

Идентификация параметров модели и фильтрация координат движения вагона монорельсовой дороги¹

Р.А. Горбачев*, Н.А. Гречишкина**, Ф.Н. Григорьев**, Н.А. Кузнецов**

*Московский физико-технический институт (государственный университет),
Долгопрудный, Россия

**Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва, Россия
e-mail: r.gorbachev@gmail.com, nata19682A@cplire.ru, grigor@cplire.ru, kuznetsov@cplire.ru

Поступила в редколлегию 09.09.2015

Аннотация—В рамках проблемы безопасной и экономичной перевозки пассажиров на монорельсовом транспорте одной из главных является задача автоматизации управления движением состава. В данной работе основное внимание уделено построению математической модели движения вагона, идентификации параметров модели и фильтрации координат движения вагона по монорельсовой дороге. Проведено моделирование, подтверждающее работоспособность полученных алгоритмов.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: модель, монорельс, коэффициенты удельных сил, силы трения скольжения и качения, последовательность независимых гауссовских величин, метод взвешенных наименьших квадратов,

1. ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени монорельсовые дороги имеются в наиболее богатых и технически развитых странах: США, Японии, Германии, Китае, и строятся в Малайзии, Сингапуре, Объединенных Арабских Эмиратах[1–4].

Основное преимущество монорельсовой дороги заключается том, что она, как и метрополитен, не занимает место на перегруженных магистралях города, но, в отличие от метро, гораздо дешевле в строительстве. Монорельсовый состав может преодолевать более крутые вертикальные уклоны. Развиваемая монорельсом скорость в теории может значительно превышать скорость традиционных рельсовых составов. Кроме того, вероятность столкновения с другими объектами дорожного движения ничтожно мала.

Монорельсовый транспорт часто движется с низкой скоростью, не может справиться с большими пассажиропотоками и используется в парках развлечений, на выставках, зоопарках, в торговых центрах и аэропортах для внутренних связей между терминалами и парковками; для связи аэропорта с центром города. Только в Японии монорельс протяженностью 102 км стандартизирован и выполняет функции общественного транспорта. Некоторые из японских монорельсов по своему пассажиропотоку соответствуют метрополитену. В Европе общая протяженность монорельсовых дорог Вупперталя, Дортмунда и Москвы составляет лишь 21 км.

Подытоживая сказанное, можно сделать вывод о необходимости поиска более эффективных и надежных инженерных решений с учетом всех местных условий (климата, рельефа местности и пр.) и автоматизации движения составов монорельсовых дорог с большей скоростью при сохранении высокой безопасности и экономичности.

¹ Прикладное научное исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации. Уникальный идентификатор прикладных научных исследований и экспериментальных разработок - RFMEFI58214X0003.

Проблемы построения и эксплуатации монорельсовых дорог включают в качестве основных разработку алгоритмов для автоматизации управления движением вагона. Данная работа посвящена разработке таких алгоритмов.

Исходные данные (предположения)

Для управления движением вагона по монорельсовой дороге между соседними станциями считаем заданными значения скорости движения вагона как функции расстояния, пройденного вагоном от предыдущей станции. Значение и изменение скорости определяются из условий безопасности и экономичности перевозки пассажиров с учетом профиля полотна дороги (спуски, подъемы, повороты, разгон, остановка).

По измерениям местоположения вагона (расстояния, на котором находится вагон на предыдущей станции) в текущий момент времени определяем заданные значения скорости и ускорения движения вагона.

Целью управления будем считать совпадение или минимальное отклонение текущих значений скорости и координаты движения вагона от заданных.

Предполагаем, что текущая информация о процессе движения вагона включает измеренные значения силы тяги и силы торможения. Эти силы составляют управляющее воздействие на вагон. Для оценки процесса движения вагона предполагаем наличие датчиков-измерителей пройденного вагоном расстояния и текущей скорости движения вагона.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ВАГОНА

При построении системы автоматического управления движением вагона необходимо тщательно исследовать динамические свойства вагона и использовать полученные результаты, как на этапе формулировки задачи, так и при разработке алгоритма управления. Динамические свойства вагона описываются соответствующей математической моделью движения. В нее входят зависимость выходных переменных – скорости движения вагона и его местоположение в данный момент времени, от входных переменных – силы тяги и силы торможения. Корректная математическая модель позволяет повысить точность решения задачи управления движением, экономичность и безопасность перевозки пассажиров.

Движение вагона можно подразделить на три основных режима: тяги, холостого хода и полного служебного торможения. В исключительных случаях имеется возможность применять режим экстренного торможения.

