Оптимальные и робастные системы управления

Е.И.Веремей. "Введение в анализ и синтез робастных систем управления"

Важнейшей проблемой, которой посвящены три пакета прикладных программ (ППП) системы Matlab, входящие в группу "**Оптимальные и робастные системы управления**" (Robust Control, μ-Analysis and Synthesis и LMI Control), является ***проблема робастности систем управления***. В широком понимании ее существо составляет изучение вопроса о сохранении определенных свойств системы при возможных вариациях некоторых ее характеристик или условий функционирования.

В настоящее время опубликовано большое количество научных работ, посвященных теме робастности. Несмотря на наличие значительного числа предшествующих результатов, основополагающим утверждением, определившим возникновение теории робастности, является ***теорема Харитонова***, впервые сформулированная в работе [1].

В рассматриваемых ППП представлен инструментарий для анализа и синтеза систем, отражающий три похода из ряда современных направления в развитии теории робастности. Исторически первый из них связан с именами M. Safonov, M. Athans – он базируется на введенном в работе [2] понятии ***многомерной границы устойчивости (MSM)***. Основоположником второго подхода является J. Doyle [3], предложивший концепцию ***структурированного сингулярного числа*** **μ**. И, наконец, третий подход связан с применением ***линейных матричных неравенств*** в теории управления – подробное рассмотрение вопроса и библиография даны в работе [4].

Несмотря на наличие определенных существенных отличительных особенностей, идеология всех трех подходов основывается на целом ряде общих положений, которым посвящена данная статья.

Прежде всего, дадим общее понятие робастных свойств линейных систем. Рассмотрим замкнутую линейную систему управления, представленную в виде блок-схемы на рис. 1. На этом рисунке $\mathbf{T}(s,\Delta)$, $\mathbf{K}(s)$ и $\mathbf{H}(s,\mathbf{K},\Delta)$ – передаточные матрицы объекта, регулятора и замкнутой системы $\mathbf{e} = \mathbf{H}(s,\mathbf{K},\Delta)\mathbf{d}$ соответственно. Символом Δ обозначена передаточная матрица той части объекта управления, которая представляет ***неопределенность в задании его математической модели***. Относительно матрицы $\Delta(s)$ известно лишь то, что она принадлежит некоторому заданному множеству: $\Delta(s) \in \mathbf{D}$.

Введем в рассмотрение характеристический полином $\delta(s,\mathbf{K},\Delta)$ замкнутой системы, зависящий от выбора регулятора и конкретной реализации неопределенности. Пусть n_3 – его степень, а $\delta_i = \delta_i(\mathbf{K},\Delta)$, где $i = \overline{1,n_3}$, – корни, которые для работоспособной системы должны находиться в открытой левой полуплоскости $\mathbf{C}^-$ на плоскости корней.

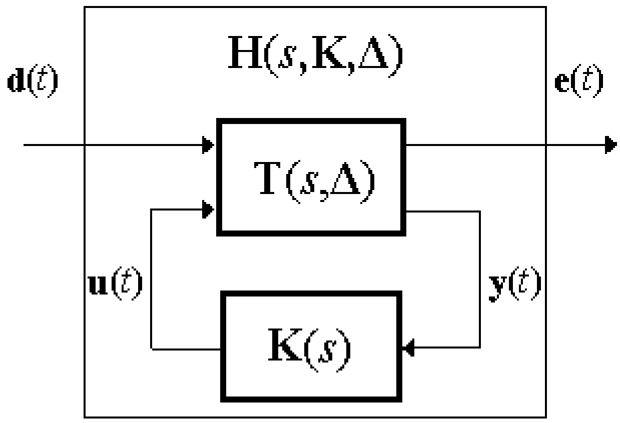

Рис. 1.

Определение 1. *Будем говорить, что замкнутая система* $\mathbf{e} = \mathbf{H}(s, \mathbf{K}, \Delta)\mathbf{d}$ ***обладает свойством робастной устойчивости (является робастно устойчивой)*** *по отношению к неопределенности* $\Delta(s)$*, если для любой* $\Delta(s) \in \mathbf{D}$ *выполняется условие* $\delta_i(\mathbf{K}, \Delta) \in \mathbf{C}^-$*,* $i = \overline{1, n_3}$*. В этом случае будем говорить, что регулятор* $\mathbf{u} = \mathbf{K}(s)\mathbf{y}$ ***обеспечивает робастную устойчивость*** *замкнутой системы.*

Введем в рассмотрение некоторый функционал $J = J(\mathbf{H}(s, \mathbf{K}, \Delta))$, характеризующий качество функционирования системы. При фиксированном регуляторе этот функционал отображает множество $\mathbf{D}$ неопределенностей на множество $\mathbf{I} = J(\mathbf{H}(s, \mathbf{K}, \mathbf{D})) \in \mathbf{E}^1$ числовой оси.

