

## **Занятие 1**

### **ПРАКТИЧЕСКИЕ СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ В ЭЛЕКТРОМЕХАНИКЕ**

#### **1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ**

Получение практических знаний по применению основных способов нахождения критериев подобия при создании моделей физических процессов и явлений, происходящих в электромеханических преобразователях энергии.

#### **2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ**

Знание критериев подобия необходимо для установления масштабов, которые связывают между собой параметры создаваемой модели и имеющегося оригинала. Кроме того, анализируя критериальные соотношения, можно установить наиболее характерные свойства моделируемого процесса или явления.

В практике создания моделей электромеханических преобразователей наибольшее применение находят следующие способы определения критериев подобия:

- за счет преобразования уравнения изучаемого процесса;
- способ интегральных аналогов.

#### **3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА**

Микрокалькулятор, листы бумаги в клетку, карандаш, линейка.

#### **4. МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ**

##### **4.1. Определение критериев подобия за счет преобразования уравнения изучаемого процесса**

Применим этот способ к конкретному простому случаю. Проанализируем электромагнитный процесс в двигателе постоянного тока с независимым возбуждением при включении (обмотка якоря разомкнута) без учета насыщения магнитной цепи.

В цепи обмотки возбуждения электрической машины (в оригинале), т. е. в цепи, обладающей активным сопротивлением  $R_1$  и индуктивностью  $L_1$ , при включении ее на постоянное напряжение  $u_1=U_1$  (рис. 3.1) протекает процесс, описываемый дифференциальным уравнением

$$u_1 = i_1 R_1 + L_1 di_1/dt_1.$$



Рис. 3.1. Электрическая схема моделируемого процесса

Во второй цепи (в создаваемой модели) с параметрами  $R_2$ ,  $L_2$  должен протекать подобный первому процесс, уравнение которого

$$u_2 = i_2 R_2 + L_2 di_2/dt_2.$$

Определим критерии подобия, для чего произведем некоторые преобразования. Разделив первое и второе уравнения соответственно на  $i_1 R_1$  и  $i_2 R_2$ , получим

$$1 - \frac{u_1}{i_1 R_1} + \frac{L_1}{i_1 R_1} \cdot \frac{di_1}{dt_1} = 0; \quad 1 - \frac{u_2}{i_2 R_2} + \frac{L_2}{i_2 R_2} \cdot \frac{di_2}{dt_2} = 0.$$

Так как процессы в модели и оригинале должны быть подобны, то

$$u_1 = m_u u_2; \quad i_1 = m_i i_2; \quad R_1 = m_R R_2; \quad L_1 = m_L L_2; \quad t_1 = m_t t_2,$$

где  $m$  с подстрочными индексами – масштабы подобия соответствующих величин.

Подставив последние выражения в первое из преобразованных уравнений, получим

$$1 - \frac{m_u}{m_i m_R} \cdot \frac{u_2}{i_2 R_2} + \frac{m_L m_i}{m_i m_R m_t} \cdot \frac{L_2}{i_2 R_2} \cdot \frac{di_2}{dt_2} = 0.$$

Поскольку исходное уравнение является однородным, то

$$\frac{m_u}{m_i m_R} = \frac{m_L}{m_R m_t} = 1.$$

Точки координатного пространства, в которых критерии подобия численно равны, называются сходственными точками. Только в этих точках пропорциональны все сходственные параметры сопоставляемых подобных процессов. При этом масштабные коэффициенты сходственных параметров подобных процессов подчиняются условиям

$$M_j / M_m = 1,$$

где  $M_j, M_m$  - комбинации (произведения или отношения) масштабных коэффициентов.

Заменяя масштабы  $m$  отношениями сходственных параметров, находим:

$$\frac{u_1 / u_2}{i_1 / i_2 \cdot R_1 / R_2} = 1; \quad \frac{L_1 / L_2}{R_1 / R_2 \cdot t_1 / t_2} = 1,$$

