой разброс результатов, в 15–20 % случаев приводит к увеличению вибрации ротора. Такой результат, полученный расчётным путём, представлен на рис. 4 (кривая 2), где после двухплоскостной НЧБ вибрации ротора значительно возросли во всём частотном диапазоне. Этот случай соответствует варианту случайного распределения дисбалансов, приведенному на рис. 1, г. Причина повышенной вибронегруженности в данном случае обусловлена неблагоприятным расположением исходных дисбалансов, создающих значительный моментный дисбаланс. Соответственно, корректирующие массы, имеющие малое плечо, оказываются достаточно большими. Расположены же они крайне неблагоприятно по отношению ко II форме колебаний – $d_{кор1}$ – прямо в пучности, а $d_{кор2}$ – также в сечении с большой амплитудой, совпадающей по знаку со знаком силы корректирующего дисбаланса. Введение третьей корректирующей плоскости кардинально меняет ситуацию. Появляется возможность выполнить условия ортогональности системы трёх дисбалансов к форме II (система уравнений (4)). Расположение и величина трёх корректирующих дисбалансов показаны на рис. 1, г (*), а на рис. 4 кривые 2 и 3 наглядно демонстрируют роль условия ортогональности корректирующих балансов ко II форме колебаний.

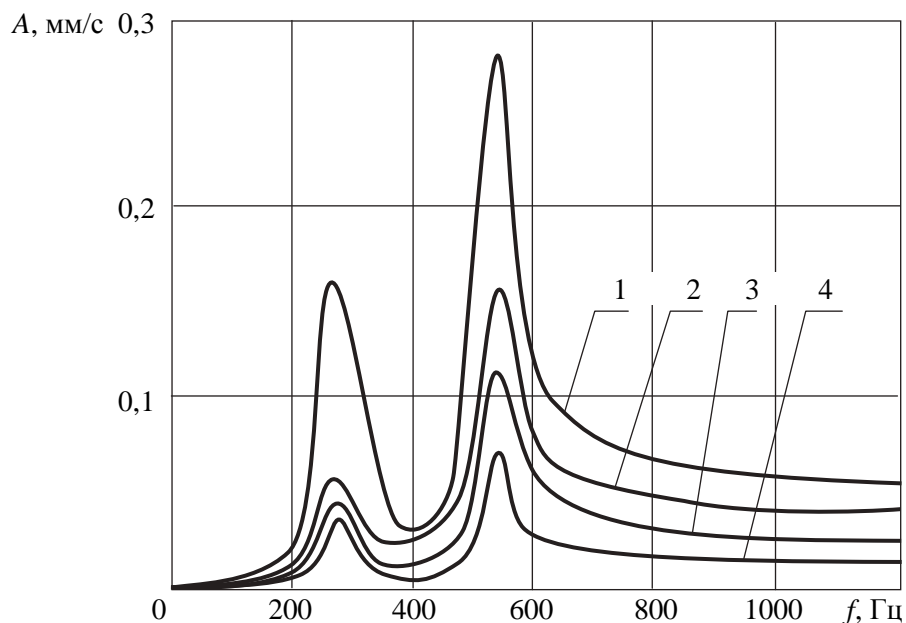


Рис. 3. Математическое ожидание виброскорости на правой опоре ротора ГД-40: 1 – амплитуда виброскорости до балансировки; 2 – амплитуда виброскорости после двухплоскостной балансировки; 3 – амплитуда виброскорости после трёхплоскостной балансировки при моделировании дисбаланса двумя массами; 4 – амплитуда виброскорости после трёхплоскостной балансировки исходных случайных дисбалансов

Применение трёхплоскостной балансировки полностью исключает вероятность повышения виброактивности.

Применение трёхплоскостной балансировки на практике

Для трёхплоскостной балансировки рассматриваемого ротора следует воспользоваться результатом его НЧБ на станке «Морион», после которой в двух плоскостях коррекции (рис. 5) имеются величины (m_1e_1 и m_2e_2). Каждую из них следует заменить двумя составляющими: m_1e_{1x} и m_1e_{1y} – в одной корректирующей плоскости и m_2e_{2x} , m_2e_{2y} – в другой. Далее задача сводится к замене двух корректирующих дисбалансов m_1e_{1x} и m_2e_{2x} , лежащих в одной осевой плоскости xz ротора, тремя корректирующими дисбалансами, лежащими в той же плоскости. Эта процедура выполняется с помощью системы уравнений (4). Аналогично заменяем два корректирующих дисбаланса тремя в осевой плоскости yz , после чего две корректирующие массы в каждой из трёх корректирующих плоскостей заменяются их геометрической суммой.