Определение 2. *Будем говорить, что замкнутая система* $\mathbf{e} = \mathbf{H}(s, \mathbf{K}, \Delta)\mathbf{d}$ ***обладает определенным робастным качеством****, если она является робастно устойчивой по отношению к неопределенности* $\Delta(s)$*, и если справедливо включение* $\mathbf{I} \subset \Re \subset \mathbf{R}^1$*, где* $\Re$ *– допустимое множество значений рассматриваемого функционала. В этом случае будем говорить, что регулятор* $\mathbf{u} = \mathbf{K}(s)\mathbf{y}$ ***обеспечивает определенное робастное качество*** *замкнутой системы.*

Проиллюстрируем понятие ***робастной устойчивости*** для систем с ***неструктурированными неопределенностями*** (не моделируемой динамикой). Наиболее просто это можно сделать на примере SISO-объекта управления со скалярным входом $u \in \mathbf{E}^1$ и выходом $y \in \mathbf{E}^1$, которые связаны между собой уравнением

$$y = P_n(s)u. \quad (1)$$

Здесь $P_n(s)$ – номинальная передаточная функция.

Будем считать, что объект с математической моделью (1) стабилизируется регулятором

$$u = -K(s)y \quad (2)$$

с передаточной функцией $K(s)$, обеспечивающей гурвицевость характеристического полинома замкнутой системы (1), (2).

В дальнейшем будем полагать, что передаточная функция $K(s)$ регулятора не изменяется в процессе функционирования, а передаточная функция $P_n(s)$ объекта подвергается воздействию неструктурированных возмущений (непараметрического типа). В результате подобного воздействия, регулятор (2) фактически замыкает не объект с моделью (1), а другой объект:

$$y = P(s)u \text{ , (3)}$$

передаточная функция $P(s)$ которого отличается от номинальной. Заметим, что при этом как структура (степени полиномов в числителе и знаменателе), так и коэффициенты передаточной функции $P(s)$ ***не определены***, что порождает типичную ситуацию, рассматриваемую в теории робастного управления.

В связи с наличием указанной неопределенности неструктурированного типа, возникают два естественных вопроса, ответы на которые позволяют оценивать качество стабилизирующего регулятора (2) в плане допустимости неконтролируемых вариаций математической модели объекта:

- **будет ли сохраняться устойчивость замкнутой системы при условии, что возмущение передаточной функции объекта находятся в заданных границах;**
- **каковы предельно допустимые границы изменения возмущений, которые не приводят к потере устойчивости.**

Поставленные вопросы относятся к области анализа меры робастной устойчивости линейных динамических систем. С целью формализации дальнейшего рассмотрения проблемы, введем ряд понятий, позволяющих количественно характеризовать возмущения математических моделей вида (1).

Определение 2.3. ***Абсолютным возмущением*** *математической модели* (1*) или* ***абсолютным возмущением номинальной передаточной матрицы*** $P_n(s)$ *будем называть рациональную дробь* $\Delta_A(s)$ *вида*

$$\Delta_A(s) = P(s) - P_n(s) \text{ . (4)}$$

Соответственно, ***относительным возмущением*** *модели или номинальной передаточной матрицы будем называть рациональную дробь*

$$\Delta_0(s) = \left[P(s) - P_n(s) \right] P_n^{-1}(s) \text{ . (5)}$$

И, наконец, ***взвешенным относительным возмущением*** *модели или номинальной передаточной матрицы (или просто* ***возмущением*** *либо* ***неопределенностью****) будем называть рациональную дробь*

$$\Delta_p(s) = \left[P(s) - P_n(s) \right] \left[P_n(s) W_d(s) \right]^{-1} \text{ , (6)}$$