или в критериальной форме записи

$$\pi_1 = \frac{u}{iR} = idem; \quad \pi_2 = \frac{L}{Rt} = idem.$$

В качестве примера определим числовые значения критериев подобия  $\pi_1$  и  $\pi_2$  для случая, когда параметры оригинала и модели имеют следующие значения:

$$R_1 = 10 \text{ Ом}, \quad L_1 = 20 \text{ Гн}, \quad u_1 = 100 \text{ В};$$

$$R_2 = 20 \text{ Ом}, \quad L_2 = 40 \text{ Гн}, \quad u_2 = 75 \text{ В}.$$

Решения исходных линейных однородных дифференциальных уравнений, описывающих процессы в оригинале и в модели, имеют вид

$$i_1 = \frac{u_1}{R_1} \left( 1 - e^{-\frac{R_1}{L_1} t_1} \right) = \frac{100}{10} \left( 1 - e^{-\frac{10}{20} t_1} \right) = 10 \left( 1 - e^{-0,5 t_1} \right);$$

$$i_2 = \frac{u_2}{R_2} \left( 1 - e^{-\frac{R_2}{L_2} t_2} \right) = \frac{75}{20} \left( 1 - e^{-\frac{20}{40} t_2} \right) = 3,75 \left( 1 - e^{-0,5 t_2} \right).$$

4.1.1. Для масштаба времени  $m_t = 1$ , т. е.  $t_1 = t_2$ , токи имеют значения, представленные в табл. 3.1.

**Числовые значения токов в оригинале и в модели**

| $t_1=t_2$ | с | 0 | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 10   | $\infty$ |
|-----------|---|---|------|------|------|------|------|------|----------|
| $i_1$     | А | 0 | 3,90 | 6,30 | 7,80 | 8,66 | 9,50 | 9,93 | 10,00    |
| $i_2$     | А | 0 | 1,46 | 2,36 | 2,92 | 3,25 | 3,56 | 3,72 | 3,75     |

Этому случаю соответствуют кривые токов на рис. 3.2.

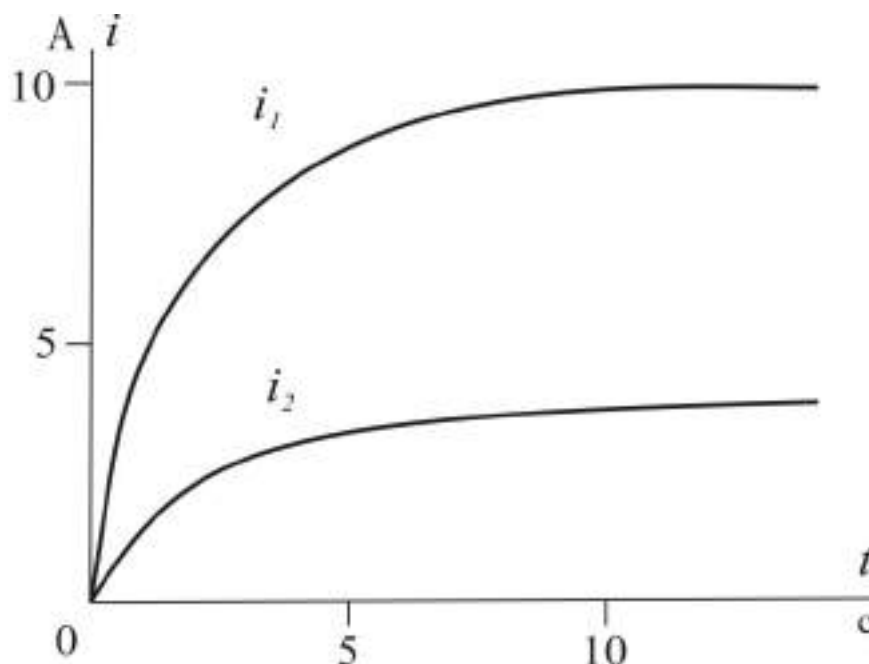


Рис. 3.2. Временная диаграмма токов при  $m_t = 1$

Нетрудно заметить, что масштаб  $m_i$  для любых моментов времени

$$m_i = i_1/i_2 = 2,66 = \text{const.}$$

В свою очередь, остальные масштабы сходственных параметров

$$m_R = 0,5; \quad m_L = 0,5; \quad m_u = 1,33.$$

Теперь можно легко проверить справедливость отношений:

$$\frac{m_u}{m_i m_R} = \frac{1,33}{2,66 \cdot 0,5} = 1; \quad \frac{m_L}{m_R m_t} = \frac{0,5}{0,5 \cdot 1} = 1.$$

Далее вычислим значения критериев  $\pi_1$  и  $\pi_2$ , например, для момента времени  $t_1 = t_2 = 5$  с:

$$\frac{u_1}{i_1 R_1} = \frac{100}{9,5 \cdot 10} = 1,05; \quad \frac{u_2}{i_2 R_2} = \frac{75}{3,56 \cdot 20} = 1,05,$$

т. е. критерий подобия  $\pi_1 = 1,05 = idem$ .

