Глава 1.
Обзор и анализ математических моделей электрических полей и методов решения внешних краевых задач

В главе 1 описываются математические модели электрических полей. Помимо этого, в данной главе представлен обзор серии работ отечественных и зарубежных научных исследований, выполненных за последние годы в области решения внешних краевых задач. Основное внимание в обзоре уделялось центральным идеям и ключевым элементам алгоритмов, тогда как детали их реализации в каждом конкретном случае подробно не рассматривались.

1.1. Математические модели электрических полей

Рассмотрим поле постоянных токов в диэлектрической среде. Как в самой среде, окружающем проводники с постоянным током, так и в внутри проводников существуют магнитное и электрическое поля. Эти поля стационарны. Вне источника ЭДС электрическое поле постоянных токов является, так же как и электростатическое поле, безвихревым. Такое поле является потенциальным, т.е. для его характеристики может быть введена функция координат $u(x, y, z)$ — электрический потенциал, — причем

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} u . \qquad (1.1)$$

Таким образом, электрическое поле в диэлектрической среде, окружающем проводники с постоянными токами, характеризуется уравнениями [1]:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0 ; \qquad \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} ; \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0 ,$$

где $\boldsymbol{E}$ — напряженность электрического поля, $\boldsymbol{D}$ — электрическая индукция, ε — диэлектрическая проницаемость среды.

Для однородной среды, когда $\varepsilon = \text{const}$, эти уравнения дают $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0$ или $\operatorname{div} \operatorname{grad} u = 0$, т.е. потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа.

Итак, в диэлектрической среде такое поле ничем не отличается от электростатического, но граничные условия на поверхности проводников уже не соответствуют тем, которые имеют место в электростатике. В электростатической задаче поверхность каждого проводника является поверхностью равного потенциала. При протекании постоянного тока в проводнике возникает падение потенциала, а значит, поверхность проводника уже не будет равнопотенциальной. Так как на поверхности проводника появляется касательная составляющая напряженности поля в направлении линий тока, линии напряженности электрического поля в диэлектрической среде подходят к поверхности проводника не под прямым углом. Данное обстоятельство значительно осложняет расчет поля, тем не менее, практически во всех случаях его можно не учитывать, поскольку обычно падение напряжения вдоль проводников на длине, сравнимой с расстоянием между проводниками, ничтожно мало по сравнению с разностью потенциалов проводников.

В [1] сравнивают между собой касательную E_t и нормальную E_n — составляющие вектора $\boldsymbol{E}$ в диэлектрической среде у поверхности проводов линии передачи. Полученные числа показывают, что составляющая E_t ничтожно мала по сравнению с E_n, и при рассмотрении поля около проводов ею можно пренебречь без опасения внести этим какую-нибудь заметную ошибку. В таком случае граничные условия на поверхности проводников оказываются тождественными условиям в электростатике. Поэтому при рассмотрении электрического поля в диэлектрической среде, окружающей проводники с постоянными токами, можно использовать решения, полученные при рассмотрении соответствующих электростатических задач.

Рассмотрим теперь электромагнитные процессы, сопровождающие атмосферный разряд, например, удар молнии в молниеотвод. При этом, как правило, необходимо учитывать неоднородность электрических свойств среды, а также их изменение. При математическом моделировании исследуемых процессов могут изменяться также геометрическая конфигурация и электрические параметры исследуемой разрядной структуры.

Заметим, что как высота молниеотвода, так и длина лидерного канала молнии на несколько порядков превышает их диаметр. Поэтому при использовании метода конечных разностей [2, 3] шаг пространственной сетки h обычно выбирается значительно больше радиуса r_0, например, равным средней длине шага при росте разрядной структуры (молнии) как в [3]. В соответствии с методом конечных разностей исследуемая область с тонкой проводящей проволокой, разбивается на ячейки так, что узлы расчетной сетки лежат на границах раздела сред и на оси проволоки. В пределах каждой из ячеек, кроме тех, которые примыкают к проволоке, свойства диэлектрической среды полагаются однородными в [4]. Для каждого узла расчетной сетки уравнение для скалярного потенциала записывается в комплексном виде:

$$\oint_{S_p} j\omega\varepsilon_0\varepsilon \overset{=}{s}\dot{E}_n ds = 0\,, \tag{1.2}$$

где

$$\overset{=}{s} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & q \\ 0 & 0 & s_z \end{bmatrix}$$

$$s_x = \left(1 + \frac{\gamma}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon}\right)k_x;\ \ s_y = \left(1 + \frac{\gamma}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon}\right)k_y;$$

$$s_z = \left(1 + \frac{\gamma}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon}\right)k_z;$$

S_p — поверхность параллелепипеда, грани которого делят пополам расстояния между соседними узлами; $\dot{E}_n$ — компонента вектора напряженности электрического поля, нормальная к элементу поверхности ds; ω — круговая частота; $j = \sqrt{-1}$.

Задание электрических свойств среды осуществляется путем присвоения значений относительной диэлектрической проницаемости ε и удельной электропроводности γ ячейкам расчетной схемы.

Граничные условия зависят от вида полеобразующей системы [4].

Записав уравнения вида (1.2) для каждого узла расчетной сетки в разностном виде как и граничные условия, получаем систему уравнений, которую автор [4] предлагает решать итерационным методом.

Для учета присутствия в расчетной области тонкой проволоки длиной l_0 введем систему, в которой в частности проволока расположена вдоль оси Y перпендикулярно земле и одним концом касается ее поверхности.