где $W_d(s)$ *– это заданная весовая дробно рациональная функция.*

Введение весовой функции $W_d(s)$ в определение возмущения (6) модели обусловлено следующими обстоятельствами. Рассмотрим амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) $A_n(\omega) = |P_n(j\omega)|$ и $A(\omega) = |P(j\omega)|$ для номинального и возмущенного объектов соответственно. Введем в рассмотрение допустимую границу возмущения номинальной математической модели, определяя ее ограничением сверху (для каждой частоты) величины модуля относительного изменения АЧХ положительным числом $|W_d(j\omega)|$ (в принципе, это число можно считать заданным в %). Иными словами, введение функции $W_d(s)$ определяет условие

$$\left|\frac{|P(j\omega)| - |P_n(j\omega)|}{P_n(j\omega)}\right| \le |W_d(j\omega)|, \quad \forall \omega \in \mathbf{R}^1 \qquad (7)$$

задающее допустимый "коридор" для вариаций АЧХ фактического (возмущенного) объекта (1), что изображено на рис. 2.

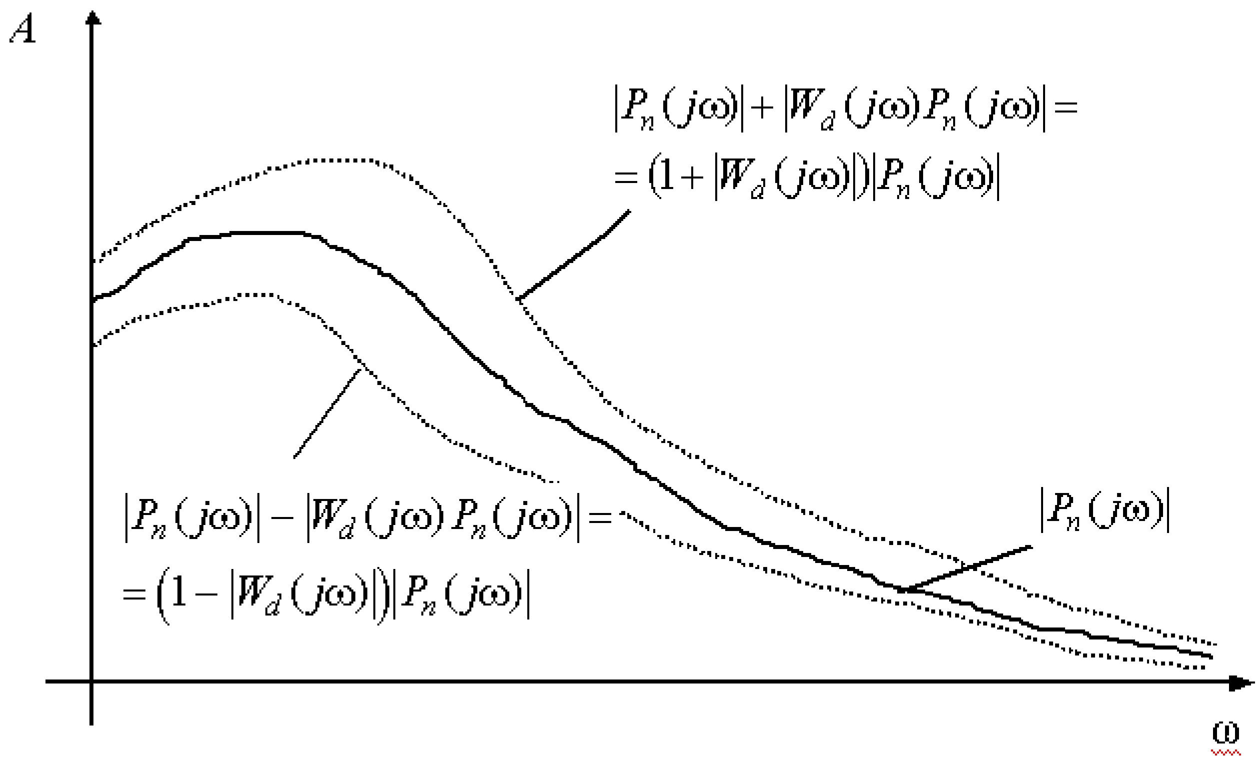

Рис. 2.

Таким образом, функция частоты $|W_d(j\omega)|$ – это относительная ширина допустимого коридора для АЧХ возмущенного объекта.

