

Современные модели и методы теории расписаний

А. С. Аничкин

<anton.anichkin@ispras.ru>

В. А. Семенов

<sem@ispras.ru>

ИСП РАН, 109004, Россия, г. Москва, ул. А. Солженицына, дом 25

Аннотация. Статья посвящена важной проблеме систематизации и концептуализации теории расписаний, которая находит применение в таких предметных областях как управление производством, организация транспортных потоков, планирование проектов, управление ресурсами в вычислительных системах. Однако разнообразие математических моделей и методов составления расписаний обычно ставит перед прикладными математиками и программистами проблему построения быстрого алгоритма, а также его эффективной программой реализации с учетом особенностей решаемой задачи. Использование типовых решателей в составе математических библиотек общего назначения для подобных целей крайне ограничено. Более перспективным для реализации программных приложений близкой функциональности представляется использование объектно-ориентированных каркасов. В статье предпринимается попытка систематизировать и обобщить модели и методы теории расписания с целью построения подобного каркаса. Главное внимание при этом уделяется задачам ресурсного планирования проектов, которые, с одной стороны, находят широкое практическое применение, а с другой стороны, — обобщают математические постановки, возникающие в смежных предметных областях и дисциплинах.

Ключевые слова: теория расписаний, календарно-сетевое планирование, программная инженерия, объектно-ориентированное программирование

1. Введение

Статья посвящена актуальной теме систематизации и концептуализации теории расписаний. Теория расписаний находит применение в таких предметных областях как управление производством, организация транспортных потоков, планирование проектов, управление ресурсами в вычислительных системах. Однако разнообразие математических моделей и методов составления расписаний обычно ставит перед прикладными математиками и программистами неизбежную проблему построения быстрых алгоритмов и их эффективной программой реализации с учетом особенностей

решаемой задачи. Использование типовых решателей в составе математических библиотек общего назначения для подобных целей крайне ограничено и неэффективно. Более перспективным для разработки приложений близкой функциональности представляется использование объектно-ориентированных каркасов (object-oriented framework). Организация каркаса в виде системы абстрактных и конкретных классов вместе с предусмотренными механизмами их взаимодействия обеспечивает надлежащую степень общности и гибкости инструментальной среды, необходимую для разработки специализированных приложений. Построению каркаса, как и любого программного приложения, базируемого на объектной парадигме, предшествует этап анализа и моделирования предметной области. В настоящей статье предпринимается попытка систематизировать модели и методы теории расписания с целью проведения их объектного анализа и построения универсального каркаса для реализации программных приложений. Статья представлена в виде обзора работ в области теории расписаний. При этом главное внимание уделяется задачам и методам ресурсного планирования проектов (Resource Constrained Project Scheduling Problem или, сокращенно, RCPSP), которые, с одной стороны, находят широкое практическое применение, а с другой стороны, — обобщают математические постановки, возникающие в смежных предметных областях и дисциплинах.

Задачи теории расписаний обычно формулируются как задачи оптимизации обслуживания конечного множества требований в системе, содержащей ограниченное число машин. Для каждого требования указывается время обработки на каждой машине, порядок обслуживания и сроки выполнения. Традиционно задачи теории расписания делят на четыре основных класса:

- постановка «открытая линия» (open shop) предполагает многостадийное выполнение каждого требования на заданном подмножестве машин в произвольном порядке;
- постановка «рабочий цех» (job shop) устанавливает для каждого требования строгий порядок выполнения на заданном подмножестве машин;
- постановка «потокоточная линия» (flow shop) фиксирует порядок использования машин и предполагает последовательное многостадийное выполнение каждого требования на каждой машине в установленном порядке; решением задачи является последовательность требований, при которой минимизируется общее время обслуживания;
- постановка с директивными сроками (release dates) предполагает задание для каждого требования времени обслуживания, а также директивных сроков его поступления и окончания. В отличие от многостадийных постановок, требования в данном классе задач могут

выполняться на одной машине. Поэтому обычно допускаются прерывания и произвольный порядок обслуживания требований. При наличии нескольких расписаний, удовлетворяющих предписанным директивным срокам, в качестве решения выбирается расписание с минимальным общим количеством прерываний.