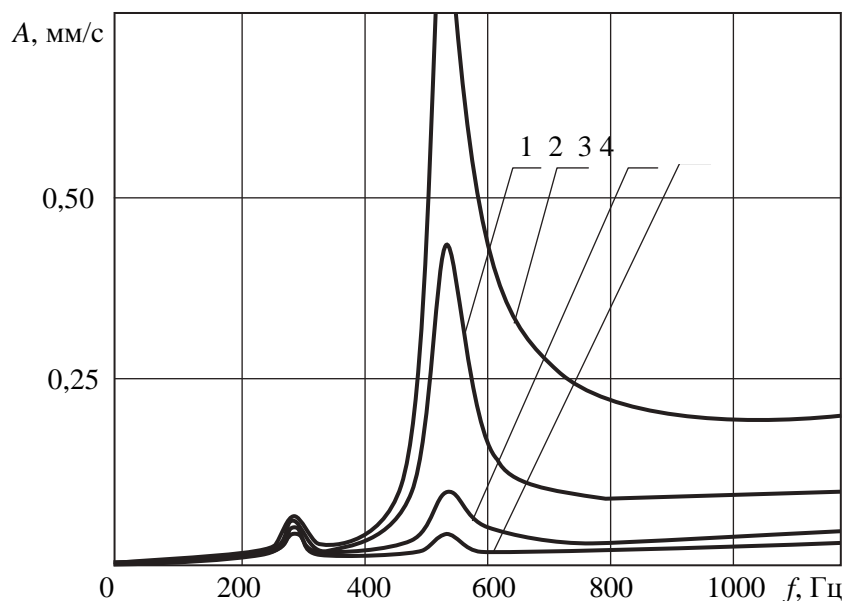


Рис. 4. Амплитудно-частотная характеристика при неблагоприятном распределении дисбалансов: 1 – амплитуда виброскорости до балансировки; 2 – амплитуда виброскорости после двухплоскостной балансировки; 3 – амплитуда виброскорости после трёхплоскостной балансировки при моделировании дисбаланса двумя массами; 4 – амплитуда виброскорости после трёхплоскостной балансировки исходных случайных дисбалансов

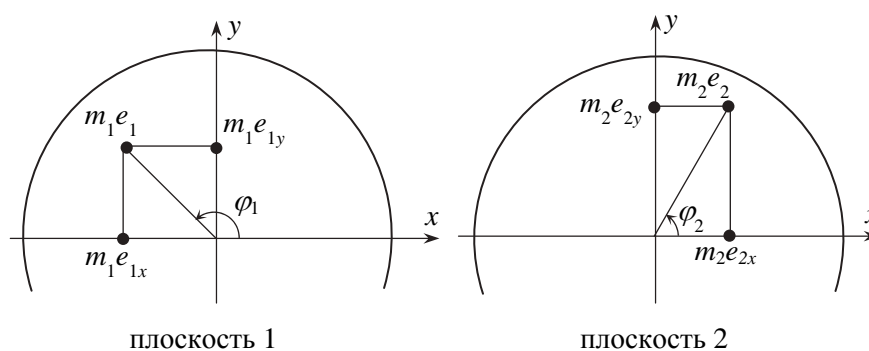


Рис. 5. Корректирующие массы в 2 плоскостях коррекции

Выводы

1. С использованием вероятностно-статистической модели случайного дисбаланса ротора расчётным путем получен результат, часто наблюдаемый на предприятии, – повышение уровня вибраций ротора на номинальных оборотах после низкочастотной балансировки. Показано, что причиной этого является близость одной из плоскостей коррекции к пучности второй собственной формы вращающегося ротора.

2. Трёхплоскостная балансировка с использованием даже не лучшей, но доступной плоскости коррекции, позволяет значительно снизить амплитуды виброскорости на рабочем режиме, одновременно уменьшив разброс результатов и полностью исключив случаи повышения уровня вибраций.

3. Предложена методика практической реализации трёхплоскостной балансировки с использованием станка «Морион», осуществляющего низкочастотную двухплоскостную балансировку ротора.

Литература

1. Бидерман, В.Л. Теория механических колебаний / В.Л. Бидерман. – М.: Высш. шк., 1980. – 68 с.
2. Бишоп, Л. О применении балансировочных машин для уравнивания гибких роторов / Л. Бишоп, А. Паркинсон // Конструирование и технология машиностроения. – 1972. – № 2. – С. 66–83.

