УДК 622.625.6

Гутаревич В.О., к.т.н,.

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОДВЕСНОГО МОНОРЕЛЬСА ПРИ ДЕЙСТВИИ НА НЕГО ПРОДОЛЬНЫХ СИЛ

Постановка проблемы. Во время движения подвесной монорельсовой дороги монорельс нагружается поперечными и продольными нагрузками. Первые обусловлены действием сил тяжести, сил инерции и вызывают изгиб монорельса, а вторые определяются, главным образом, тяговыми усилиями, сопротивлениями движению, силами торможения и приводят к его растяжению или сжатию.

Монорельс имеет малое поперечное сечение по отношению к длине и пространственные масштабы движения соразмерны с масштабами изменения физических параметров. В общем случае он может быть представлен как система с распределенными параметрами, имеющая пространственную протяженность входящих в нее элементов, которые обладают массой. Взаимодействие элементов между собой приводит к возникновению сил сопротивлений, деформаций или упругости, а поэтому они не могут быть разделены в пространстве без потери точности или адекватности модели.

Анализ последних исследований и публикаций. В научных работах [1, 2, 3, 4] приводятся результаты исследований продольных колебаний стержневых систем с распределенными параметрами. Специфика подвесного монорельсового пути и особенности его эксплуатации обуславливают продолжение указанных исследований.

Цель данной работы заключается в установлении взаимосвязи между поперечными колебаниями монорельса при действии на него продольных сил для снижения динамических нагрузок, возникающих во время движения подвесной монорельсовой дороги.

Изложение основного материала исследования. Рассмотрим уравнение поперечных колебаний монорельса, испытывающего растягивающее усилие P_p, которое согласно [5, 6] будет

$$EJ\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} - P_p\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \rho_\gamma L\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0. \qquad (1)$$

где E – модуль упругости материала монорельса;

J – момент инерции поперечного сечения монорельса относительно его продольной оси;

z – поперечное перемещение монорельса в точке x;

ρ_γ – погонная масса монорельса.

Найдем решение в виде

$$z(x,t) = Ce^{i(n_p x + \omega t)}.$$

Учитывая это характеристическое уравнение, соответствующее выражению (1), можем записать как

$$EJn_p^4 + P_p n_p^4 - \rho_\gamma L\omega^2 = 0, \qquad (2)$$

где $L-$ длина монорельса;

n_p – корни уравнения, которые равны

$$n_{p1,2} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{P_p^2 + 4EJ\rho_\gamma\omega^2} - P_p}{2EJ}} = \pm k_p;$$

$$n_{p3,4} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{P_p^2 + 4EJ\rho_\gamma\omega^2} + P_p}{2EJ}}i = \pm K_p i.$$

Тогда частное решение уравнения (1) будет

$$z(x,t) = \left(C_{P1}e^{ik_p x} + C_{P2}e^{-ik_p x} + C_{P3}e^{K_p x} + C_{P4}e^{-K_p x}\right)e^{i\omega t}.$$

Это решение можно представить с использованием новых постоянных интегрирования

$$\begin{aligned} z(x,t) = (&A_P \mathrm{ch}K_p x + B_P \mathrm{sh}K_p x + \\ &+ C_P \cos k_p x + D_P \sin k_p x)\sin(\omega t + \mu_{n_p}). \end{aligned} \qquad (3)$$

На основании того, что сумма частных решений (3) определяет общее решение уравнения (1), имеем

$$\begin{aligned} z(x,t) = \sum_{n_p}^{\infty}(&A_{n_p}\mathrm{ch}K_{n_p}x + B_{n_p}\mathrm{sh}K_{n_p}x + \\ &+ C_{n_p}\cos k_{n_p}x + D_{n_p}\sin k_{n_p}x)\sin(\omega t + \mu_{n_p}). \end{aligned} \qquad (4)$$

где n_p – номер гармоники, соответствующий главным формам колебаний монорельса.

