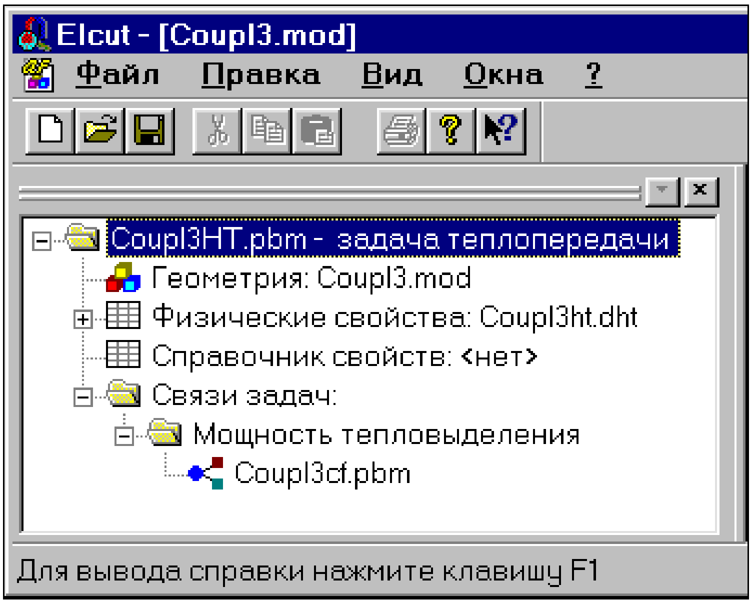

Рис. 1.28. Окно структуры подчиненной задачи
после осуществления связи задач

1.9. Нестационарное магнитное поле

Задача расчета нестационарного магнитного поля представляет собой общий случай расчета магнитного и электрического полей, вызванных переменными токами (синусоидальные, импульсные и др.), постоянными магнитами или внешним магнитным полем, в линейной и нелинейной (ферромагнитной) среде, с учетом вихревых токов (поверхностный эффект).

Формулировка задачи может быть получена из уравнений Максвелла для векторного магнитного потенциала A (B = rot A, B – вектор магнитной индукции) и скалярного электрического потенциала U (E = −grad U, E – вектор напряженности электрического поля):

$$rot(\mu^{-1} \cdot rot\ A) = j + rotH_c,$$

$$j = g \cdot E = -g \cdot grad\ U - g \cdot \partial A/\partial t,$$

где μ^{-1} – тензор, обратный тензору магнитной проницаемости, и g – электропроводность. В соответствии со вторым уравнением, полный ток в проводнике может рассматриваться как сумма стороннего тока, вызванного приложенным извне напряжением, и вихревого тока, индуцированного переменным магнитным полем:

$$j = j_{\text{стор}} + j_{\text{вихр}},$$

$$j_{\text{стор}} = -g\ \text{rad}\ U,$$

$$j_{\text{вихр}} = -g\frac{dA}{dt}.$$

Если задача расчета нестационарного магнитного поля решается совместно с присоединенной электрической цепью, то уравнение ветви электрической цепи, содержащей массивный проводник в магнитном поле, выглядит следующим образом:

$$I = \frac{U}{R} - g\int_{\Omega} \frac{\partial A}{\partial t} dS,$$

где U − разность потенциалов на концах массивного проводника, R − омическое сопротивление постоянному току.

В рассматриваемых задачах вектор индукции *B* всегда лежит в плоскости модели (*xy* или *zr*), в то время как вектор плотности электрического тока *j* и векторный потенциал *A* перпендикулярны к ней. Отличны от нуля только компоненты *jz* и *Az* в плоско-параллельном случае или *j*θ и *A*θ в осесимметричных задачах. Мы будем обозначать их просто как *j* и *A*. Для плоскопараллельных задач уравнение имеет вид:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\mu_y}\frac{\partial A}{\partial x}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\mu_x}\frac{\partial A}{\partial y}\right) - g\frac{dA}{dt} = -j_{\text{стор}} + \left(\frac{dH_{\text{cy}}}{dx} - \frac{dH_{\text{c}x}}{dy}\right),$$