Заметим, что работать аналитически с условием (7) не вполне удобно. Вместо него можно использовать соотношение вида

$$\left|\frac{P(j\omega) - P_n(j\omega)}{P_n(j\omega)}\right| \le |W_d(j\omega)|, \quad \forall \omega \in \mathbf{R}^1 \qquad (8)$$

которое является более сильным, чем (7), что следует из неравенства

$$\big||P(j\omega)| - |P_n(j\omega)|\big| \le |P(j\omega) - P_n(j\omega)|,$$

справедливого для любых двух комплексных чисел P и P_n. Таким образом, выполнение (8) влечет за собой выполнение (7).

Итак, если задано дробно-рациональное выражение $W_d(s)$ и для всех передаточных функций $P_n(s)$ объектов с возмущенными моделями выполняется условие (8), то согласно (5) будет выполняться неравенство

$$|\Delta_0(j\omega)| \le |W_d(j\omega)| \quad \forall\omega \in \mathbf{R}^1, \quad (9)$$

то есть АЧХ относительного возмущения модели не выйдет за пределы области, указанной на рис. 3.

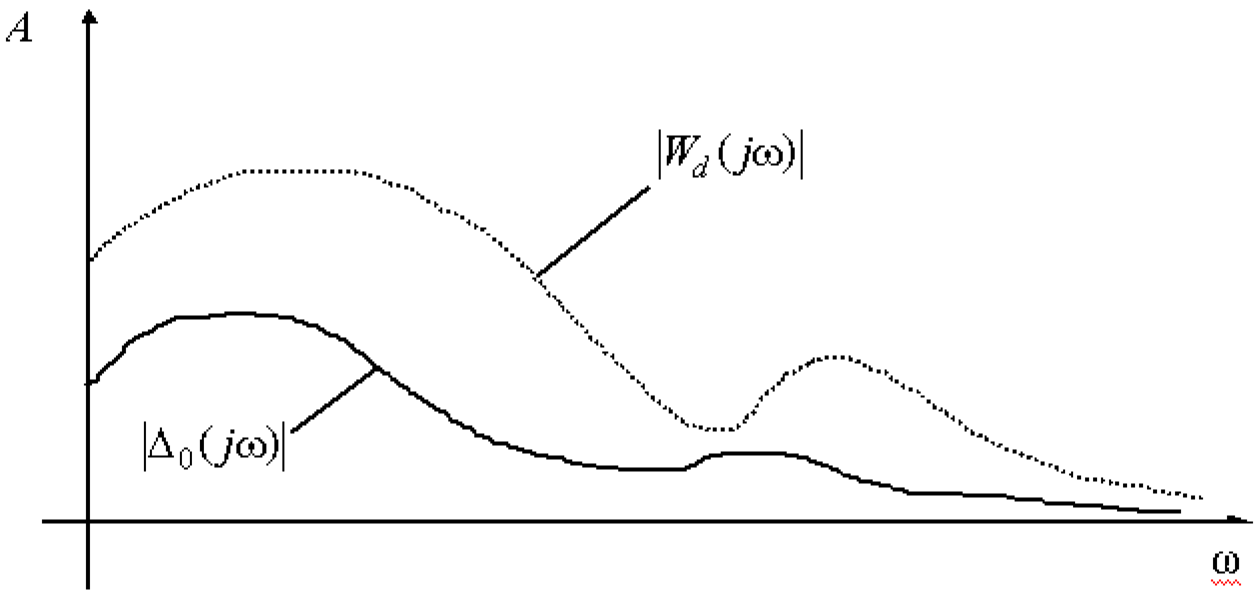

Рис. 3.

Кроме того, согласно формуле (6), для АЧХ взвешенного относительного возмущения Δ_p модели объекта будет выполняться неравенство

$$|\Delta_p(j\omega)| \le 1 \quad \forall\omega \in \mathbf{R}^1, \quad (10)$$

которое можно трактовать, как нормированное ограничение на допустимые вариации модели.

Резюмируя приведенные определения, можно отметить, что если количественная характеристика Δ_p неопределенности математической модели удовлетворяет нормированному условию (10), то это значит, что относительное возмущение Δ_0 модели удовлетворяет ограничению (9) (т.е. соответствует рис. 3.2), а абсолютное возмущение Δ_A удовлетворяет условию

$$|\Delta_A(j\omega)| \le |W_d(j\omega\|P_n(j\omega)|,$$

т.е. АЧХ $|P(j\omega)|$ любой возмущенной модели находится в пределах допустимого коридора на рис. 2.