Большинство практически содержательных задач составления расписаний допускают произвольные комбинации ограничений и дисциплин обслуживания и являются NP-полными задачами. Лишь немногие постановки с частными условиями могут быть решены за полиномиальное время. Например, расписание с прерываниями, удовлетворяющее директивным срокам при произвольном числе машин, может быть построено за $O(n^3)$ [[1]]. Для задач в постановке «поточная линия» расписание для двух машин с минимальным общим временем обслуживания может быть составлено за $O(n \log(n))$ [[1]]. Тем самым, вычислительная сложность задач может существенно варьироваться в зависимости от конкретных условий. Развернутые обзоры задач теории расписаний с анализом их вычислительной сложности можно найти в ряде источников [[2], [3]].

Примечательно, что постановки «открытая линия», «рабочий цех» и «поточная линия» являются частными случаями задач ресурсного планирования проектов [[4]]. Более того, известные задачи об упаковке в контейнеры (линейная, двумерная упаковка) [[5]], разнообразные постановки «О рюкзаке» (упаковки по стоимости и весу) [[6]], классическая задача «О коммивояжере», а также задачи составления расписаний в учебных заведениях могут формулироваться и решаться как задачи ресурсного планирования RCPSP [[7], [8], [9], [10]]. Тем самым, обсуждаемый класс задач приобретает особое значение в контексте проводимой систематизации и концептуализации теории расписаний, а также в связи с построением универсального объектно-ориентированного каркаса для разработки программных приложений.

Поскольку в теории расписаний нет единой принятой терминологии, в дальнейшем мы будем применять понятия ресурсного планирования. Вместо «требование», «активность», «процесс» или «операция» будем употреблять термин «работа». Вместо «машина» и/или «станок» будем использовать понятие «обобщенный ресурс», который охватывает как возобновляемые ресурсы (например, комплект оборудования или штат сотрудников), так и не возобновляемые ресурсы (связанные, например, с материальными и финансовыми затратами). Классическая RCPSP-задача ставится как задача минимизации общего времени выполнения всего проекта при соблюдении временных отношений между работами и не нарушении условий доступности ресурсов. Математическая формализация классической задачи была проведена Притскером [[11]], а её NP-полнота доказана Блазевицем [[12]].

Для решения классической RCPSP-задачи были разработаны точные и приближенные методы [[13], [14], [15]]. Первую группу составляют метод прямого перебора, метод «ветвей и границ» [[16]], методы линейного

программирования [[17]], метод динамического программирования [[18]] и метод декомпозиции [[19]]. Методы обеспечивают поиск оптимального расписания, но в силу высокой вычислительной сложности применимы лишь к небольшим проектам. Приближенные методы, такие как метод Монте-Карло [[20]], метод частичного перебора [[21]], метод направленного перебора [[21]], упрощенный метод «ветвей и границ» [[16]], а также современные методы последовательного и параллельного составления расписаний на основе эвристических правил [[22]] позволяют генерировать эффективные расписания для масштабных проектов за разумное время [[15], [23]].

С релаксацией ресурсных ограничений вычислительная сложность RCPSP-задачи может быть существенно понижена. Так, при отсутствии ресурсных ограничений задача вовсе сводится к задаче поиска наидлиннейшего пути в плане, которая решается методом критических путей (Critical Path Method или, сокращенно, СРМ) за линейное время $O(n)$. Кроме упомянутой классической задачи опубликовано значительное число работ, посвященных частным и обобщенным постановкам ресурсного планирования. Главным образом они отличаются целевыми функциями, способами исполнения работ, типами временных или иных ограничений, а также моделями ресурсов. Немногие из этих задач получили практическое распространение и лишь несколько методов составления расписаний для RCPSP-задач реализованы в составе современных программных систем управления проектами. Причина, видимо, заключается в сложности поддержки многовариантных постановок и трудности обобщенной программной реализации методов планирования, рассчитанной на широкие классы задач.