Используя начальные параметры, найдем постоянные интегрирования. Для этого запишем уравнение изогнутой оси монорельса

$$z(x) = (A_P \mathrm{ch}K_p x + B_P \mathrm{sh}K_p x + C_P \cos k_p x + D_P \sin k_p x).$$

На основании этого

$$z'(x) = K_P(A_P \mathrm{sh} K_p x + B_P \mathrm{ch} K_p x) +$$
$$+ k_p(-C_P \sin k_p x + D_P \cos k_p x);$$
$$z''(x) = K_p^2(A_P \mathrm{ch} K_p x + B_P \mathrm{sh} K_p x) -$$
$$- k_p^2(C_P \cos k_p x - D_P \sin k_p x);$$

С учетом дифференциальных зависимостей Журавского $M = EJ\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $Q = \dfrac{dM}{dx}$ и начальных условий $z(0) = z_0$, $z'(0) = z'_0$, $M(0) = M_0$, $Q(0) = P_0$ составим систему

$$A_P + C_P = z_0;$$
$$B_P K_p = z'_0;$$
$$EJ(K_p^2 A_P - k_p^2 C_P) = M_0;$$
$$EJ(K_p^3 B_P - k_p^3 D_P) = P_0.$$

Тогда постоянные интегрирования будут

$$A_P = \frac{1}{k_p^2 + K_p^2}\left(z_0 k_p^2 + \frac{M_0}{EJ}\right);\ B_P = \frac{1}{k_p^2 + K_p^2}\left(\frac{z'_0}{K_p}\left(k_p + \frac{P_0}{EJ}\right)\right);$$
$$C_P = \frac{1}{k_p^2 + K_p^2}\left(z_0 K_p^2 - \frac{M_0}{EJ}\right);\ D_P = \frac{1}{k_p^2 + K_p^2}\left(\frac{z'_0}{k_p}\left(K_p^2 - \frac{P_0}{EJ}\right)\right).$$

После подстановки этих постоянных интегрирования в (3) находим окончательное решение уравнения деформированной оси монорельса

$$z(x) = z'_0 \frac{k_p^3 \mathrm{sh} K_p x + K_p^3 \sin k_p x}{k_p K_p\left(k_p^2 + K_p^2\right)} + z_0 \frac{k_p^2 \mathrm{ch} K_p x + K_p^2 \cos k_p x}{k_p^2 + K_p^2} +$$
$$+ \frac{M_0\left(\mathrm{ch} K_p x - \cos k_p x\right)}{EJ\left(k_p^2 + K_p^2\right)} + \frac{P_0\left(k_p \mathrm{sh} K_p x - K_p \sin k_p x\right)}{EJ k_p K_p\left(k_p^2 + K_p^2\right)}.$$

Следует отметить, что для корней характеристического уравнения (2) можно записать

$$k_p K_p = \sqrt{\frac{\rho_\gamma L \omega^2}{EJ}} = k_0^2,$$

где k_0 – волновые числа колебаний монорельса, происходящих без действия продольной силы, равные

$$k_0 = \sqrt[4]{\frac{\rho_{\lambda\gamma} L \omega^2}{EJ}}.$$

Аналогично [7] обозначим следующие обобщенные динамические функции:

$$A_{k_0x} = \frac{k_p^2 \mathrm{ch} K_p x + K_p^2 \cos k_p x}{k_p^2 + K_p^2}; \qquad \frac{dA_{k_0x}}{dx} = k_0 D_{k_0x};$$

$$A^*_{k_0x} = \frac{K_p^2 \mathrm{ch} K_p x + k_p^2 \cos k_p x}{k_p^2 + K_p^2}; \qquad \left(A^*_{k_0x}\right)' = k_0 D^*_{k_0x};$$

$$B_{k_0x} = \frac{k_p^3 \mathrm{sh} K_p x + K_p^3 \sin k_p x}{k_0\left(k_p^2 + K_p^2\right)}; \qquad B'_{k_0x} = k_0 A_{k_0x};$$

$$B^*_{k_0x} = k_0 \frac{K_p \mathrm{sh} K_p x + k_p \sin k_p x}{k_p^2 + K_p^2}; \qquad \left(B^*_{k_0x}\right)' = k_0 A^*_{k_0x};$$