В тяговых расчетах обычно рассматриваются только те слагаемые приложенных к вагону внешних сил, которые направлены вдоль линии движения вагона по рельсовой колее. Это сила тяги F , сила сопротивления движению вагона W и тормозная сила B . Полные приложенные к вагону силы измеряются в ньютонах (H). Традиционно на транспорте при расчетах движения вагонов и их составов принято использовать понятия удельные силы, приходящие на единицу силы тяжести вагона, и коэффициенты удельных сил, которые измеряются в H/kH (масса вагона измеряется в тоннах и, соответственно, в килоньютонах):

$$\text{коэффициент удельной силы тяги } f = \frac{F}{Pg};$$

$$\text{коэффициент удельного сопротивления движению } w = \frac{W}{Pg};$$

$$\text{коэффициент удельной тормозной силы } b = \frac{B}{Pg},$$

где P – масса вагона с пассажирами, Т; g – ускорение свободного падения, m/c^2 .

Сила тяги образуется при взаимодействии ведущих колес вагона с рельсами. Она приложена в точке касания колеса с рельсом и называется касательной силой тяги F . сила тяги, kH , не

может превысить силу сцепления колес с рельсом:

$$F \leq P_{cy} \times g \times \Psi_k,$$

где P_{cy} – сцепная масса вагона, T , масса, приходящаяся на ведущие оси вагона.

Расчетные значения коэффициента сцепления Ψ_k определяют по эмпирическим формулам, изменяющимся в зависимости от скорости движения вагона: чем больше скорость, тем меньше коэффициент сцепления и выше проскальзывание колес. По этой же причине коэффициент сцепления уменьшается при движении вагона по кривым малого радиуса.

Зависимость силы тяги вагона от скорости его движения определяется тяговой характеристикой. При графическом представлении тяговых характеристик одновременно наносятся графики ограничения силы тяги по сцеплению F_{kcy} . Тяговые характеристики зависят от типов двигателей, использующихся для передвижения вагона, и схем подключения электродвигателей в сеть.

Рассмотрим силы сопротивления движению вагона по горизонтальному участку пути. К ним относятся силы трения и силы сопротивления воздушной среды. Силы трения подразделяются по характеру движения на трение скольжения (одно тело скользит по поверхности другого) и трение качения (одно тело катится по поверхности другого). Они обусловлены трением шеек осей в подшипниках, трением качения и трением скольжения колес по рельсам, как на прямолинейных участках пути, так и на кривых.

Силы трения скольжения можно представить как

$$W_{TC} = f_1 \times F_H,$$

где f_1 – коэффициент трения, зависящий от природы и качества обработки трущихся поверхностей и, в меньшей степени, от относительной скорости движения, F_H – прижимающая сила трущихся поверхностей (сила нормального давления).

Коэффициент трения покоя f_n меняет свое значение с изменением абсолютного значения приложенной к телу силы. Однако $0 \leq f_n \leq f_1$, где f_1 – коэффициент трения скольжения.

Трение качения меньше трения скольжения. Сила трения качения зависит от радиуса R катящегося тела, силы нормального давления F_H и качества соприкасающихся поверхностей:

$$W_{TK} = k_1 \times \frac{F_H}{R},$$

где k_1 – величина, характеризующая соприкасающиеся поверхности, она имеет размерность длины.

В качестве примера можно привести следующие значения k_1 в см:

- колесо со стальным бандажом по стальному рельсу 0,06;
- чугунное колесо по стальному рельсу 0,12.

Рассмотрим силу сопротивления воздушной среды, значение которой пропорционально скорости движения вагона относительно воздуха во второй степени:

$$\begin{aligned} W_{aэp} &= k_2(V + V_{вет})^2 = k_2(V^2 + 2V_{вет} \times V + V_{вет}^2) = \\ &= k_2 \times V^2 + 2k_2 \times V_{вет} \times V + k_2 \times V_{вет}^2 = A_0^* + A_1^* \times V + A_2^* \times V^2, \end{aligned}$$

где V – скорость движения вагона, $V_{вет}$ – проекция скорости ветра на V (встречный ветер соответствует положительному значению $V_{вет}$ и, наоборот, попутный ветер – отрицательному значению), k_2 – коэффициент, зависящий от формы и размеров вагона.

Таким образом, удельное сопротивление движению вагона, H/kH , можно представить в зависимости от скорости движения вагона в виде

$$w_0 = A_0 + A_1 \times V + A_2 \times V^2, \quad (1)$$

где A_0, A_1, A_2 – коэффициенты, зависящие от режима движения вагона (тяги, холостого хода), силы ветра, наличия дождя (осадков), конструкции пути и т.д.

