

---

---

# ПРИБОРЫ И СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

---

---

УДК 62-506

О. Ю. КАМКИН, О. А. РЕМИЗОВА, В. В. СЫРОКВАШИН, А. Л. ФОКИН

## РОБАСТНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ МНОГОМЕРНОГО ЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ ПО УПРАВЛЕНИЯМ

Синтезирован робастный регулятор невысокого порядка для многомерного объекта с запаздыванием и параметрической неопределенностью, а также неопределенностью в задании величины запаздывания. Регулятор получен с использованием алгоритма Неванлинны—Пика.

*Ключевые слова:* неопределенность, робастность, многомерный объект, динамический компенсатор, алгоритм Неванлинны—Пика, неминимально-фазовое звено, точность.

**Введение.** Проектирование многомерной системы с запаздываниями относится к классу не решенных задач теории управления, хотя этой проблематике посвящено значительное число работ [1—8]. Синтез системы усложняет наличие перекрестных связей в объекте, которые не позволяют обеспечить достаточный запас устойчивости и хорошие показатели точности.

Теоретически для обеспечения робастной стабилизации можно использовать любые известные методы оптимального робастного управления многомерным объектом. Но на практике это невозможно из-за наличия неопределенных величин запаздываний, неопределенности в выборе параметров минимизируемого функционала качества, высокого порядка передаточных функций получающихся регуляторов.

Проблема учета неопределенных величин запаздывания решалась в работах [9, 10]. Рассмотренные в них методы хорошо работают для объектов с одним входом и одним выходом, но в многомерном случае это приводит к регуляторам больших размерностей. Целью настоящей статьи является разработка метода синтеза робастной системы невысокого порядка для управления многомерным объектом. При этом для широкого применения процедура синтеза должна быть максимально упрощенной. В статье развиваются методы [9, 10], при этом учитывается связанность каналов управления.

**Постановка задачи.** Рассмотрим многомерный объект

$$y(p) = W_0(p)u(p), \quad (1)$$

где  $W_0(p)$  —  $(m \times m)$ -матрица передаточных функций,  $y(p), u(p)$  —  $m$ -мерные векторы,  $p$  — комплексная переменная.

В развернутом виде модель (1) будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} y_1(p) \\ y_2(p) \\ \vdots \\ y_m(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11}(p) & W_{12}(p) & \dots & W_{1m}(p) \\ W_{21}(p) & W_{22}(p) & \dots & W_{2m}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{m1}(p) & W_{m2}(p) & \dots & W_{mm}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(p) \\ u_2(p) \\ \vdots \\ u_m(p) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$W_{ij}(p) = W'_{ij}(p) \exp(-\tau_{ij}p)$  — передаточные функции, связывающие управление  $u_j(p)$  с выходным сигналом  $y_i(p)$ ,  $\tau_{ij}$  — величина запаздывания в канале  $(i, j)$ .

Из теории управления [11] известно, что качество многомерной системы тем выше, чем точнее она обрабатывает входной сигнал  $g_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , для каждой выходной величины  $y_i(t)$  и чем меньше при этом влияние управления  $u_i(t)$  на другие выходные переменные.

Идеальной является автономная система, в которой за счет компенсации перекрестных связей исключается взаимное влияние отдельных каналов друг на друга. Для создания такой системы используют компенсатор на входе объекта так, чтобы выполнялось условие

$$W_o(p)W_k(p) = \text{diag } W_o(p) = \text{diag} \{W_{11}(p), W_{22}(p), \dots, W_{mm}(p)\}, \quad (3)$$

где  $W_k(p)$  — передаточная матрица компенсатора.

Из условия (3) получаем передаточную матрицу компенсатора

$$W_k(p) = W_o^{-1}(p) \text{diag } W_o(p). \quad (4)$$

К сожалению, возможности применения формулы (4) ограничены неточным знанием передаточных функций, наличием неустойчивых и неминимально-фазовых звеньев, требованием физической реализуемости, наличием запаздываний в (2). Поэтому в рамках компенсационного подхода лучше использовать метод [12], который не предполагает обращения матрицы в (1). Структурная схема метода для  $m = 2$  приведена на рис. 1.