$$C_{k_0x} = k_0^2 \frac{\mathrm{ch} K_p x - \cos k_p x}{k_p^2 + K_p^2}; \qquad C'_{k_0x} = k_0 B^*_{k_0x};$$

$$C^*_{k_0x} = \frac{K_p^4 \mathrm{ch} K_p x - k_p^4 \cos k_p x}{k_0^2 (k_p^2 + K_p^2)};$$

$$D_{k_0x} = k_0 \frac{k_p \mathrm{sh} K_p x - K_p \sin k_p x}{k_p^2 + K_p^2}; \qquad D'_{k_0x} = k_0 C_{k_0x};$$

$$D^*_{k_0x} = \frac{K_p^3 \mathrm{sh} K_p x - k_p^3 \sin k_p x}{k_0 (k_p^2 + K_p^2)}; \qquad \left(D^*_{k_0x}\right)' = k_0 C^*_{k_0x}.$$

При $P_p = 0$, когда $k_0 = k_p = K_p$, эти зависимости превращаются в функции Крылова. Введем обозначения $k_p = k_0 \varsigma_1$, $K_p = k_0 \varsigma_2$, где $\varsigma_1 \varsigma_2 = 1$, произведем преобразования

$$\varsigma_1 = \sqrt{\sqrt{\frac{P_p^2}{4EJ\rho_\gamma L\omega^2} + 1} - \frac{P_p}{2\omega}\sqrt{\frac{1}{\rho_\gamma EJ}}},$$
$$\varsigma_2 = \sqrt{\sqrt{\frac{P_p^2}{4EJ\rho_\gamma L\omega^2} + 1} + \frac{P_p}{2\omega}\sqrt{\frac{1}{\rho_\gamma EJ}}}, \tag{5}$$

Если обозначить $a_p = \dfrac{P_p}{2k_0^2 EJ}$ и подставить в (5) параметр $\omega^2 = k_0^4 \dfrac{EJ}{\rho_\gamma L}$, то получим

$$\varsigma_1 = \sqrt{\sqrt{a_p^2 + 1} - a_p}; \quad \varsigma_2 = \sqrt{\sqrt{a_p^2 + 1} + a_p}.$$

На основании этого постоянные интегрирования, определяющие уравнение деформированной продольной оси монорельса, будут

$$A_{k_0x}=\frac{\varsigma_1^2\text{ch}k_0\varsigma_2x+\varsigma_2^2\cos k_0\varsigma_1x}{\varsigma_1^2+\varsigma_2^2};\quad \frac{\partial A_{k_0x}}{\partial x}=k_0D_{k_0x};\quad \frac{\partial A_{k_0x}}{\partial k_0}=xD_{k_0x};$$

$$\frac{\partial B_{k_0x}}{\partial x}=k_0A_{k_0x};\quad \frac{\partial B_{k_0x}}{\partial k_0}=xA_{k_0x};\qquad (6)$$

$$C_{k_0x}=\frac{\text{ch}k_0\varsigma_2x-\cos k_0\varsigma_1x}{\varsigma_1^2+\varsigma_2^2};\quad \frac{\partial C_{k_0x}}{\partial x}=k_0B^*_{k_0x}\cong k_0B_{k_0x};\quad \frac{\partial C_{k_0x}}{\partial k_0}=xB_{k_0x};$$

$$D_{k_0x}=\frac{\varsigma_1\text{sh}k_0\varsigma_2x-\varsigma_2\sin k_0\varsigma_1x}{\varsigma_1^2+\varsigma_2^2};\quad \frac{\partial D_{k_0x}}{\partial x}=k_0C_{k_0x};\quad \frac{\partial D_{k_0x}}{\partial k_0}=xC_{k_0x}.$$