Коэффициенты компонент тензора $\overline{\overline{s}}$ узлов, расположенных на проволоке или окружающих ее, согласно [4] вычисляются по следующим формулам:

а) вдоль верхнего края проволоки

$$k_y = \frac{K_y}{2h\ln(h/r_0)},$$

$$K_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \ln\left[\frac{\frac{h}{2}+\sqrt{\left(\frac{h}{2}+2l_0\right)^2+x^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2}}{-\frac{h}{2}+\sqrt{\left(\frac{h}{2}+2l_0\right)^2+x^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2}}\,\frac{-\frac{h}{2}+\sqrt{2\left(\frac{h}{2}\right)^2+x^2}}{\frac{h}{2}+\sqrt{2\left(\frac{h}{2}\right)^2+x^2}}\right]dx$$

б) k_x для узлов (i_w, j_w, k_w), расположенных на оси проволоки и рядом с ней (i_w-1, j_w, k_w), а также k_z узлов (i_w, j_w, k_w) и (i_w, j_w, k_w-1), причем $k_z = k_x$, учитывая, что направления X и Z в данном случае равноценны,

$$k_x = \frac{K_x}{2h\ln(h/r_0)},$$

$$K_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\frac{h}{2}}{\left(\frac{h}{2}\right)^2+z^2}\left[\sqrt{\left(y+\frac{h}{2}-l_0\right)^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2+z^2}\,-\right.$$

$$-\sqrt{\left(y-\frac{h}{2}-l_0\right)^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2+z^2}-\sqrt{\left(y+\frac{h}{2}+l_0\right)^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2+z^2}+$$

$$\left.+\sqrt{\left(y-\frac{h}{2}+l_0\right)^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2+z^2}\right]dz\,;$$

в) для остальных узлов $k_x = k_y = k_z = 1$.

Перейдем к рассмотрению системы коронирующих проводов над заземленной поверхностью. Для расчета электрических полей и зарядов, возникающих в данной системе в работе [5] используется система уравнений Максвелла, описывающая распределение электрического поля и заряда:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\rho, \\ &\left(\boldsymbol{E}\nabla\right)\rho + 4\pi\rho^2 = 0, \\ &\boldsymbol{E} = -\nabla u, \end{aligned}\right\} \qquad (1.3)$$

где $\boldsymbol{E}$ — напряженность электрического поля, ρ — плотность электрических зарядов, u — потенциал поля.

Граничные условия:

а) на поверхности проводов задается постоянный потенциал;

б) на поверхности земли потенциал постоянен и равен нулю;

в) в случае возникновения короны, на проводе всегда устанавливается одно и то же значение нормальной составляющей напряженности электрического поля $E_{\text{кр}}$, для которого известна эмпирическая формула Пика.

Так как плотность заряда ρ в коронном разряде мала, можно принять электрическое поле при коронном разряде подобным полю в отсутствии короны $\boldsymbol{E} = \theta_{\text{п}}\boldsymbol{E}_0$, где

$\boldsymbol{E}_0$ — поле в отсутствии короны, а $\theta_п$ — новая неизвестная функция [6]. В соответствии с этими предположениями система (1.3) распадается на две независимые системы уравнений. Уравнения начального приближения:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}_0 &= -\nabla u_0, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{E}_0 &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1.4)$$

где u_0 — невозмущенный потенциал. По уравнениям (1.4) определяется поле в отсутствии короны. Для (1.4) ставятся обычные граничные условия для потенциала на земле и проводах.

Уравнения для поправок поля и заряда:

$$\left.\begin{aligned} (\boldsymbol{E}_0 \nabla)\theta_п &= 4\pi\rho, \\ (\boldsymbol{E}_0 \nabla)\rho &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Из $(\boldsymbol{E}_0 \nabla)\rho = 0$ следует, что плотность заряда постоянна вдоль силовых линий. Значит, $(\boldsymbol{E}_0 \nabla)\rho = \mathrm{const}$ вдоль силовых линий поля начального приближения. Для функции $\theta_п$ граничное условие на проводе определяется тем, что $\left|\theta_п \boldsymbol{E}_0\right| = E_{кр}$.

Обратим в этой связи внимание и еще на одну особенность — отсутствие граничного условия для ρ, что не вызывает трудностей в частных случаях, когда аналитическое решение задачи возможно, но при численном решении данное обстоятельство существенно усложняет алгоритм расчета. В [5] указанные трудности предлагается преодолеть введением новой функции κ:

$$\kappa = \frac{u - \theta_п u_0}{4\pi\rho}, \qquad (1.5)$$

$$(\mathbf{E}_0 \nabla)\kappa = -u_0, \qquad (1.6)$$

причем $\kappa = 0$ на поверхности земли. Решая уравнение (1.6) от поверхности земли, получаем значение $\kappa = \kappa_a$ на поверхности провода. Плотность заряда вдоль силовой линии:

$$4\pi\rho = \frac{u_a\left(1 - \theta_{\text{п}}\right)}{\kappa_a},$$

где u_a — известный потенциал на поверхности провода. Зная плотность заряда, можно найти функцию к вдоль силовой линии, решая уравнение (1.5) от поверхности провода.

Таким образом, исходя из приведенных математических моделей, исследование электрических полей может быть проведено на базе решения внешней краевой задачи для уравнения Лапласа с граничными условиями Дирихле и Неймана.

1.2. Основные методы решения внешних краевых задач

Для внешних краевых задач существует узкий круг аналитических решений в случае простого описания геометрии тел. Например, для канонических областей применяется метод конформных отображений, т.е. сводится внешняя задача к внутренней. Однако в общем случае для сложной области затруднено построение отображающей функции.

Применение численных методов для решения внешних краевых задач ограничено, поскольку граничные условия ставятся непосредственно на бесконечности, а расчетная область, как и число узлов в сетке, берется