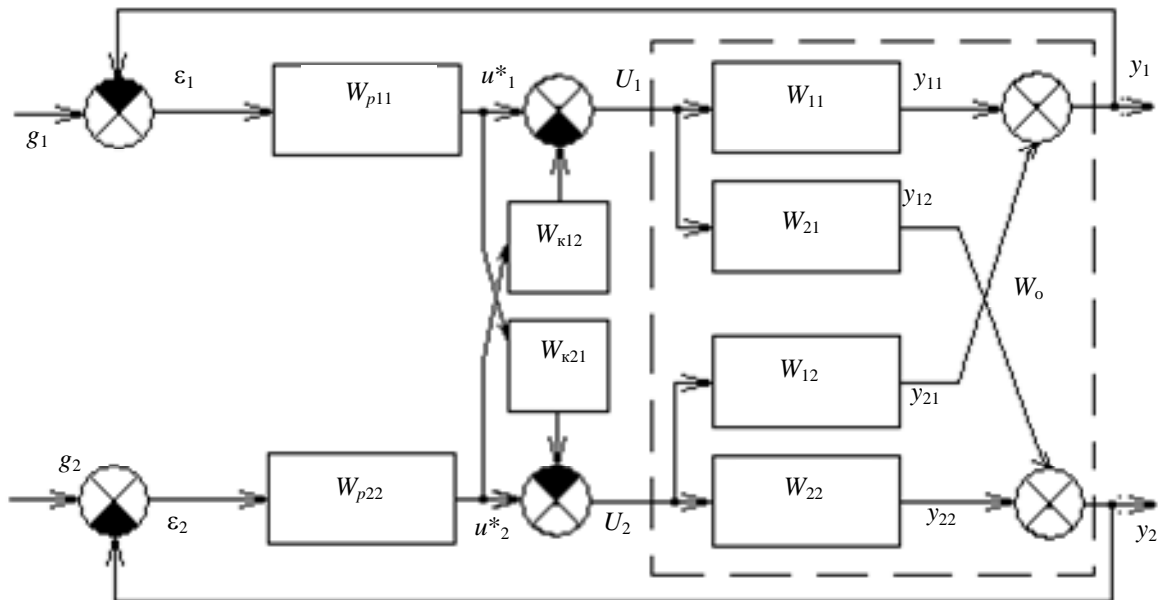


Рис. 1

Управления (2) имеют вид

$$u_i(p) = W_{pii}(p)\varepsilon_i(p) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m W_{kij}(p)u^*_j(p), \quad i = 1, \dots, m, \quad (5)$$

где  $\varepsilon_i$  — сигнал рассогласования, первое слагаемое  $u_i(p) = W_{pii}(p)\varepsilon_i(p)$  — управление по отклонению в  $i$ -м контуре, а второе слагаемое предназначено для компенсации перекрестных связей.

Такой подход применим, если диагональные передаточные функции  $W_{ii}(p)$  являются устойчивыми и минимально-фазовыми, кроме того, должно выполняться условие

$$\Delta\tau_{ij} = \tau_{ij} - \tau_{ii} \geq 0. \quad (6)$$

Выполнение этих условий является достаточным для „развязывания“ каналов управления многомерным объектом. Использование робастных регуляторов  $W_{pii}(p)$  обеспечивает робастность всей многомерной системы в тем большей степени, чем полней компенсация перекрестных связей.

Если условие (6) не выполняется, то при синтезе компенсатора требуется решать задачу прогноза. В настоящей работе с этой целью используется алгоритм Неванлинны—Пика [11].

Если не выполняются условия устойчивости и минимальной фазовости для некоторых передаточных функций  $W_{ii}(p)$ , то метод компенсации неприменим. В этом случае управление реализуется в соответствии с децентрализованным подходом [1].