а для осесимметричного случая

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r\mu_z}\frac{\partial (rA)}{\partial r}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\mu_r}\frac{\partial A}{\partial z}\right) - g\frac{dA}{dt} = -j_{\text{стор}} + \left(\frac{dH_{\text{c}r}}{dz} - \frac{dH_{\text{c}z}}{dr}\right),$$

где компоненты тензора магнитной проницаемости *μx* и *μy* (*μz* и *μr*), составляющие коэрцитивной силы *Hcx* и *H^* (*Hcz* и *Hcr*) – постоянные величины в пределах каждого из блоков модели. Сторонняя составляющая тока $j_{\text{стор}}$ предполагается постоянной в пределах каждого блока модели в плоской задаче и обратно пропорциональной радиусу (~1/*r*) в осесимметричном случае.

Замечание. В нелинейной постановке свойства материалов считаются изотропными (μ*x* = μ*y* или μ*z* = μ*r*) и задаются зависимостью *B(H),* представленной кубическим сплайном.

Решение нестационарных задач происходит с нулевого момента времени. При этом начальное значение поля предполагается нулевым во всей области. Возможен перенос начального состояния из другой задачи (стационарной или нестационарной).

1.9.1. Источники поля

Источники поля могут быть заданы в блоках, на ребрах или в отдельных вершинах модели. В нестационарной электромагнитной задаче под источниками поля понимаются сосредоточенные и распределенные токи и токовые слои, напряжение, приложенное к концам проводника, а также постоянные магниты, намагниченность которых задается величиной коэрцитивной силы.

Источник, заданный в конкретной точке плоскости xy (zr), описывает ток, проходящий через эту точку в направлении третьей оси. В осесимметричном случае точечный источник представляет ток в тонком кольцевом проводнике вокруг оси симметрии. Ток, заданный на ребре, соответствует поверхностному току в трехмерном мире. Задание плотности тока в токовом слое эквивалентно неоднородному граничному условию Неймана и осуществляется с его помощью.

Пространственно распределенный ток описывается по-разному, в зависимости от того, представляет ли интерес расчет вихревых токов (проводник) или нет (проводимость равна 0). В последнем случае ток задается либо посредством плотности электрического тока, либо полным числом ампер-витков. Плотность тока в катушке может быть получена по формуле:

$$j = \frac{n \cdot I}{S},$$

где n − число витков, I − полный ток и S − площадь поперечного сечения катушки.

Различные блоки, в которых задано одно и то же значение полного тока, могут рассматриваться как соединенные последовательно. В этом случае плотность тока в каждом блоке будет вычисляться делением общего числа ампер-витков на площадь блока.

В осесимметричных задачах, если в блоке задано полное число ампер-витков, а не плотность тока, имеется возможность описать, что плотность тока должна быть распределена по сечению обратно пропорционально расстоянию до оси вращения. Этот подход позволяет моделировать массивные спиральные катушки.

Пространственно распределенный ток задается несколькими способами. В массивном проводнике можно определить либо полный ток, либо напряжение, приложенное к проводнику. В плоской задаче падение напряжения задается на единицу глубины модели, в осесимметричном случае имеется в виду напряжение на один виток проводника. Ненулевое напряжение, приложенное к проводнику, в осесимметричной задаче означает, что проводник имеет радиальный разрез, к противоположным сторонам которого приложено напряжение. На практике эту возможность удобно применять для описания известного напряжения, приложенного к кольцевой обмотке с массивными проводниками. В этом случае реальное напряжение на зажимах обмотки следует разделить на число ее витков. Нулевое приложенное напряжение означает, что концы проводника соединены накоротко.

Напряжение, ток и плотность тока могут быть заданы как функции времени. Это позволяет проводить анализ с использованием самых разных источников поля, периодических и нет.