На базе введенных количественных характеристик, рассмотрим формализованные задачи, решение которых позволит дать ответы на поставленные выше вопросы, относящиеся к сфере анализа робастной устойчивости.

Пусть задана весовая функция $W_d(s)$, а также некоторый регулятор вида (2) с передаточной функцией $K(s)$, который стабилизирует объект с номинальной моделью (1), характеризуемой передаточной функцией $P_n(s)$. Пусть математическая модель объекта подвергается возмущению, относительная взвешенная характеристика $\Delta_p(s)$ которого удовлетворяет неравенству (10). Рассмотрим любой объект с возмущенной моделью, имеющей передаточную функцию

$$P(s) = P_n(s) + \Delta_A(s) = P_n(s) + P_n(s)\Delta_0(s) = P_n(s)\left(1 + \Delta_p(s)W_d(s)\right), \quad (11)$$

вводя тем самым допустимое множество передаточных функций возмущенных моделей вида

$$\mathbf{M} = \left\{ P:\ P = P_n\left(1 + \Delta_p W_d\right),\ \left|\Delta_p(j\omega)\right| \le 1 \quad \forall\omega \in \mathbf{R}^1 \right\}. \quad (12)$$

Дополним определение допустимого множества (12) требованием о том, чтобы при любых рассматриваемых возмущениях Δ_p ***количество полюсов передаточной функции*** $P = P_n\left(1 + \Delta_p W_d\right)$***, находящихся в правой полуплоскости, совпадало с их количеством для номинальной передаточной функции*** P_n.

Поставим вопрос: при каких условиях регулятор $u = -K(s)y$ **будет стабилизировать любой объект с возмущенной моделью** $y = P(s)u$**, если** $P(s) \in \mathbf{M}$**?**

Для ответа на поставленный вопрос, рассмотрим блок-схему замкнутой системы управления с возмущенным объектом, изображенную на рис. 4.

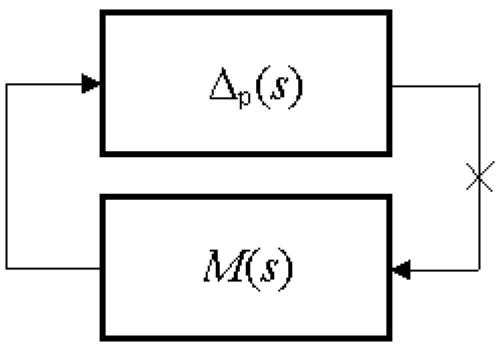

Рис. 4.

Здесь неопределенность, представленная взвешенной относительной характеристикой $\Delta_p(s)$, определенным образом включена в дополнительную обратную связь замкнутой системы (1), (2) с номинальным объектом. Ниже будет показано, как конкретно осуществляется подобное включение.

Рассматривая приведенную на рис. 4 блок-схему, отметим, что одна из центральных идей, на которых основаны методы анализа робастной устойчивости (включая идеи μ - теории), восходит к широко известному критерию Найквиста, на котором базируется известная **теорема о малом коэффициенте усиления** [5]. Приведем ее в следующей интерпретации:

Теорема 1. *Пусть неопределенность* $\Delta_p(s)$ *удовлетворяет условию (10), т.е. принадлежит следующему множеству дробно-рациональных функций* $\mathbf{D} = \left\{ \Delta_p(s) \colon \ \left|\Delta_p(j\omega)\right| \le 1 \quad \forall \omega \in \mathbf{R}^1 \right\}$*. Если объект с передаточной функцией* $M(s)$ *устойчив, однако система с обратной связью, изображенная на схеме, сохраняет устойчивость не для любого возмущения из множества* $\mathbf{D}$*, то найдется такая функция* $\Delta^*_p(s) \in \mathbf{D}$ *и такая частота* $\omega^* \in \mathbf{R}^1$*, что выполнится равенство*

$$1 + \Delta^*_p(j\omega^*) M(j\omega^*) = 0 \quad . (13)$$

Это значит, что годограф Найквиста $F(j\omega) = \Delta^*_p(j\omega) M(j\omega)$ для разорванной цепи рассматриваемой блок-схемы на частоте $\omega = \omega^*$ пройдет через точку $(-1,0)$ на комплексной плоскости.