**Основной результат.** Если  $W_{ii}(p)$  — устойчивые и минимально-фазовые диагональные передаточные функции, то передаточные функции робастных регуляторов  $W_{pii}(p)$  без учета перекрестных связей наиболее просто получаются при помощи метода динамической компенсации в классе систем, субоптимальных по критерию апериодической устойчивости [9].

Если выполняется условие (6), то задача построения передаточной функции компенсатора перекрестной связи  $W_{ij}(p)$  решается по упрощенной методике

$$W_{kij}(p) = W_{ii}^{-1}(p)W_{ij}(p). \quad (7)$$

Передаточная функция (7) содержит звено запаздывания на время  $\Delta\tau_{ij} \geq 0$ . Если в (7) не выполняется условие физической реализуемости, то для обеспечения правильности передаточной функции  $W_{kij}(p)$  в знаменатель вводятся малые постоянные времени. Если значения коэффициентов передачи в перекрестных связях  $W_{ij}(p)$  невелики, то звено запаздывания в  $W_{kij}(p)$  для обеспечения грубости лучше всего аппроксимировать рядом Паде первого порядка; если велики, то для аппроксимации лучше использовать звено, которое при  $t = 0$  имеет коэффициент передачи, равный нулю:

$$\exp(-\tau p) = \frac{1}{\exp(\tau p)} = \frac{1}{[\exp(\tau p/k)]^k} \approx \frac{1}{\left[1 + \frac{\tau p/k}{1!} + \dots + \frac{(\tau p/k)^l}{l!}\right]^k}, \quad (8)$$

где  $l$  — число членов разложения,  $k$  — натуральное число.

Если условие (6) не выполняется, то для построения компенсирующей связи можно решить задачу минимизации  $H^\infty$ -нормы

$$\min \left\| W_{ii}(j\omega)W_{kij}(j\omega) - W_{ij}(j\omega) \right\|_\infty. \quad (9)$$

При  $T_1 = W_{ij}(j\omega)$ ,  $T_2 = W_{ii}(j\omega)$ ,  $Q = W_{kj}(j\omega)$  задача (9) является задачей построения модели (model matching problem), известной из  $H^\infty$ -теории управления [11], которая решается при помощи алгоритма Неванлинны—Пика. Требуется найти такое значение  $Q$ , чтобы выполнялось неравенство

$$\|T_1 - T_2 Q\|_\infty \leq \gamma, \quad (10)$$

где  $\gamma > 0$  — максимально допустимая ошибка решения.

Будем искать передаточную функцию компенсатора следующим образом:

$$W_{kij}(p) = [W'_{ii}(p)]^{-1} W'_{ij}(p) W'_{kj}(p), \quad (11)$$

где  $W'_{kj}(p)$  — передаточная функция прогноза на время  $\Delta\tau_{ij}$ , которую нужно определить из условия

$$W'_{kj}(p) \exp(-\Delta\tau_{ij} p) = 1. \quad (12)$$

Для определения  $W'_{kj}(p)$  примем:  $T_1 = 1$ ,  $T_2 = \exp(-\Delta\tau_{ij} p)$ ,  $Q = W'_{kj}(j\omega)$ . Тогда задав значения  $\gamma > 0$  в (10), можно решить задачу построения модели в соответствии со следующим алгоритмом [11].

1. Определяются нули  $T_2$  в открытой правой полуплоскости. Введя аппроксимацию Паде

$$\exp(-\Delta\tau_{ij} p) \approx \frac{1 - \Delta\tau_{ij} p/2}{1 + \Delta\tau_{ij} p/2}, \quad (13)$$

получим только один правый нуль  $T_2$ , равный  $z_1 = 2/\Delta\tau_{ij} > 0$ .

2. Определяется единственное значение  $c_1 = T_1(z_1) = 1$ .

3. Формируются эрмитовы матрицы  $A, B$  вида

$$A = \{(a_v + \bar{a}_q)^{-1}\}, \quad B = \{c_v \bar{c}_q / (a_v + \bar{a}_q)\}, \quad (14)$$

где  $a_v = z_v$ , черта сверху означает комплексно-сопряженное число.