3. Венцель, Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е.С. Венцель, Л.А. Овчаров. – М.: Высш. шк., 2000. – 46 с.
4. Йан, Ш. Вибрационная чувствительность вала турбогенератора поезда к дисбалансу / Ш. Йан, Р. Сиверт // 9-я междунар. конф. по роторной динамике IFToMM, 2014. – С. 125–134.
5. Бертонери, М. Высокоскоростная модальная балансировка турбомашин: моделирование и тестирование полноразмерных роторов / М. Бертонери, П. Форте // 9-я междунар. конф. по роторной динамике IFToMM, 2014. – С. 95–102.
6. ГОСТ 19534–74. Балансировка вращающихся тел. Термины. – М.: Изд-во стандартов, 1974. – 22 с.
7. ГОСТ 24346–80. Вибрация. Термины и определения. – М.: Изд-во стандартов, 1991. – 40 с.
8. Григорьев, В.Н. Вибрация энергетических машин / В.Н. Григорьев. – Л.: Машиностроение, 1974. – 464 с.
9. Гусаров, А.А. Динамика и балансировка гибких роторов / А.А. Гусаров. – М.: Наука, 1990. – 89 с.
10. Львов, М. Применение на турбогенераторе поезда динамического анализа для установления остаточного дисбаланса необходимого для высокоскоростной балансировки одного ротора / М. Львов // 9-я междунар. конф. по роторной динамике IFToMM, 2014. – С. 80–95.
11. Разич, З. Разработка новых методов балансировки для значительно эксцентричного или изогнутого роторов / З. Разич, М. Разич // 9-я междунар. конф. по роторной динамике IFToMM, 2014. – С. 103–110.
12. Келленбергер, В. Как следует балансировать гибкий ротор: в N или $(N+2)$ плоскостях? / В. Келленбергер // Конструирование и технология машиностроения. – 1972. – № 2. – С. 53–65.
13. Кнопф, Е. Определение остаточного дисбаланса для гибких роторов на рабочей скорости / Е. Кнопф, Т. Крюгер, Р. Нордман // 9-я междунар. конф. по роторной динамике IFToMM, 2014. – С. 134–145.
14. Слива, О.К. Дискретные модели колеблющихся лопаток турбомашин / О.К. Слива // Динамика и прочность машин: сб. – 1966. – № 4. – С. 37–46.
15. Основы балансировочной техники / под общ. ред. В.А. Щепетильникова. – М.: Машиностроение, 1975. – 76 с.
16. Пановко, Я.Г. Введение в теорию механических колебаний / Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1980. – С. 55–65.
17. Самаров, Н.Г. Определение места и величины дисбаланса гибкого всережимного ротора / Н.Г. Самаров // Энергомашиностроение. – 1966. – № 8. – С. 29–38.
18. Тасора, А. Анализ вращающихся систем с использованием общих результатов в многократной динамике / А. Тасора, П. Мазарати // 9-я междунар. конф. по роторной динамике IFToMM, 2014. – С. 150–167.
19. Пресиано, Е. Условия, необходимые для ликвидации пробных прогонов, проходящих во время балансировки ротора / Е. Пресиано // 9-я междунар. конф. по роторной динамике IFToMM, 2014. – С. 110–117.

Слива Олег Кириллович. Кандидат технических наук, профессор кафедры «Прикладная механика, динамика и прочность машин», Южно-Уральский государственный университет (Челябинск), slivaok@bk.ru.

Шахринов Владимир Николаевич. Аспирант кафедры «Прикладная механика, динамика и прочность машин», Южно-Уральский государственный университет (Челябинск), vnshachrinov@gmail.com.

Поступила в редакцию 11 октября 2014 г.

OPTIMIZATION OF LOW FREQUENCY BALANCING OF GD-40 ROTOR

*O.K. Sliva, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, slivaok@bk.ru,
V.N. Shahrinov, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation,
vnshachrinov@gmail.com*

Problem solutions connected with rotary vibration decrease issues are based upon a linear vibration theory. The theory also points out main vibration control measures: vibration isolations, damping, dynamic damping, decreasing the amount of driving force. One of the examples of the last mentioned is rotor balancing, particularly low-speed balancing. A low-speed rotary balancing is a fulfillment of a condition of a rotation axis passing through its centre of mass and compliance of a rotation axis of a rotary with one of its main inertial axes.

Recently rather compact low frequency balancing machines of BM series, named "Morion", allowing static and instant balancing of rotary mass up to 3 kilos have appeared in Russia. The machine is placed on the table.

Such machines have found use during rotary balancing of turbines of internal-combustion engines and gas-turbine engines, as the production of such rotors is large and each item is needed to be balanced

The aim is to determine the extent to which the introduction of a third plane correction in a given cross-section increases the efficiency of the available low-frequency balancing on the balancer "Morion".

The project addressed the following questions:

- Building a computational model of the rotor GD-40;
- Determination of natural frequencies and forms of the spinning rotor;
- Develop and probabilistic reasoning – a statistical model of the rotor unbalance shaft-mounted design;
- Study the effectiveness of balancing systems using different corrective masses;
- Use a 3-plane balancing in practice;
- Analysis of influence of the correction planes.