Следствие из теоремы 1. *С очевидностью справедливо и обратное утверждение: если объект с передаточной функцией* $M(s)$ *устойчив и если для любого возмущения* $\Delta_p(s) \in \mathbf{D}$ *и для любой частоты* $\omega \in \mathbf{R}^1$ *равенство (13) выполнено быть не может, то система, изображенная на рис. 4, не может потерять устойчивость ни при каком возмущении* $\Delta_p(s) \in \mathbf{D}$.

В свою очередь, условие (13) никогда не выполнится, если будет иметь место неравенство

$$\max_{\omega \in \mathbf{R}^1} \left| \Delta_p(j\omega) M(j\omega) \right| < 1 \quad \text{для любого } \Delta_p(s) \in \mathbf{D} \quad . (14)$$

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$m(\omega) = \left| M(j\omega) \right| , (15)$$

а также вспомогательную величину

$$\alpha = \max_{\omega \in \mathbf{R}^1} m(\omega) = \left\| M(s) \right\|_\infty \quad . (16)$$

Поскольку в силу (16) справедливы соотношения

$$\max_{\omega \in \mathbf{R}^1} \left| \Delta_p(j\omega) M(j\omega) \right| \le \max_{\omega \in \mathbf{R}^1} \left| \Delta_p(j\omega) \right| \max_{\omega \in \mathbf{R}^1} \left| M(j\omega) \right| = \max_{\omega \in \mathbf{R}^1} \left| \Delta_p(j\omega) \right| \cdot \alpha \quad ,$$

а из принадлежности $\Delta_p(s) \in \mathbf{D}$ следует, что $\max_{\omega \in \mathbf{R}^1} \left| \Delta_p(j\omega) \right| \le 1$, то условие (14) будет с гарантией выполнено, если имеет место неравенство

$$\alpha = \max_{\omega \in \mathbf{R}^1} m(\omega) = \left\| M(s) \right\|_\infty < 1 \quad (17)$$

(определение $\mathbf{H}_\infty$ нормы приведено в первой вводной статье).

По построению, неравенство (17) является достаточным условием сохранения устойчивости системы, схематически изображенной на рис. 4, для любых возмущений $\Delta_p(s) \in \mathbf{D}$.

Теперь рассмотрим вопрос о конкретизации способа включения относительного возмущения $\Delta_p(s)$ модели в обратную связь, приводящего к блок-схеме представленной на рис. 4.

С этой целью на рис. 5 изображен возможный вариант детальной блок-схемы замкнутой системы (3), (2) с объектом управления, математическая модель которого претерпела возмущение.

Такой вариант соответствует случаю **мультипликативного возмущения модели объекта на его входе**. Замечание: возможны и другие аналогичные схемы введения возмущения модели (мультипликативное возмущение на выходе или аддитивное возмущение).

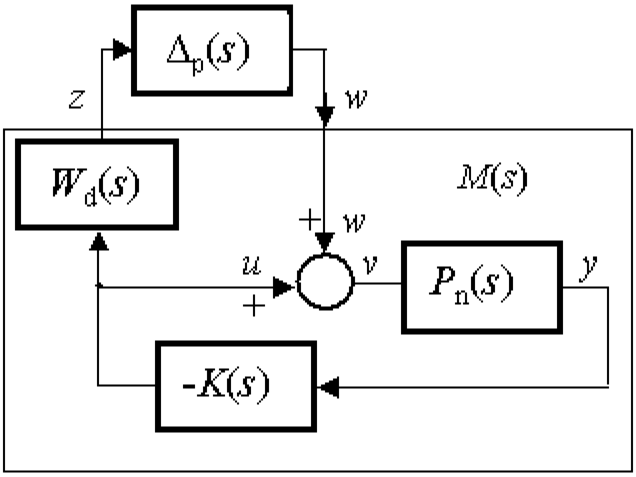

Рис. 5.

Для приведенной схемы найдем передаточную функцию $M(s)$ вспомогательного объекта, к которому в дополнительную обратную связь подключается возмущение модели, представленное функцией $\Delta_p(s)$. В соответствии с блок-схемой, имеем следующие очевидные соотношения

$$z = W_d u, \quad v = u + w, \quad y = P_n v, \quad u = -Ky, \quad w = \Delta_p z \quad . (18)$$

Из (18), прежде всего, следует, что

$$y = P_n v = P_n(u + w) = P_n(u + \Delta_p W_d u) = P_n(1 + \Delta_p W_d)u \quad ,$$

но, согласно (11), $P_n(1+\Delta_p W_d) = P$, откуда следует вывод о том, что система, изображенная на рис. 5, есть не что иное, как замкнутая система (3), (2) с возмущенным объектом.