В данном случае число правых нулей  $T_2$  равно единице, поэтому матрицы  $A, B$  являются вещественными числами, так как  $z_1$  — вещественно. Они имеют вид

$$A = B = \Delta\tau_{ij}/4. \quad (15)$$

4. Определяется наибольшее (в данном случае единственное) собственное число матрицы  $A^{-1/2} B A^{-1/2}$ : оно равно  $\gamma_{\text{opt}} = B/A = 1$ . По теореме Пика  $\gamma \geq \gamma_{\text{opt}}$ .

5. Задается величина  $\gamma = 1,01 > \gamma_{\text{opt}}$ , здесь  $a_1 = z_1, b_1 = c_1/\gamma$ . Функция полного пропуска будет

$$A_{a_1}(s) = \frac{s - a_1}{s + \bar{a}_1}.$$

6. Вычисляется обратная функция Мебиуса

$$M^{-1}(z) = \frac{z + b_1}{1 + z \bar{b}_1} = \frac{z + b_1}{1 + z b_1}.$$

Решение задачи Неванлинны—Пика для одной точки задается множеством передаточных функций вида

$$G(p) = M^{-1} [G_1(p) A_{a_1}(p)], \quad (16)$$

где  $G_1(p)$  — произвольная правильная дробно-рациональная передаточная функция с комплексными коэффициентами,  $\|G_1\|_\infty \leq 1$ .

7. Поскольку в этой задаче в качестве исходных имеется всего одна точка, решение может быть получено в виде

$$W'_{kij} = Q = \frac{T_1 - \gamma G}{T_2}. \quad (17)$$

Если некоторые из передаточных функции диагональных элементов не являются устойчивыми или минимально-фазовыми, то компенсация перекрестных связей, действующих на выход этих диагональных элементов, не производится. Соответствующая передаточная функция робастного регулятора  $W_{pii}(p)$  может быть определена методом  $H^2$ -оптимального управления по методике работы [10]. Влияние перекрестных связей для этого элемента не учитываются.

**Пример.** Рассмотрим в качестве примера передаточную матрицу дистилляционной колонны [13]

$$W_o(p) = \begin{bmatrix} \frac{0,66 \exp(-2,6p)}{6,7p+1} & -\frac{0,61 \exp(-3,5p)}{8,64p+1} & -\frac{0,0049 \exp(-p)}{9,06p+1} \\ \frac{1,11 \exp(-6,5p)}{3,25p+1} & -\frac{2,36 \exp(-3p)}{5p+1} & -\frac{0,01 \exp(-1,2p)}{7,09p+1} \\ -\frac{34,68 \exp(-9,2p)}{8,15p+1} & \frac{46,2 \exp(-9,4p)}{10,9p+1} & \frac{0,87(11,61p+1) \exp(-p)}{(3,89p+1)(18,8p+1)} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Передаточные функции регуляторов по отклонению [9] имеют вид

— ПИ законы

$$W_{p11}(p) = \frac{0,343}{2,6 \cdot 0,66} \frac{6,7p+1}{p}, \quad W_{p22}(p) = -\frac{0,343}{3 \cdot 2,36} \frac{5p+1}{p};$$

— ПИД закон

$$W_{p33}(p) = \frac{0,343}{0,87} \frac{(3,89p+1)(18,8p+1)}{p(11,61p+1)}. \quad (19)$$

Компенсирющие связи, для которых выполняется условие (6), в соответствии с формулой (7) при аппроксимации Паде первого порядка будут

$$W_{k12}(p) = \frac{0,61}{0,66} \frac{6,7p+1}{8,64p+1} \exp(-0,9p) \approx \frac{0,61}{0,66} \cdot \frac{6,7p+1}{8,64p+1} \cdot \frac{1-0,45p}{1+0,45p},$$

$$W_{k21}(p) = \frac{1,11}{2,36} \frac{5p+1}{3,25p+1} \exp(-3,5p) \approx \frac{1,11}{2,36} \cdot \frac{5p+1}{3,25p+1} \cdot \frac{1-1,75p}{1+1,75p}.$$