В итоге, с учетом начальных параметров, получаем выражения, учитывающие растягивающее усилие P_p в монорельсе

$$z(x)=z_0A_{k_0x}+\frac{z_0'B_{k_0x}}{k_0}+\frac{M_0C_{k_ox}}{k_0^2EJ}+\frac{P_0D_{k_ox}}{k_0^3EJ};$$

$$z'(x)=z_0'A_{k_0x}+\frac{M_0B^*_{k_0x}}{k_0EJ}+\frac{P_0C_{k_ox}}{k_0^2EJ}+z_0k_0D_{k_0x};$$

$$M(x)=M_0A^*_{k_0x}+\frac{P_0B^*_{k_0x}}{k_0EJ}+z_0k_0^2EJC_{k_0x}+z_0'k_0EJD_{k_0x};$$

$$Q(x)=P_0A^*_{k_0x}+z_0k_0^3EJB^*_{k_0x}+z_0'k_0^2EJC_{k_0x}+M_0k_0EJD^*_{k_0x}.$$

Если на монорельс действует сжимающая сила P_p, то корни характеристического уравнения (2) будут $n_{p1,2}=\pm k_pi$ и $n_{p3,4}=\pm K_p$, а уравнение изогнутой оси монорельса принимает вид

$$z(x)=A_P\text{ch}k_px+B_P\text{sh}k_px+C_P\cos K_px+D_P\sin K_px\qquad (7)$$

При сжимающей продольной силе обобщенные динамические функции аналогично будут

$$A_{k_0x}=\frac{K_p^2\text{ch}k_px+k_p^2\cos K_px}{k_p^2+K_p^2};\qquad \frac{dA_{k_0x}}{dx}=k_0D_{k_0x};$$

$$A^*_{k_0x}=\frac{k_p^2\text{ch}k_px+K_p^2\cos K_px}{k_p^2+K_p^2};\qquad \frac{A^*_{k_0x}}{dx}=k_0D^*_{k_0x};$$

$$B_{k_0x}=\frac{K_p^3\text{sh}k_px+k_p^3\sin K_px}{k_0\left(k_p^2+K_p^2\right)};\qquad \frac{B_{k_0x}}{dx}=k_0A_{k_0x};$$

$$B^*_{k_0x}=k_0\,\frac{k_p\text{sh}k_px+K_p\sin K_px}{k_p^2+K_p^2};\qquad \frac{B^*_{k_0x}}{dx}=k_0A^*_{k_0x};$$

$$C_{k_0x}=k_0^2\,\frac{\mathrm{ch}k_px-\cos K_px}{k_p^2+K_p^2}; \qquad \frac{C_{k_0x}}{dx}=k_0B^*_{k_0x};$$

$$C^*_{k_0x}=\frac{k_p^4\mathrm{ch}k_px-K_p^4\cos K_px}{k_0^2(k_p^2+K_p^2)};$$

$$D_{k_0x}=k_0\,\frac{K_p\mathrm{sh}k_px-k_p\sin K_px}{k_p^2+K_p^2}; \qquad \frac{D_{k_0x}}{dx}=k_0C_{k_0x};$$

$$D^*_{k_0x}=\frac{k_p^3\,\mathrm{sh}\,k_px-K_p^3\sin K_px}{k_0(k_p^2+K_p^2)}; \qquad \frac{D^*_{k_0x}}{dx}=k_0C^*_{k_0x}.$$

Для граничных условий, когда все начальные параметры равны z_0, выражение (4) принимает вид

$$z(x,t)=\sum_{n_p}^{\infty}z_0Z_{n_p}(x)\sin(\omega_{n\,p}t+\mu_{n_p}), \tag{8}$$

где $Z_{n_p}(x)$ – собственные функции, определяющие относительные перемещения продольной оси монорельса при $z_0=1$.

Отсюда скорость перемещения будет

$$z'(x,t)=\sum_{n_p}^{\infty}\omega_{n_p}z_0Z_{n_p}(x)\cos(\omega_{n\,p}t+\mu_{n_p}), \tag{9}$$

Для начальных условий $z(x,0)$ и $z'(x,0)$ начальная фаза колебаний равна

$$tg\mu_{n_p}=\frac{z(x,t)}{z'(x,0)}\omega_{n_p}, \tag{10}$$

где $\omega_{n_p}=k_p\sqrt{\dfrac{k_p^2EJ+P_p}{\rho_\gamma L}}=K_p\sqrt{\dfrac{K_p^2EJ-P_p}{\rho_\gamma L}}$.