В разделе 2 мы рассматриваем классическую постановку RCPSP-задач, а также уточняем роль нотации Грэхэма [[24]] и правил Брюкера [[25]] в систематизации и классификации задач теории расписания. Раздел 3 посвящен анализу моделей ресурсов, применяемых в задачах планирования проектов. Выделение классов возобновляемых, не возобновляемых, ограничено-возобновляемых, частично возобновляемых, эксклюзивных, логистических, непрерывно разделяемых ресурсов и ресурсов с переменной доступностью позволяет охватить наиболее содержательные случаи. В разделе 4 детально обсуждаются особенности моделей исполнения работ. Особое внимание уделяется работам с прерываниями, альтернативным режимам исполнения работ, профилям использования ресурсов, учету накладных расходов, а также обеспечению компромиссов. Важные факторы календарно-сетевое планирования, включая основные виды временных ограничений, рассматриваются в разделе 5. Проводимый анализ охватывает отношения предшествования с минимальными и максимальными лагами, явные временные ограничения, ограничения рабочего времени и логические зависимости между работами. Наконец, в заключительном 6 разделе обсуждается выбор целевой функции, необходимой для корректной постановки соответствующей оптимизационной задачи Минимизация

временных показателей проекта, устойчивость к задержкам, обеспечение консервативности расписания, минимизация затрат на возобновляемые и не возобновляемые ресурсы, минимизация общей стоимости проекта, максимизация чистой приведенной стоимости могут применяться в качестве критериев поиска оптимального расписания.

В заключении мы подводим итог проведенному анализу современных моделей и методов теории расписаний, а также выделяем основные категории объектов, которые могут быть положены в основу универсального объектно-ориентированного каркаса для разработки программных приложений.

2. Классическая постановка RCPSP-задачи

Классическую постановку RCPSP-задачи составления расписания можно формализовать следующим образом. Исходными данными является проект, состоящий из J работ. Каждая работа имеет свой номер (индекс) $j = 1, 2, \dots, J$. Кроме того каждая работа j характеризуется временем своего выполнения (продолжительностью) p_j , которое может быть нулевым ($p_j \geq 0$). На работу могут накладываться технологические ограничения, связанные с невозможностью начать её выполнение ранее, чем завершатся одна или более связанные с ней предыдущие работы, именуемые предшественниками. Данная работа по отношению к своим предшественникам является последователем. P_j является множеством, содержащем всех предшественников работы j . Взаимозависимости между работами не должны иметь циклический характер.

Кроме работ в проекте может присутствовать K возобновляемых ресурсов. Максимально доступное количество каждого ресурса $k = 1, 2, \dots, K$ ограничено константой R_k . Каждая работа j может требовать для своего выполнения некоторое количество r_{jk} ресурса k . Причём r_{jk} не может превышать предел доступности R_k ресурса k . Потребляемых работой ресурсов может быть несколько. Потребление ресурса работой означает, что с началом выполнения работы j ресурс k в количестве r_{jk} считается занятым, то есть не доступным для выполнения других работ, а с окончанием выполнения работы данное количество ресурса высвобождается. Таким образом потребление ресурса носит равномерный характер в течение всего времени выполнения работы. Работы с нулевой продолжительностью не требуют для своего выполнения ресурсов, так как время захвата ресурсов совпадает с временем их высвобождения.

Работа не может быть прервана, то есть если работа была начата, то она не может приостановиться и временно высвободить все используемые ею ресурсы. Для упрощения вычисления временных рамок выполнения всего проекта вводится две дополнительные фиктивные работы с нулевой продолжительностью ($j = 0$ и $j = J + 1$), соответствующие началу и завершению всего проекта. Первая работа ($j = 0$) становится предшественником для всех работ, ранее не имевших предшественников.

Последняя ($j = J + 1$) – последователем для всех работ, ранее не имевших последователей.

Все данные считаются известными и детерминированными. Все параметры и константы являются целочисленными и неотрицательными. Неизвестными считаются время S_j и время C_j начала и завершения работы $j = 0, 1, \dots, J, J + 1$ соответственно, причём $C_j = S_j + p_j$.