Точно так же получим

$$\frac{L_1}{R_1 t_1} = \frac{20}{10 \cdot 5} = 0,4; \quad \frac{L_2}{R_2 t_2} = \frac{40}{20 \cdot 5} = 0,4,$$

т. е. критерий подобия  $\pi_2 = 0,4 = idem$ .

Аналогично можно показать, что и для других сходственных моментов времени критерии численно одинаковы.

### Задание 1.1

Определить численные значения критериев подобия при моделировании рассматриваемого процесса в неизменном масштабе  $m_t = 1$  для момента времени  $t$ , если известно, что параметры оригинала  $R_1 = 5$  Ом,  $L_1 = 0,1$  Гн,  $u_1 = 110$  В, а параметры  $R_2$ ,  $L_2$ ,  $u_2$  используемой модели приведены в табл. 3.2

Параметры модели

Таблица 3.2

| № вар. |    | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  |
|--------|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| t      | с  | 2   | 7   | 4   | 8   | 1   | 9   | 6   | 10  | 3   | 0,5 |
| $R_2$  | Ом | 200 | 100 | 300 | 50  | 250 | 10  | 150 | 75  | 25  | 125 |
| $L_2$  | Гн | 1   | 4   | 7   | 5   | 8   | 2   | 9   | 3   | 10  | 6   |
| $u_2$  | В  | 100 | 150 | 130 | 170 | 110 | 140 | 190 | 120 | 180 | 160 |

Определим теперь численные значения критериев подобия для случая, когда  $m_t \neq 1$ . Предположим, например, что  $m_t = t_1/t_2 = 3$ , т. е. второй процесс (в модели) протекает в 3 раза медленнее первого (в оригинале). Пусть при этом параметры оригинала

$$R_1 = 10 \text{ Ом}, \quad L_1 = 20 \text{ Гн}, \quad u_1 = 100 \text{ В};$$

параметры модели

$$R_2 = 90 \text{ Ом}, \quad L_2 = 60 \text{ Гн}, \quad u_2 = 500 \text{ В}.$$

Как и в первом случае, когда  $m_t = 1$ , найдем зависимости  $i_1 = f(t_1)$  и  $i_2 = f(t_2)$ .

Для определения масштаба токов  $m_i$  при  $m_t \neq 1$  необходимо брать значения токов  $i_1$  и  $i_2$  в сходственные моменты времени. В данном случае сходственными считаются моменты времени, при которых токи в относительных единицах  $i_1/i_{1\infty}$  и  $i_2/i_{2\infty}$  (где  $i_1/i_{1\infty}$  и  $i_2/i_{2\infty}$  - установившиеся значения токов) достигают равных значений (табл. 3.3).

В рассматриваемом примере сходственными будут моменты времени 3 с и 1 с соответственно для первого и второго процессов 4 с и 1,33 с, 10 с и 3,33 с и т. д.

Масштаб токов для сходственных моментов времени

$$m_i = i_1/i_2 = 1,8 = \text{const.}$$

**Числовые значения токов**

*Таблица 3.3*

| $t_1$    | $i_1$ | $t_2 = t_1/3$ | $i_2$ | $i_1/i_{1\infty} = i_2/i_{2\infty}$ |
|----------|-------|---------------|-------|-------------------------------------|
| с        | А     | с             | А     | -                                   |
| 0        | 0     | 0             | 0     | 0                                   |
| 1        | 3,90  | 0,33          | 2,17  | 0,39                                |
| 2        | 6,30  | 0,67          | 3,50  | 0,63                                |
| 3        | 7,80  | 1,00          | 4,34  | 0,78                                |
| 4        | 8,66  | 1,33          | 4,82  | 0,87                                |
| 6        | 9,50  | 2,00          | 5,28  | 0,95                                |
| 10       | 9,93  | 3,33          | 5,52  | 0,99                                |
| $\infty$ | 10,00 | $\infty$      | 5,56  | 1,00                                |

Вычислив остальные масштабы

$$m_R = 1/9, \quad m_L = 1/3, \quad m_u = 1/5,$$

найдем, что соотношения масштабов соблюдаются и в этом случае:

$$\frac{m_u}{m_i m_R} = \frac{1/5}{1,8 \cdot (1/9)} = 1; \quad \frac{m_L}{m_R m_t} = \frac{1/3}{(1/9) \cdot 3} = 1.$$

Зависимости токов от времени имеют вид рис. 3.3.