Рассмотрим свойства собственных функций поперечных колебаний монорельса при действии продольных сил P_p. Для этого запишем уравнение собственных колебаний (1), учитывая $z(x,t)=z_0Z(x)P_p(t)$ по методу Фурье [5]

$$\frac{EJ}{\rho_\gamma L}\cdot\frac{Z^{IV}(x)}{Z(x)}-\frac{P_p}{\rho_\gamma L}\cdot\frac{Z''(x)}{Z(x)}=-\frac{P_p'(x)}{P_p(x)}=\omega^2. \tag{11}$$

Отсюда можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение изогнутой оси монорельса

$$\frac{d^4Z(x)}{dx^4}-\frac{P_p}{EJ}\cdot\frac{d^2Z(x)}{dx^2}=\frac{\rho_\gamma L\omega^2Z(x)}{EJ}=k_0^2Z(x).$$

Для m - и n - гармоник имеем

$$Z_n^{IV} - \frac{P_p}{EJ} Z_n'' = k_0^4 Z_n; \tag{12}$$

$$Z_m^{IV} - \frac{P_p}{EJ} Z_m'' = k_0^4 Z_m. \tag{13}$$

Обе части выражения (12) умножим на Z_m, а (13) – на Z_n. После вычитания первого из второго и интегрирования, можем написать

$$\left(k_{0n}^4 - k_{0m}^4\right)\int_0^L Z_n Z_m dx = \int_0^L Z_m Z_n^{IV} dx - \frac{P_p}{EJ}\int_0^L Z_m Z_n'' dx -$$
$$-\int_0^L Z_n Z_m^{IV} dx + \frac{P_p}{EJ}\int_0^L Z_n Z_m'' dx.$$

Отсюда найдем обобщенную зависимость для определения свойств собственных функций

$$\left(k_{0n}^4 - k_{0m}^4\right)\int_0^L Z_n Z_m dx = \tag{14}$$
$$= \left| Z_m Z_n''' - Z_n Z'''_m - Z_m' Z_n'' + Z_n' Z_m'' - \frac{P_p}{EJ} Z_m Z_n'' + \frac{P_p}{EJ} Z_n Z_m' \right|_0^L .$$

Следует отметить, что если сила тяжести не действует на отрезке монорельса [0, L], то собственные функции будут ортогональными. При этом будет $\int_0^L Z_n Z_m dx = 0.$ Если на рассматриваемым участке монорельса действует сила тяжести, то $\int_0^L Z_n Z_m dx \neq 0$ и собственные функции будут ортогональными с весом $\rho(x)$.

Определим интеграл квадрата нормы собственных функций $\int_L Z^2 dx.$ Для этого значение n должно стремиться к m. На основании этого записать $k_n = k_m + \delta_k$ и $Z_n = Z_m + \frac{\partial Z_m}{\partial k_0}\delta k_0$.

Аналогично (6) введем обозначение

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = k_0 Z'; \quad \frac{\partial Z}{\partial k_0} = xZ'; \; Z' = \frac{dZ}{dy}; \quad y = k_0 x.$$

Если в (14) подставить эти обозначения и учесть, что $k_n^4 = k_m^4 + 4k_m^2 \delta k_o$, то можно получить

$$\int_0^L Z^2 dx = \frac{1}{4k_0}\left(3ZZ''' + k_0 x\left(Z^2 - 2Z'Z''' + \left(Z''\right)^2\right) - Z'Z''\right)\Big|_0^L + \\ + \frac{P_p}{4k_0^3 EJ}\left(k_o x\left(\left(Z'\right)^2 - ZZ''\right) - ZZ'\right)\Big|_0^L. \quad (15)$$