Keywords: third plane correction, low-frequency balancing, computational model of the rotor, natural frequencies and forms, statistical model of the rotor unbalance, corrective masses.

References

1. Biderman V.L. *Teoriya mekhanicheskikh kolebaniy* [Theory of Mechanical Vibrations]. Moscow, High School Publ., 1980. 68 p.
2. Bishop L., Parkinson A. [On the Application of Balancing Machines for Balancing Flexible Rotors]. *Construction and Engineering Technology*, 1972, no. 2, pp. 66–83. (in Russ.)
3. Ventcel' E.S. *Teoriya veroyatnostey i ee inzhenernye prilozheniya* [Probability Theory and Its Engineering Applications]. Moscow, High School Publ., 2000. 46 p.
4. Yan S., Sievert R. [Vibration Sensitivity of Large Turbine Generator Shaft Trains to Unbalance]. *9-ya mezhdunarodnaya konferentsiya po rotornoy dinamike IFToMM* [9th International Conference on Rotor Dynamics], 2014, pp. 125–134. (in Russ.)
5. Bertoneri M., Forte P. [Turbomachinery high speed modal balancing: modeling and testing of scale rotors]. *9-ya mezhdunarodnaya konferentsiya po rotornoy dinamike IFToMM* [9th International Conference on Rotor Dynamics], 2014, pp. 95–102. (in Russ.)
6. *GOST 19534-74. Balansirovka vrashchayushchikhsya tel. Terminy* [Balancing of rotating bodies. Terms]. Moscow, Standartinform Publ., 1974. 22 p.

7. GOST 24346-80. *Vibratsiya. Terminy i opredeleniya* [Vibration. Terms and definitions]. Moscow, Standartinform Publ., 1991. 40 p.
8. Grigoriev V.N. *Vibratsiya energeticheskikh mashin* [Vibration Energy Machines]. Moscow, Engineering Publ., 1974. 464 p.
9. Gusarov A.A. *Dinamika i balansirovka gibkikh rotorov* [Dynamics and Balancing Flexible Rotors]. Moscow, Science Publ., 1990. 89 p.
10. L'vov M. [Application of Turbine Generator Train Rotordynamic Analysis for Setting Residual Modal Unbalance Requirements for High Speed Balancing of a Single Rotor]. *9-ya mezhdunarodnaya konferentsiya po rotornoy dinamike IFToMM* [9th International Conference on Rotor Dynamics], 2014, pp. 80–95. (in Russ.)
11. Racic Z., Racic M. [Development of a New Balancing Approach for Significantly Eccentric or Bowed Rotors]. *9-ya mezhdunarodnaya konferentsiya po rotornoy dinamike IFToMM* [9th International Conference on Rotor Dynamics], 2014, pp. 103–110. (in Russ.)
12. Kellenberger T. [As Can Be Flexible to Balance the Rotor: a N or (N + 2) Planes?]. *Construction and Engineering Technology*, 1972, no. 2, pp. 53–64. (in Russ.)
13. Knopf E., Kruger T., Nordmann R. [Residual Unbalance Determination for Flexible Rotors at Operational Speed]. *9-ya mezhdunarodnaya konferentsiya po rotornoy dinamike IFToMM* [9th International Conference on Rotor Dynamics], 2014, pp. 134–145. (in Russ.)
14. Sliva D.C. [Discrete Models of Oscillating Blades Turbomachinery]. *Dynamics and Strength of Machines*, 1966, no. 4, pp. 37–46. (in Russ.)
15. Schepetilnikova V.A. (Ed.) *Osnovy balansirovochnoy tekhniki* [Fundamentals of Balancing Technology]. Moscow, Engineering Publ., 1975. 76 p.
16. Panovko Ya.G. *Vvedenie v teoriyu mekhanicheskikh kolebaniy* [Introduction to Mechanical Vibrations]. Moscow, Science Publ., 1980. 55 p.
17. Samarov N.G. [Determination of the Place and the Value of Variable Speed Rotor Imbalance Flexible]. *Powermachinebuilding*, 1966, no. 8, pp. 29–38. (in Russ.)
18. Tasora A., Masarati P. [Analysis of Rotating Systems Using General-Purpose Multibody Dynamics]. *9-ya mezhdunarodnaya konferentsiya po rotornoy dinamike IFToMM* [9th International Conference on Rotor Dynamics], 2014, pp. 150–167. (in Russ.)
19. Preciado E. [Conditions Required for the Elimination of Trial Runs During the Balancing of Flexible Rotors]. *9-ya mezhdunarodnaya konferentsiya po rotornoy dinamike IFToMM* [9th International Conference on Rotor Dynamics], 2014, pp. 110–117. (in Russ.)

Received 11 October 2014