1.9.2. Граничные условия

На внешних и внутренних границах расчетной области могут быть заданы следующие граничные условия.

Условие Дирихле, задающее на части границы известный векторный магнитный потенциал $A0$ в вершине или на ребре модели. Это граничное условие определяет поведение нормальной составляющей индукции на границе. Оно часто используется для задания нулевого значения, например, на оси симметрии задачи или для указания полного затухания поля на удаленной от источников границе. Кроме того, Elcut позволяет задать условие Дирихле как функцию координат в виде:

$$A_0 = \alpha + bx + cy$$ − для плоских задач;

$$rA_0 = \alpha + bzr + \frac{cr^2}{2}$$ − для осесемметричных задач.

Параметры a, b и c постоянны для каждого ребра, но могут изменяться от одного ребра к другому. Этот подход позволяет моделировать внешнее однородное поле путем задания ненулевой нормальной компоненты магнитной индукции на любом прямолинейном отрезке границы.

Пусть α − угол наклона ребра по отношению к горизонтальной оси (x в плоской или z в осесимметричной задаче). Тогда в обоих типах задач нормальная компонента индукции записывается как

$$B_n = c\sin\alpha + b\cos\alpha.$$

Предполагается правое направление вектора положительной нормали.

Подбором значений константы a на разных сторонах все условия Дирихле должны быть согласованы так, чтобы функция *A0* была непрерывна в точках соприкосновения границ.

Замечание. Чтобы задача была сформулирована корректно, необходимо задать условия Дирихле хотя бы в одной точке расчетной области. А если область представляет собой набор физически не связанных подобластей, то хотя бы в одной точке каждой такой подобласти. Нулевое условие Дирихле предполагается заданным по умолчанию на оси вращения для осесимметричных задач.

Условие Неймана имеет вид

$$H_t = \sigma \quad \text{на внешних границах,}$$
$$H_t^+ - H_t^- = \sigma \quad \text{на внутренних границах,}$$

где H_t − тангенциальная компонента напряженности поля, индексы «+» и «–» означают «слева от границы» и «справа от границы» соответственно, и σ − линейная плотность поверхностного тока. Если σ равно нулю, граничное условие называется однородным. Однородное условие Неймана на внешней границе означает отсутствие касательной составляющей индукции на границе, часто применяется для описания плоскости магнитной антисимметрии (противоположные по знаку источники в симметричной геометрии). Однородное условие Неймана является естественным, оно устанавливается по умолчанию, то есть на всех тех сторонах, составляющих внешнюю границу, где явно не указано иное граничное условие.

Замечание. Нулевое условие Дирихле предполагается заданным по умолчанию на оси вращения для осесимметричных задач. При задании неоднородного условия Неймана на внешней границе, являющейся следом плоскости симметрии, истинную величину плотности тока следует разделить пополам.

Граничное условие нулевого потока используется для описания границ подобластей со сверхпроводящими свойствами, в которые не проникает магнитное поле. Векторный магнитный потенциал (функция потока г*A = const в осесимметричном случае) в теле такого сверхпроводника оказывается постоянным, поэтому его внутренность может быть исключена из рассмотрения, а на поверхности задан постоянный, но заранее неизвестный потенциал.

Замечание. Не допускается соприкосновение поверхностей, носящих граничное условие Дирихле, и сверхпроводников. В этом случае последние следует описать с помощью условия Дирихле.

1.9.3. Постоянные магниты

Поскольку коэрцитивная сила рассматривается в Elcut как кусочно-постоянная функция координат, ее вклад в уравнение эквивалентен поверхностным токам, протекающим по границам постоянных магнитов в направлении, ортогональном плоскости модели. Плотность такого эффективного тока равна величине скачка тангенциальной компоненты коэрцитивной силы на границе магнита. Например, прямоугольный магнит с коэрцитивной силой H_c, направленной вдоль оси x, может быть заменен совокупностью поверхностных токов, протекающих по его верхней и нижней границам. Эффективный ток, протекающий по верхней границе, численно равен H_c, а по нижней границе равен $-H_c$.