Дополнительное сопротивление движению от уклона есть составляющая силы тяжести вагона, направленная вдоль пути, W_i, H ,

$$W_i = 10^3 \times P \times g \times \sin \alpha.$$

Ввиду малости угла α принимаем $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha$. А поскольку уклон пути (i), выраженный в промилле (%), равен $10^3 \times \operatorname{tg} \alpha$, то $i = 10^3 \times \operatorname{tg} \alpha$ и $W_i = P \times g 10^3 \times \operatorname{tg} \alpha = P \times g \times i$.

Удельное дополнительное сопротивление от уклона, H/kH , $i = w_i = W_i/P \times g$, т.е. удельное дополнительное сопротивление составляет тысячные доли от величины уклона.

При движении вагона на подъем дополнительное сопротивление от уклона направлено в сторону, противоположную направлению движения, т.е. положительно. При движении вагона по спуску сопротивление считается отрицательным.

Из изложенного выше следует, что в качестве математической модели движения вагона может быть выбран случайный процесс, удовлетворяющий системе разностных уравнений

$$V_{n+1} = V_n + \frac{g}{1000} \left(\frac{F_n - B_n}{Pg} - A_0 - A_1 V_n - A_2 V_n^2 - i_n \right) \Delta t + \varepsilon_{n+1}, \quad (2)$$

$$X_{n+1} = X_n + V_n \Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad V_0 = 0, \quad X_0 = 0;$$

где F_n – сила тяги, H , и B_n – тормозная сила, H , предполагаются известными величинами, V_n – скорость движения вагона, м/с, X_n – расстояние от вагона до предыдущей станции, м, Δt – шаг временной дискретизации, с, i_n – уклон пути, %, на расстоянии X_n от предыдущей станции, предполагается известным, ε_n , $n = 1, 2, \dots$, – последовательность независимых гауссовских случайных величин с нулевыми средними $M\varepsilon_n = 0$ и равными дисперсиями $M\varepsilon_n^2 = \sigma^2$.

Для разных режимов движения вагона математические модели будут отличаться действующими на вагон силами, включенными в описание математических моделей (при режиме тяги тормозная сила $B_n = 0$).

Измеряемыми величинами являются V_n и X_n , априорно известные i_n – уклон пути, и g – ускорение свободного падения. Неизвестными, требующими оценивания, являются параметры $P, A_0, A_1, A_2, \sigma^2$. Параметры A_0, A_1, A_2 могут изменяться при прохождении вагона между станциями: их значения зависят от геометрии участка пути и состояния рельса (балки), скорости и направления ветра и т.д. Скорость изменения параметров предполагается достаточно медленной. Масса вагона с пассажирами P при прохождении вагона между соседними станциями остается постоянной.

3. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ВАГОНА

Для оценивания неизвестных параметров, входящих в систему (2), описывающую математическую модель, воспользуемся результатами метода наименьших квадратов (МНК) [5, 6]. Запишем первые уравнения системы (2) в виде

$$\frac{F_n - B_n}{Pg} - A_0 - A_1 V_n - A_2 V_n^2 = \frac{1000}{g \times \Delta t} (V_{n+1} - V_n - \varepsilon_{n+1}) + i_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Допустим, что через равные интервалы времени Δt проведено $N + 1$ наблюдений за входными и выходными переменными движения вагона.

Для удобства изложения введем векторы

$$\Theta = \left(\frac{1}{Pg}, A_0, A_1, A_2 \right)^T, \quad \varphi(n) = (F_n - B_n, -1, -V_n, -V_n^2)^T$$

и

$$Y(n) = \left(1000 \frac{V_2 - V_1}{g \times \Delta t} + i_1, 1000 \frac{V_3 - V_2}{g \times \Delta t} + i_2, \dots, 1000 \frac{V_{N+1} - V_N}{g \times \Delta t} + i_N \right)^T = (y(1), y(2), \dots, y(N))^T. \quad (4)$$

В новых переменных уравнения (3) будут иметь вид

$$y(n) = \Theta^T \times \varphi(n) + e(n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (5)$$

где $e(n) = \frac{1000}{g \times \Delta t} \varepsilon_{n+1}$.

Предсказывающая модель МНК запишется в виде

$$\hat{y}(n) = \Theta^T \varphi(n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (6)$$

В МНК минимизируется критерий

$$\sum_{j=1}^n (y(j) - \hat{y}(j))^2 = \sum_{j=1}^n (y(j) - \Theta^T \varphi(j))^2 \quad (7)$$

по Θ , чтобы получить оценку $\hat{\Theta}(n)$ вектора Θ .