Далее, исключая из первых четырех равенств в (18) внутреннюю переменную v, получим

$$z = W_d u, \quad y = P_n(u + w), \quad u = -Ky,$$

а после исключения отсюда переменной u – соответственно

$$z = -W_d Ky, \quad y = P_n(-Ky + w).$$

Из последних двух равенств следует, что

$$z = -W_d Ky, \quad y = (1 + P_n K)^{-1} P_n w,$$

откуда имеем $z = -W_d K(1 + P_n K)^{-1} P_n w,$ т.е. искомая передаточная функция определяется выражением

$$M(s) = -W_d(s) K(s)\left[1 + P_n(s) K(s)\right]^{-1} P_n(s). \quad (19)$$

Полученная формула (19) с учетом обозначений (15), (16), а также достаточного условия сохранения устойчивости (17), на основании проведенных рассуждений позволяет сформулировать основное утверждение, которое мы приведем в следующих двух эквивалентных вариантах

Теорема 2. *Если имеет место неравенство*

$$\alpha = \max_{\omega \in \mathbf{R}^1} m(\omega) = \|M(s)\|_\infty < 1, \quad (20)$$

где $M(s) = -W_d(s) K(s)\left[1 + P_n(s) K(s)\right]^{-1} P_n(s)$ *— вспомогательная передаточная функция номинальной замкнутой системы с учетом весовой функции возмущения, то возмущенная замкнутая система*

$$y = P(s)u, \quad u = -K(s)y \quad (21)$$

с передаточной функцией объекта $P(s) = P_n(s)\left(1 + \Delta_p(s) W_d(s)\right)$ *будет сохранять устойчивость для любых возмущений* Δ_p *таких, что*

$$\|\Delta_p(s)\|_\infty \le 1. \quad (22)$$

Теорема 3. *Если имеет место неравенство*

$$\alpha = \max_{\omega \in \mathbf{R}^1} m(\omega) = \|M(s)\|_\infty < 1,$$

где $M(s) = -W_d(s)K(s)\left[1 + P_n(s)K(s)\right]^{-1} P_n(s)$, *то возмущенная замкнутая система* $y = P(s)u$, $u = -K(s)y$, *с любым возмущенным объектом, имеющим передаточную функцию* $P(s)$, *которая удовлетворяет условию*

$$\left|\frac{\left|P(j\omega)\right| - \left|P_n(j\omega)\right|}{P_n(j\omega)}\right| \le \left|W_d(j\omega)\right|, \quad \forall\omega \in \mathbf{R}^1, \quad (23)$$

будет устойчивой.

Замечание: Приведенное утверждение сформулировано как **достаточное условие робастной устойчивости** при наличии неструктурированной неопределенности в рассматриваемой форме. Однако оно с очевидностью является и **необходимым**. Действительно, если неравенство (20) будет нарушено, то найдется такое возмущение Δ_p^*, удовлетворяющее ограничению (22), что годограф Найквиста $F(j\omega) = \Delta_p^*(j\omega)M(j\omega)$ охватит точку $(-1,0)$ на комплексной плоскости, т.е. возмущенная система (21) потеряет устойчивость.

На базе приведенных рассуждений нетрудно ответить и на второй вопрос, поставленный в начале данного параграфа, **о предельно допустимых гарантированных границах изменения возмущений модели объекта, которые не приводят к потере устойчивости.**

Действительно, в соответствии с теоремой о малом коэффициенте усиления достаточным условием устойчивости возмущенной замкнутой системы, представленной на рис. 4, является выполнение неравенства

$$\max_{\omega\in\mathbf{R}^1}\left|\Delta_p(j\omega)M(j\omega)\right| < 1. \quad (24)$$

В частности, это неравенство является достаточным условием устойчивости и для системы, изображенной на рис. 5, где $M(s) = -W_d(s)K(s)\left[1 + P_n(s)K(s)\right]^{-1} P_n(s)$. При этом с учетом (6) и (5), достаточное условие (24) примет вид

$$\max_{\omega\in\mathbf{R}^1}\left|\Delta_0(j\omega)T(j\omega)\right| < 1, \quad (25)$$

где $T(s) = K(s)\left[1 + P_n(s)K(s)\right]^{-1} P_n(s)$, $\Delta_0(s) = \left[P(s) - P_n(s)\right]P_n^{-1}(s)$.