Таким образом, постоянный магнит может быть описан как с помощью задания коэрцитивной силы, так и с помощью неоднородных граничных условий Неймана на его границах. Выбор того или иного способа определяется соображениями удобства и наглядности.

Особо следует рассмотреть случай постоянных магнитов, обладающих нелинейными магнитными характеристиками. Магнитная проницаемость постоянного магнита определяется формулой:

$$B = \mu(B)(H + H_c),$$
$$\mu(H) = \frac{B}{H+H_c}.$$

Интегральные величины

• Ток через заданную поверхность

$$I = \int jds$$

и его сторонняя $I_{стор}$ и вихревая $I_{вихр}$ компоненты.

• Мощность тепловыделения в объеме

$$Q = \int g^{-1} j^2 dV.$$

• Суммарная магнитная сила, действующая на тела, заключенные в заданном объеме,

$$F = \frac{1}{2}\oint \big(H(n \cdot B) + B(n \cdot H) - n(B \cdot H)\big)\, ds,$$

где интегрирование ведется по поверхности окружающей заданный объем, а n – единичный вектор внешней нормали к поверхности.

• Суммарный момент магнитных сил, действующих на тела, заключенных в заданном объеме:

$$T = \frac{1}{2}\oint \big((r \times H)(n \cdot B) + (r \times B)(n \cdot H) - (r \times n)(H \cdot B)\big) ds,$$

где r – радиус-вектор точки интегрирования.

В плоско-параллельном случае вектор момента направлен параллельно оси z, в осесимметричном случае момент тождественно равен нулю. Момент вычисляется относительно начала координат, момент относительно произвольной точки может быть получен добавлением векторного произведения *F Ч r0*, где F – это полная сила, а $r0$ – радиус-вектор точки.

• Энергия магнитного поля

$$W = \frac{1}{2}\int (H \cdot B)dV$$ – в линейном случае

$$W = \int (\int_0^B H(B')dB')dV$$ – в нелинейном случае

• Потокосцепление на один виток обмотки:

$$\Psi = \frac{\oint Ads}{S}$$ – в плоскопараллельном случае;

$$\Psi = \frac{2\pi \oint rAds}{S}$$ – в осесимметричном случае;

интегрирование в данной формуле ведется по поперечному сечению обмотки, а S обозначает площадь этого поперечного сечения.

Для плоских задач все интегральные величины рассматриваются на единицу длины в осевом направлении.

Область интегрирования задается в плоскости модели в виде контура (при необходимости замкнутого), состоящего из отрезков и дуг окружностей.

II. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ»

1. Расчет поля постоянного магнита[1].
2. Вытеснение переменного тока в шине прямоугольного сечения.
3. Плунжерный электромагнит.
4. Симметричная двухпроводная линия.
5. Температурное поле в зубцовой зоне электрической машины.
6. Цилиндр с теплопроводностью, зависящей от температуры.
7. Двухпроводная линия передачи.
8. Линейный асинхронный двигатель.
9. Распределение температуры в проводнике с током.
10. Насос для перекачки жидкого металла.
11. Двухпроводная линия передачи.
12. Электрический двигатель.
13. Индукционная тигельная печь.
14. Расчет поля подковообразного постоянного магнита.
15. Расчет индуктивности дросселя броневой конструкции.
16. Проводник в ферромагнитном пазу.
17. Нестационарное температурное поле в зубцовой зоне электрической машины.
18. Расчет индуктивности кабеля.
19. Температурный отклик на быстрое изменение температуры внешней среды.
20. Изменение распределения температуры в пластине из ортотропного материала.
21. Расчет напряженного состояния тонкой перфорированной пластины.
22. Соленоидальный электромагнит установки термоядерного синтеза «Токамак».
23. Полый толстостенный цилиндр, подвергнутый нагреву и давлению.

[1] Все задачи, кроме 8,10,13, из источника [1].