На основании этого интеграл квадрата нормы собственных функций будет

$$\Delta_n^2 = \int_0^L \rho(x) Z_n Z_m dx \quad (16)$$

В случае возникновения поперечных колебаний при действии растягивающей силы, выражение (1) приобретает вид

$$\frac{EJ}{\rho_\gamma L}\cdot\frac{\partial^4 z(x,t)}{\partial x^4} - \frac{P_p}{\rho_\gamma L}\cdot\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2} = \\ = \frac{q(x,t)}{\rho_\gamma L} = f(x,t). \quad (17)$$

Для однородных условий $z(x,t) = \dot{z}(x,t) = 0$, решение выражения (17) можно получить, используя собственные функции

$$z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(t) Z_n(x).$$

После подстановки имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{EJ}{\rho_\gamma L}k_0^4 - \frac{P_p}{\rho_\gamma L}k_0^2\right)\omega_n(t) + \ddot{\omega}_n(t)\right)Z_n(x) = \\ = f(x,t). \quad (18)$$

Из этого выражения видно, что функция $f(x,t) = \frac{q(x,t)^2}{\rho_\gamma L}{}_o$ может быть разложена в ряд Фурье. После преобразований и интегрирования получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ddot{\omega}_n(t) + \omega_0^2\omega_n(t)\right)\int_0^L Z_n(x)\rho(x)Z_m(x)dx = \\ = \int_0^L f(x,t)\rho(x)Z_n(x)dx, \quad (19)$$

где $\omega_0^2 = \frac{k_0^2}{\rho_\gamma L}\left(k_o^2 EJ - P_p\right)$.

Выражение (19) с учетом (16) можно записать

$$\ddot{\omega}_n(t)+\omega_0^2\omega_n(t)=f_n(t), \qquad (20)$$

где $f_n(t)=\dfrac{1}{\rho_\gamma L\Delta_n^2}\int\limits_0^L q(x,t)\rho(x)Z_n(x)dx.$

Решение уравнения (20) будет

$$Z(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Z_n(x)}{\rho_\gamma L\omega_0\Delta_n^2}\int\limits_0^L\rho(x)Z_m(x)dx\int\limits_0^L q(x,\tau)\sin\omega_0(t-\tau).$$

Выводы. Полученные зависимости, устанавливающие взаимосвязь между поперечными колебаниями монорельса при действии на него продольных сил будут использоваться для обоснованного выбора параметров монорельсовых дорог. В дальнейшем планируется провести теоретические исследования с учетом инерции и инерционных колебаний монорельсового поезда, обусловленных действием возмущений от неровностей пути.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шевченко Ф.Л. Упрощенный расчет стержневых систем ступенчато-переменного сечения на продольные колебания как систем с распределенными параметрами / Ф.Л. Шевченко // Наукові праці ДонНТУ. Серія: “Машинобудування і машинознавство”. Вип. 5(139). – Донецьк, 2008. – С. 166–179.

2. Прочность, устойчивость, колебания: справочник: в 3 т. Т. 3 / В.В. Болотин, А.С. Вольмир, М.Ф. Диментберг и др. ; под общ. ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко; редкол.: С.А. Амбарцумян и др. - М.: Машиностроение, 1968. – 567с.

3. Улитин Г.М. К теории колебаний стержневых систем ступенчато-переменной жесткости / Г.М. Улитин // Полтава: ПлтНТУ, 2005. – 279-283.

4. Шевченко Ф.Л. Упрощенный динамический расчет стержневых систем с распределенными параметрами / Ф.Л. Шевченко // Український міжвідомчий науково-технічний збірник. Автоматизація виробничих процесів та приладобудування. Вип. 40. – Львів, 2006. – С. 286-396.

5. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко. – М.: Наука, 1967. – 42.

6. Шевченко Ф.Л. Динамика упругих стержневых систем / Ф.Л. Шевченко, - Донецк: ООО «Лебедь», 1999. –268с.

7. Шевченко Ф.Л. Будівельна механіка. Спеціальний курс. Динаміка пружних стержньових систем. – Донецьк, РІА ДонНТУ, 2000. – 292 с.