В соответствии с формулой (8) при  $l = 3$  и  $k = 2$

$$W_{k31}(p) = \frac{34,68}{0,87} \cdot \frac{3,89p+1}{8,15p+1} \cdot \frac{18,8p+1}{11,61p+1} \cdot \frac{1}{(11,487p^3 + 8,4p^2 + 4,1p+1)^2},$$

$$W_{к32}(p) = -\frac{46,2}{0,87} \cdot \frac{3,89p+1}{10,9p+1} \cdot \frac{18,8p+1}{11,61p+1} \cdot \frac{1}{(12,348p^3 + 8,82p^2 + 4,2p+1)^2}.$$

Для перекрестных связей  $W_{13}(p)$  и  $W_{23}(p)$  условие (6) не выполняется и решение ищется по формулам (13)—(17):

$$W_{к23}(p) = -\frac{0,01}{2,36} \frac{5p+1}{7,09p+1} W'_{к23}(p),$$

где  $W'_{к23}(p)$  определялась по алгоритму Неванлинны—Пика при  $G_1(p) = 0,1$ :

$$W'_{к23}(p) = \frac{1,98p^2 + 4p + 2}{0,9891p^2 + 2p + 1,001}, \quad (20)$$

$$W_{к13}(p) = \frac{0,0049}{0,66} \frac{6,7p+1}{9,06p+1} W'_{к13}(p).$$

Здесь

$$W'_{к13}(p) = \frac{1,76p^2 + 4p + 2,25}{0,8792p^2 + 2p + 1,126} \quad (21)$$

определяется аналогично.

Из формул (20), (21) видно, что  $W'_{к23}(0) \neq 1$ ,  $W'_{к13}(0) \neq 1$ . Этот недостаток алгоритма Неванлинны—Пика следует из самой постановки задачи (10), при которой не требуется точного равенства  $T_1$  и  $T_2Q$  в статике. Но для практического применения метода это необходимо. Поэтому далее формулы (20), (21) модифицируются:

$$W'_{к23}(p) = \frac{1,98p^2 + 4p + \beta_1}{0,9891p^2 + 2p + \beta_1}, \quad W'_{к13}(p) = \frac{1,76p^2 + 4p + \beta_2}{0,8792p^2 + 2p + \beta_2},$$

где  $\beta_1, \beta_2 > 0$  — настраиваемые параметры.

На рис. 2 показаны переходные характеристики системы относительно возмущений на входе при  $\beta_1 = \beta_2 = 7$  ( $a$  —  $y_1(t)$ ;  $b$  —  $y_2(t)$ ). Невысокое качество стабилизации  $y_3$  (рис. 2,  $e$ ) обусловлено большими коэффициентами передачи в  $W_{31}(p)$  и  $W_{32}(p)$ . Для того чтобы продемонстрировать синтез при наличии неустойчивых диагональных элементов, модифицируем задачу и будем рассматривать

$$W_{33}(p) = \frac{0,87(1+11,61p)\exp(-p)}{(3,89p+1)(1-18,8p)}. \quad (22)$$

Тогда  $H^2$ -оптимальный робастный регулятор, синтезированный по методу [10], будет иметь передаточную функцию

$$W_{p33}(p) = -\frac{12,8p^6 + 37,8p^5 + 29,3p^4 + 10p^3 + 1,69p^2 + 0,135p + 0,00385}{0,87p^7 + 10,1p^6 + 16,4p^5 + 8,3p^4 + 1,8p^3 + 0,18p^2 + 0,00664p}.$$

Соответствующая переходная характеристика для  $y_3$  показана на рис. 2,  $z$ . Видно, что без компенсаторов амплитуды колебаний увеличились. Для выходов  $y_1$  и  $y_2$  переходные характеристики изменяются незначительно.