Алгоритм получения оценок может быть представлен следующей последовательностью вычислений. Записываются первые последовательные N измерений $Y(N) = (y(1), y(2), \dots, y(N))^T$ и соответствующая этим измерениям регрессионная матрица

$$\Phi(N) = \begin{pmatrix} F_1 - B_1, & -1, & -V_{1,1} & -V_{1,1}^2 \\ F_2 - B_2, & -1, & -V_2 & -V_2^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_N - B_n, & -1, & -V_N & -V_N^2 \end{pmatrix}.$$

Оценки $\hat{\Theta}(n)$ вектора Θ на основе первых N измерений задаются равенством

$$\hat{\Theta}(N) = (\Phi^T(N)\Phi(N))^{-1} \Phi^T(N)Y(N).$$

Далее последовательность оценок $\hat{\Theta}(n)$ может быть записана рекурсивно [6]:

$$\hat{\Theta}(n) = \hat{\Theta}(n-1) + \frac{1}{n} K(n) \times (y(n) - \hat{\Theta}(n-1)^T \varphi(n)), \quad n = N+1, N+2, \dots, \quad (8)$$

$$K(n) = \frac{R(n-1)^{-1} \varphi(n)}{1 + \frac{1}{n} (\varphi(n)^T R(n-1)^{-1} \varphi(n) - 1)}, \quad (9)$$

$$R(n) = R(n-1) + \frac{1}{n} (\varphi(n) \varphi(n)^T - R(n-1)), \quad (10)$$

$$R(N) = \frac{1}{N} \Phi^T(N) \times \Phi(N).$$

Уравнение (10) может быть записано в терминах $S(n) = R^{-1}(n)$ при $\mu(n) = 1/n$:

$$S(n) = \frac{1}{1 - \mu(n)} \left[S(n-1) - \frac{S(n-1)\varphi(n)\varphi^T(n)S(n-1)}{\frac{1-\mu(n)}{\mu(n)} + \varphi^T(n)S(n-1)\varphi(n)} \right]. \quad (11)$$

Дисперсия величины $e(n)$, входящей в уравнение (5), оценивается остаточной дисперсией $s^2 = \frac{Q_e}{n-4}$, где Q_e – остаточная сумма квадратов $Q_e = \sum_{j=1}^n (y(j) - \Theta(n)\varphi(n))^2$, n – число измерений, 4 – число оцениваемых параметров.

Остаточная дисперсия является несмещенной оценкой дисперсии ошибок $e(n)$, $M[s^2] = M[e^2(n)]$.

Из равенства

$$M[e^2(n)] = \frac{10^6}{g^2(\Delta t)^2} M[\varepsilon_{n+1}^2] = \frac{10^6}{g^2(\Delta t)^2} \sigma^2$$

получаем оценку $\sigma^2 = M\varepsilon_n^2$, характеризующую шум в уравнении (2)

$$\sigma^2 = \frac{g^2(\Delta t)^2}{10^6} \times \frac{Q_e}{n-4}. \quad (12)$$

Таким образом, получены оценки всех неизвестных параметров системы (2), описывающей математическую модель движения вагона в режиме тяги.

При замене $1/n$ в (8–10) общей последовательностью положительных чисел $\mu(n)$ последовательность $\mu(\cdot)$ изменяет вклад старых измерений в критерий (7) по сравнению с последовательностью $1/n$. В частности, $\mu(n) = \mu_0$ соответствует экспоненциальному забыванию старых данных с показателем $1 - \mu_0$. Использование константы μ_0 целесообразно, когда оцениваются медленно изменяющиеся параметры системы.

Аналогично строятся математические модели движения вагона в режиме холостого хода и в режиме торможения. В режиме торможения считается известной тормозная сила B .

Построенные математические модели используются для синтеза закона управления движением вагона.

4. ФИЛЬТРАЦИЯ ТЕКУЩИХ ЗНАЧЕНИЙ СКОРОСТИ И КООРДИНАТЫ ДВИЖЕНИЯ ВАГОНА

Для целей управления движением вагона желательно знать текущие значения скорости и координаты вагона с возможно максимальной точностью по имеющейся к данному моменту априорной информации и проведенных измерений. Воспользуемся результатами теории фильтрации [7] для уточнения оценок значений скорости движения и координаты вагона.