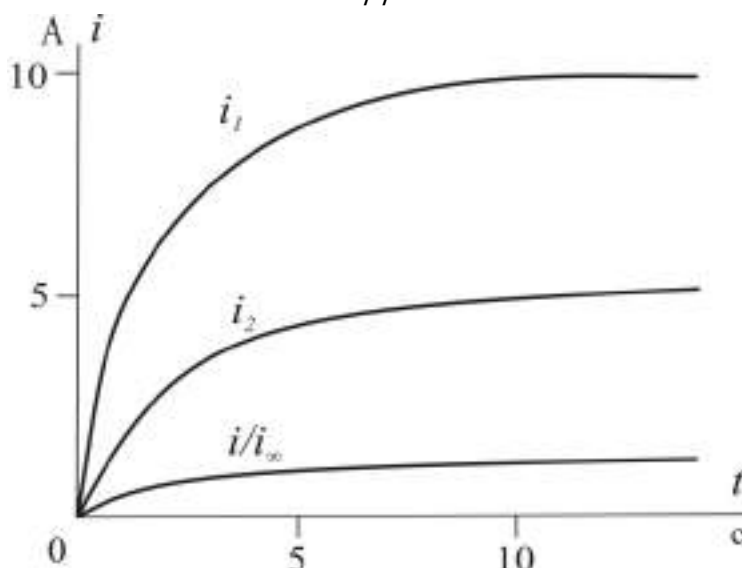


Рис. 3.3. Временная диаграмма токов при  $m_t \neq 1$

Проверим равенство численных значений критериев подобий  $\pi_1$  и  $\pi_2$  для сходственных моментов времени, например для  $t_1=3$  с и  $t_2=1$  с.

Критерий  $\pi_1$ :

$$\frac{u_1}{i_1 R_1} = \frac{100}{7,8 \cdot 10} = 1,28; \quad \frac{u_2}{i_2 R_2} = \frac{500}{4,34 \cdot 90} = 1,28,$$

т. е.  $\pi_1 = 1,28 = idem$ .

Критерий  $\pi_2$ :

$$\frac{L_1}{R_1 t_1} = \frac{20}{10 \cdot 3} = 0,67; \quad \frac{L_2}{R_2 t_2} = \frac{60}{90 \cdot 1} = 0,67,$$

следовательно,  $\pi_2 = 0,67 = idem$ .

### Задание 1.2

Определить численные значения критериев подобия по условиям задания 1.1 при рассмотрении процесса в замедленном масштабе времени  $m_t$  (табл. 3.4).

Значения масштаба времени

Таблица 3.4

| № вар. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6 | 7  | 8 | 9 | 10 |
|--------|---|---|---|---|----|---|----|---|---|----|
| $m_t$  | 3 | 7 | 5 | 2 | 20 | 9 | 10 | 4 | 8 | 5  |

## 4.2. Способ интегральных аналогов

Определение критериев подобия способом интегральных аналогов производится следующим образом. Если уравнение моделируемого процесса содержит  $n$  членов, то для нахождения критериев подобия необходимо разделить все члены уравнения на какой-либо из них. При этом следует опустить символы связи между членами уравнения, символы дифференцирования и интегрирования, а также неоднородные функции. К полученным в результате этих операций  $n-1$  основным критериям подобия необходимо присовокупить  $a$  дополнительных критериев - аргументов неоднородных функций, входящих в члены уравнения.

Общее число критериев подобия, найденных способом интегральных аналогов,

$$k_J = (n - 1) + a .$$

Число возможных форм записи  $n-1$  основных критериев, получаемых приведением уравнения к безразмерному виду, равно числу членов уравнения:

$$F_J = n .$$

Рассмотрим методику определения критериев подобия способом интегральных аналогов на примере моделирования переходного электромагнитного процесса в цепи, образованной последовательным соединением элементов с активным сопротивлением  $R$  и индуктивностью  $L$ , которая включается на напряжение  $u$ , меняющееся во времени по синусоидальному закону с угловой скоростью  $\omega$  (включение трансформатора на холостом ходу без учета насыщения). Электрическая схема процесса аналогична рис. 1.