Классическая RCPSP задача построения расписания сводится к поиску (вычислению) всех значений S_j и/или C_j таких, чтобы время выполнения всего проекта $C_{MAX} = C_{J+1}$ было минимальным из всех возможных. В терминах общепринятой нотации Грэхема [[24]] данная задача обозначается как $PS|prec|C_{MAX}$.

Нотация Грэхема для обозначения классов задач теории расписания представляет собой комбинацию трёх характеристик $\alpha|\beta|\gamma$. Первая характеристика α может задаваться только одним значением, однозначно определяющим модель ресурсов. Вторая характеристика β описывает используемую модель исполнения работ. Данная характеристика может быть представлена одним или несколькими значениями или отсутствовать вовсе. Третья характеристика γ определяет целевую функцию, минимизация которой и является задачей составления оптимального расписания. Сама целевая функция может быть как простой, так и составной. Задание данной характеристики является обязательным, поскольку именно она определяет стратегию поиска решения и качество полученного результата.

3. Модели ресурсов

3.1. Не возобновляемые и ограничено-возобновляемые ресурсы

В классической постановке RCPSP-задачи рассматриваются только, так называемые, возобновляемые ресурсы, которые доступны в любой момент времени в фиксированном количестве. Однако часто рассматривают три вида ресурсов: возобновляемые (renewable), не возобновляемые (nonrenewable) и ограничено-возобновляемые (doubly constrained). Такая классификация впервые была предложена в [[26], [27]].

Доступность возобновляемых ресурсов, таких как рабочие или машины, определяется в каждый момент времени. Ограничения, связанные с не возобновляемыми ресурсами, например, с бюджетным планом, распространяются на весь проект. Классическая RCPSP-задача предусматривает задание только возобновляемых ресурсов. Не возобновляемые ресурсы могут учитываться, например, в рамках мультимодальной постановки (см. раздел 0). В классической постановке сумма потраченных не возобновляемых ресурсов всегда будет одинаковой вне зависимости от построенного расписания.

Как правило, при планировании учитываются как возобновляемые, так и не возобновляемые ресурсы. В терминах $\alpha|\beta|\gamma$ нотации данная ресурсная модель обозначается как $\alpha = MPS; R; N$. Это обозначение несколько отличается от оригинального, приведённого Брюккером в публикации [[25]]. Однако данное обозначение удачно отражает комбинированный характер ресурсной модели.

Ограниченно-возобновляемые ресурсы сочетают в себе особенности как возобновляемых, так и не возобновляемых ресурсов. Ограничения, заданные для них, содержательны как для определенных моментов времени, так и на протяжении всего периода выполнения. К ресурсам данного вида следует отнести рабочего, который не может быть задействован в более чем в пяти работах за весь период выполнения проекта. Однако, такая двойственность позволяет интерпретировать ограничено-возобновляемые ресурсы как простую комбинацию возобновляемых и не возобновляемых ресурсов, избегая выделение самостоятельного вида.

3.2. Частично возобновляемые ресурсы

Понятие частично возобновляемого ресурса (partially renewable resource) впервые было введено в [[28]]. Суть данной ресурсной модели заключается в следующем. Для каждого частично возобновляемого ресурса k имеется множество Π_k , представленное временными подмножествами Q_{ki} . Считается, что ресурс k доступен в количестве $R_k^{\Pi}(Q_{ki})$ в течение времени, определённого подмножеством $Q_{ki} \subseteq \{1, \dots, T\}$, где $Q_{ki} \in \Pi_k$ и T – условное время завершения проекта. Потребление ресурса k работой j по-прежнему представляет собой константное значение r_{jk} . В более общем случае потребление частично возобновляемого ресурса определяется для каждого подмножества Q_{ki} . Другими словами, данный вид ресурсов позволяет определить несколько альтернативных сценариев их потребления и доступности. Примером является обычный рабочий, который может работать либо каждый день с понедельника по пятницу, либо только в выходные, но не все семь дней. Π_k в этом случае будет состоять из двух подмножеств: с понедельника до пятницы (Q_{k1}) и с субботы до воскресенья (Q_{k2}). При этом $R_k^{\Pi}(Q_{k1}) = R_k^{\Pi}(Q_{k2}) = 1$.