Уравнения (2) математической модели движения вагона разложим в ряд в окрестности заданной скорости движения V_n^{zad} до линейных членов и получим

$$\begin{cases} x_{n+1} = c_n + a_n \times x_n + \varepsilon_{n+1} \\ X_{n+1} = C_n + x_n \times \Delta t + X_n \end{cases}, \quad (13)$$

где $x_n = V_n - V_n^{zad}$, $c_n = V_n^{zad} - V_{n+1}^{zad} + \frac{g}{1000} \left(\frac{F_n - B_n}{P \times g} - A_0 - A_1 \times V_n^{zad} - A_2 (V_n^{zad})^2 - i_n \right) \Delta t$,
 $a_n = 1 + \frac{g}{1000} (-A_1 - 2A_2 \times V_n^{zad}) \Delta t$, $C_n = V_n^{zad} \times \Delta t$.

Для решения задачи фильтрации в качестве математической модели движения вагона выбираем дискретный случайный процесс, удовлетворяющий системе (13), где x_n – отклонение скорости движения вагона от заданной, X_n – текущее расстояние вагона от предыдущей станции, Δt – шаг временной дискретизации, ε_n – независимая гауссовская последовательность с $M[\varepsilon_n] = 0$, $M[\varepsilon_n^2] = \sigma^2$, определяется выражением (12).

Когда система (13) находится в состоянии n , производятся измерения z_n . Они линейно связаны с состояниями $(x_n, X_n)^T$

$$z_n = \begin{pmatrix} z_n^1 \\ z_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_n^{uzM} - V_n^{3ad} \\ X_n^{uzM} \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} x_n \\ X_n \end{pmatrix} + \nu_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ X_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu_n^1 \\ \nu_n^2 \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (14)$$

где $M \begin{pmatrix} \nu_n^1 \\ \nu_n^2 \end{pmatrix} = 0$, $M \left(\begin{pmatrix} \nu_n^1 \\ \nu_n^2 \end{pmatrix} (\nu_i^1, \nu_i^2) \right) = \tilde{R}_1 \delta_{ni}$, $M(\varepsilon_n (\nu_i^1, \nu_i^2)) = (0, 0)$.

Первая координата вектора z_n есть разность измеренного и заданного значений скорости. Вторая координата – измеренное значение пройденного вагоном расстояния от предыдущей станции.

Оценку состояния $(x_k, X_k)^T$ по методу взвешенных наименьших квадратов или методу максимального правдоподобия, используя только измерения (z_0, \dots, z_k) , можно получить с помощью следующего фильтра

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_n \\ \hat{X}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_n \\ \bar{X}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_n^{11} & k_n^{12} \\ k_n^{21} & k_n^{22} \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} z_n^1 \\ z_n^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \bar{x}_n \\ \bar{X}_n \end{pmatrix} \right], \quad n = 0, \dots, k, \quad (15)$$

где

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_{n+1} \\ \bar{X}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_n \\ C_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ \Delta t & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{x}_n \\ \hat{X}_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{X}_0 \end{pmatrix} - \text{задано}, \quad (16)$$

$$\begin{pmatrix} k_i^{11} & k_i^{12} \\ k_i^{21} & k_i^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{P}_i^{11} & \tilde{P}_i^{12} \\ \tilde{P}_i^{21} & \tilde{P}_i^{22} \end{pmatrix} \times \tilde{R}_i^{-1}, \quad (17)$$

$$\tilde{P}_i = \tilde{M}_i - \tilde{M}_i (\tilde{M}_i + \tilde{R}_i)^{-1} \tilde{M}_i, \quad \tilde{P}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$\tilde{M}_{i+1} = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ \Delta t & 1 \end{pmatrix} \tilde{P}_i \begin{pmatrix} a_n & \Delta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Здесь $\tilde{P}_i, \tilde{M}_i, \tilde{R}_i$ – матрицы размера (2×2) . $\tilde{P}_0 = 0$ соответствует случаю, когда вагон стоял на предыдущей станции в начальный момент времени.

Полученные с помощью фильтра оценки вектора состояния подлежат использованию для определения значений управляющих воздействий, т.е. сил тяги и торможения.

Проведенное моделирование показало работоспособность и эффективность изложенных алгоритмов при выбранном графике набора скорости вагона.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен анализ сил, действующих на вагон монорельсовой дороги. Разработана математическая модель движения вагона. Разработан алгоритм идентификации для оценки параметров модели. Подтверждена работоспособность алгоритма идентификации моделированием при выбранном графике набора скорости вагона.

Для оценки координат движения вагона получена линеаризованная модель движения и разработан алгоритм фильтрации измерений.