Дифференциальное уравнение процесса имеет вид

$$u = iR + Ldi/dt ,$$

где  $u = U \sin \omega t$ .

4.2.1. Записываем исходное уравнение в виде  $\varphi_0 = \sum_1^m \varphi_i = 0$ .



$$\varphi_0 = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = L \frac{di}{dt} + iR - U \sin \omega t .$$

4.2.2. Опускаем символы связи «+», «-» и «= $\Rightarrow$ » между членами уравнения:

$$\varphi_1 = L \frac{di}{dt}; \quad \varphi_2 = iR; \quad \varphi_3 = U \sin \omega t .$$

4.2.3. Исключаем из выражений для  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  неоднородные функции, приняв в качестве дополнительных критериев подобия аргументы этих функций:

$$\varphi_3 = U \sin \omega t \rightarrow \sin \omega t \rightarrow \pi_{\text{доп}} = \omega t; \quad \varphi_3^* = U .$$

4.2.4. Опускаем в выражениях для  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  символы дифференцирования и интегрирования, символы *grad*, *div* и т. д., заменяя  $d^n x / dy^n$  на  $x^n / y^n$ ,  $\int x dy$  на  $x y$ , а также (при условии соблюдения геометрического подобия) *grad j* на  $1/l$ , *rot H* на  $H/l$ ,  $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$  на  $1/l^2$ , *div grad l* на  $1/l^2$  и т. д.:

$$\varphi_1 = L \frac{di}{dt} \rightarrow \varphi_1^* = L \frac{i}{t} .$$

4.2.5. Заменяем члены уравнения  $\varphi_i$ ,  $\varphi_j$ , преобразованные на этапах 3 и 4, их аналогами  $\varphi_i^*$ ,  $\varphi_j^*$  и записываем выражения для  $\varphi_1, \dots, \varphi_i^*, \dots, \varphi_j^*, \dots, \varphi_m$ :

$$\varphi_1^* = L \frac{i}{t}; \quad \varphi_2^* = iR; \quad \varphi_3^* = U .$$

4.2.6. Делим  $\varphi_1, \dots, \varphi_i^*, \varphi_j^*, \dots, \varphi_m$  на какой-либо один из них и записываем выражения для основных критериев подобия в одной из возможных форм записи:

$$\pi_1 = \frac{\varphi_1^*}{\varphi_3^*} = \frac{Li}{Ut}; \quad \pi_2 = \frac{\varphi_2^*}{\varphi_3^*} = \frac{iR}{U} .$$

4.2.7. Дополняем полученную систему основных критериев подобия критериями подобия, полученными на этапе 3:

$$\pi_1 = \frac{Li}{Ut}; \quad \pi_2 = \frac{iR}{U}; \quad \pi_3 = \pi_{\text{доп}} = \omega t.$$

4.2.8. Преобразовываем (в случае необходимости) полученные выражения для критериев подобия в иную (более удобную по условиям конкретной задачи) форму записи посредством их перемножения, деления, возведения в степень, умножения на постоянный коэффициент, например,

$$\pi_1' = \frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{LiU}{UtiR} = \frac{L}{Rt}; \quad \pi_2' = \pi_2^{-1} = \frac{U}{iR}; \quad \pi_3' = \pi_3 = \omega t.$$

4.2.9. На основании полученных выражений для критериев подобия записываем масштабные соотношения:

$$\pi_1 = \frac{Li}{Ut} \rightarrow \frac{m_L m_i}{m_u m_t} = 1; \quad \pi_2 = \frac{iR}{U} \rightarrow \frac{m_i m_R}{m_u} = 1; \quad \pi_3 = \omega t \rightarrow m_\omega m_t = 1.$$

### Задание 1.3

Определить методом интегральных аналогов критерии подобия при создании модели рассматриваемого электромагнитного процесса при  $u = \text{const}$ .

## 5. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

Отчет по практической работе должен содержать:

- цель работы;
- краткие теоретические сведения;
- задания 1.1 ... 1.3;
- выводы.

Литература

[2], с. 8...22;

[4], с. 8...103