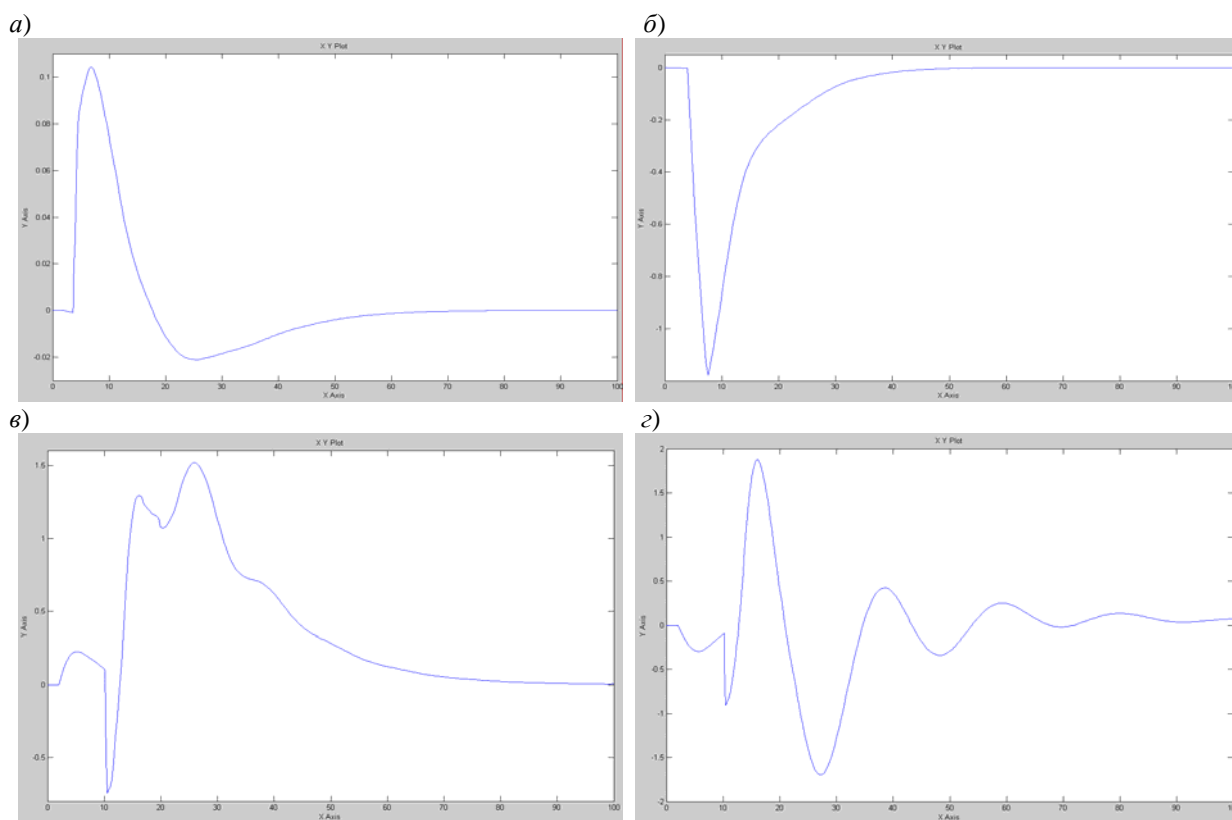


Рис. 2

**Заключение.** В работе построена методика синтеза робастных систем управления многомерным объектом с запаздыванием и параметрической неопределенностью и неопределенностью задания величины запаздывания. Задача решается методом компенсации перекрестных связей с использованием алгоритма Неванлинны—Пика. При наличии неустойчивых диагональных элементов для них используется децентрализованная стратегия управления.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Luyben W. L. Simple method for tuning SISO controllers in multivariable systems // *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.* 1986. Vol. 25. P. 654—660.
2. Shen S. H., Yu C. C. Use of relay-feedback test for automatic tuning of multivariable systems // *AIChE J.* 1994. Vol. 40 (4). P. 627—646.
3. Bao J., Forbes J. F., McLellan P. J. Robust multiloop PID controller design: a successive semidefinite programming approach // *Ind. Eng. Chem. Res.* 1999. Vol. 38. P. 3407—3419.
4. Vlachos C., Williams D., Gomm J. B. Genetic approach to decentralised PI controller tuning for multivariable processes // *IEEE Proc. Control Theory Appl.* 1999. Vol. 146, N 58. P. 58—64.
5. Hovd M., Skogestad S. Improved independent design of robust decentralized controllers // *J. of Process Control.* 1993. Vol. 3, N 43.
6. Xiong Q., Cai W.-J. Effective transfer function method for decentralized control system design of multi-input multi-output processes // *J. of Process Control.* 2006. Vol. 16. P. 773—784.
7. Xiong Q., Cai W.-J., He M.-J. Equivalent transfer function method for PI/PID controller design of MIMO processes // *J. of Process Control.* 2007. Vol. 17. P. 665—673.
8. Kariwala V. Fundamental limitation on achievable decentralized performance // *Automatica.* 2007. Vol. 43. P. 1849—1854.
9. Ремизова О. А., Рудакова И. В., Сыроквашин В. В., Фокин А. Л. Увеличение робастности оптимальных систем с запаздыванием // *Изв. СПбГТИ(ТУ).* 2011. № 10. С. 46—51.

10. Ремизова О. А., Рудакова И. В., Сыроквашин В. В., Фокин А. Л. Робастное управление линейным объектом с запаздыванием с применением квадратичных методов синтеза системы // Изв. вузов. Приборостроение. 2011. Т. 54, № 12. С. 22—30.
11. Методы классической и современной теории автоматического управления. Т. 3. Синтез регуляторов систем автоматического управления / Под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егунова. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 616 с.