Если выполняется равенство

$$\left\|T(s)\right\|_\infty = \max_{\omega\in\mathbf{R}^1}\left|T(j\omega)\right| = \beta,$$

то из (25) с очевидностью следует достаточное условие сохранения устойчивости

$$\left\|\Delta_0(s)\right\|_\infty = \max_{\omega\in\mathbf{R}^1}\left|\Delta_0(j\omega)\right| < 1/\beta. \quad (26)$$

Заметим, что величина $b_m(P_n, K) = 1/\beta$ может быть трактована, как **гарантированная граница робастной устойчивости** в том плане, что для любых относительных возмущений модели объекта, удовлетворяющих (26), замкнутая возмущенная система

$$y = P(s)u, \quad u = -K(s)y \quad (27)$$

будет сохранять устойчивость. Более того, всегда найдется такое возмущение Δ_0^* с нормой $\left\|\Delta_0^*(s)\right\|_\infty = 1/\beta$, что замкнутая система (27) с возмущенным объектом, имеющим передаточную функцию $P(s) = P^*(s) = P_n(s) + P_n(s)\Delta_0^*(s)$, будет неустойчивой.

Отметим тот очевидный факт, что требование (26) является слишком жестким, поскольку согласно (5) требует выполнения неравенства

$$\left|\left[P(j\omega) - P_n(j\omega)\right]P_n^{-1}(j\omega)\right| < 1/\beta \quad (28)$$

для любой частоты $\omega \in [0, \infty)$. Однако, в соответствии с (25), условия (26), (28) могут быть существенно ослаблены.

Действительно, представляя неравенство (25) в виде

$$\left|\Delta_0(j\omega)T(j\omega)\right| < 1 \quad \text{или} \quad \left|\left[P(j\omega) - P_n(j\omega)\right]P_n^{-1}(j\omega)T(j\omega)\right| < 1$$

для любого $\omega \in [0, \infty)$, получим следующее достаточное условие

$$\left|\left[P(j\omega) - P_n(j\omega)\right]P_n^{-1}(j\omega)\right| < 1/\left|T(j\omega)\right| \text{ для любого } \omega \in [0, \infty). \quad (29)$$

При этом функция частоты

$$b(\omega, P_n, K) = 1/\left|T(j\omega)\right| \quad (30)$$

может быть трактована, как **частотная граница робастной устойчивости.** В соответствии с (29), она определяет предельно “широкий коридор”, представленный на рис. 2 при условии $W_d(s) = W_d^*(s) = 1/T(s)$. Если АЧХ возмущенного объекта не выходит за пределы этого коридора, то сохранение устойчивости гарантируется.

Очевидно, что обе указанные характеристики $b_m(P_n, K)$ и $b(\omega, P_n, K)$ для одного и того же объекта зависят от выбора регуляторов (2) и могут служить целям их сравнительного анализа.

Замечание: Изложенный в данной статье материал имеет непосредственное относится к **μ-теории**, на которой базируется инструментарий, представленный в ППП “**μ-Tools**”. Это связано с тем, что в данном частном простейшем случае для структурированного сингулярного числа μ_Δ, справедливо равенство

$$\mu_\Delta(T) = \left\|T(s)\right\|_\infty = 1/b_m(P_n, K).$$

Литература:

1. Харитонов В.Л. Асимптотическая устойчивость положения равновесия семейства систем дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 1978. — № 11. — С. 2086–2088.
2. Safonov M. G., Athans M. A multiloop generalization of the circle criterion for stability margin analysis // IEEE Trans. on Automatic Control. — 1981. — Vol. 26, no. 2. — P. 415–422.
3. Doyle J. C. Analysis of feedback systems with structured uncertainties // IEE Proc. Pt. D: Control theory and applications. — 1982. — Vol. 129, no. 6. — P. 242–250.
4. Boyd S., Ghaoui E., Feron E., Balakrishnan V. Linear matrix inequalities in systems and control theory. — Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. — ix, 193 p.
5. Zames G. On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems. Part I, II // IEEE Trans. on Automatic Control. — 1966. —Vol. 11, no. 2. — P. 228–238; Vol. 11, no. 3. — P. 465–476.