12. Дудников Е. Г. Автоматическое управление в химической промышленности. М.: Химия, 1987. 368 с.
13. Спорягин К. В. Математическое моделирование, разработка методов и программного комплекса для настройки параметров типовых законов регулирования динамических систем с запаздыванием: Дис. ... канд. техн. наук. СПб: СПбГПУ, 2010. 237 с.

#### Сведения об авторах

**Олег Юрьевич Камкин**

— аспирант; Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет), кафедра автоматизации процессов химической промышленности;  
E-mail: iluckyi@mail.ru

**Ольга Александровна Ремизова**

— канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет), кафедра автоматизации процессов химической промышленности;  
E-mail: remizova-oa@yandex.ru

**Владислав Викторович Сыроквашин**

— канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет), кафедра автоматизации процессов химической промышленности

**Александр Леонидович Фокин**

— д-р техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет), кафедра автоматизации процессов химической промышленности;  
E-mail: fokin\_sa@mail.ru

Рекомендована кафедрой  
автоматизации процессов  
химической промышленности

Поступила в редакцию  
24.05.12 г.

УДК 519.271

В. Н. АРСЕНЬЕВ, А. С. ФАДЕЕВ

## МЕТОДИКА ПРОВЕРКИ СООТВЕТСТВИЯ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЗАДАННЫМ ТРЕБОВАНИЯМ ПО ОГРАНИЧЕННОМУ ЧИСЛУ ИСПЫТАНИЙ

Рассматривается задача проверки соответствия характеристик системы управления объекта требованиям технического задания при ограниченном числе опытных образцов. Показано, что эта задача может быть сведена к задаче проверки многомерной статистической гипотезы о параметрах распределений. Предложена методика ее приближенного решения, позволяющая повысить достоверность принимаемых решений о соответствии или несоответствии различных характеристик системы управления требованиям технического задания при ограниченном числе натурных испытаний.

**Ключевые слова:** система управления, натурные испытания, надежность, гипотеза, отношение правдоподобия.

**Введение.** Для решения широкого круга задач в различных областях теоретической и практической деятельности активно используются управляемые объекты (ОУ). Возможность решения этих задач во многом зависит от качества функционирования системы управления