Авторы публикации [[29]] рассмотрели данную ресурсную модель в рамках мультимодальной постановки RCPSP-задачи (см. раздел 0). В публикации [[30]] авторами был рассмотрен частный случай данной ресурсной модели, когда подмножества Q_{ki} представляют собой временные интервалы $[t_1, t_2]$. Такой подход представляется более естественным, поскольку ресурсы обычно доступны на некотором промежутке времени, пусть даже и очень коротком.

Для обозначения ресурсного планирования с частично возобновляемыми ресурсами обычно используют $\alpha = PS; PR$.

3.3. Логистические ресурсы

Понятие логистического (или кумулятивного) ресурса (cumulative resource) было введено в [[31]], в где оно рассматривалось в сочетании с минимальными и максимальными временными лагами (см. разделы 0 и 0) в рамках RCPSP-задачи. Данный вид ресурсов позволяет учитывать процессы производства, связанные с временным размещением промежуточных результатов деятельности на некоторой площади, в резервуаре или таре, которые в этом случае следует рассматривать в качестве самостоятельных логистических ресурсов. Следует отметить, что логистические ресурсы могут определяться как в контексте возобновляемых, так и не возобновляемых ресурсов.

Логистический ресурс характеризуется своей номинальной ёмкостью R_k и некоторым её запасом \bar{R}_k . Каждая работа j может производить или потреблять (перерабатывать) продукцию в объёме r_{jk} ($r_{jk} > 0$ в случае производства и $r_{jk} < 0$ в случае потребления). Использование подобной модели обозначается как $\alpha = PS; Cu$.

В публикации [[32]] логистические ресурсы рассматривались в рамках мультимодальной постановки RCPSP-задачи (см. раздел 0) применительно к процессам разработки и тестирования в автомобильной промышленности. Тестовый автомобиль моделировался в качестве логистического ресурса, который сначала производился (занимал некоторый объём), потом использовался (занимаемый объём не изменялся), а затем уничтожался в краш-тесте (объём освобождался). В публикациях [[33], [34]] данные ресурсы применялись для планирования серийного производства в обрабатывающей промышленности.

3.4. Непрерывно разделяемые ресурсы

В классической постановке доступность ресурсов рассчитывается дискретным образом. В [[35]] авторами рассматривается возможность их произвольного непрерывного исчисления и разделения (continuous resource). Это вполне естественно для проектов с ресурсами, представляющими собой, например, энергетические источники или какие-либо жидкие расходные материалы. Примечательно, что данная возможность применима как к возобновляемым, так и не возобновляемым ресурсам [[36]]. В нотации $\alpha|\beta|\gamma$ использование данного ресурсного концепта обозначается как $\alpha = PS; Co$.

Более сложные постановки, связанные с непрерывно разделяемыми ресурсами, рассматривались в [[37], [38], [39], [40]]. Следует отметить публикацию [[41]], в которой фактор непрерывности применялся для ограничено возобновляемых ресурсов.

3.5. Эксклюзивные ресурсы

Эксклюзивными называются ресурсы (dedicated resource), которые в один момент времени могут быть использованы только в одной работе [[42], [43]]. Такие ресурсы могут моделироваться возобновляемыми ресурсами с лимитом использования $R_k = 1$ в любой момент времени. Поэтому постановки с подобными ресурсами являются частными случаями RCPSP-задачи. Авторы работ [[44], [45]] использовали дизъюнктивную функцию планирования для интерпретации RCPSP-задач с эксклюзивными ресурсами. В $\alpha|\beta|\gamma$ нотации данный вид ресурсов представляется как $\alpha = PS; Rm, 1, 1$, что говорит о наличии в проекте m возобновляемых ресурсов с доступным количеством 1 и использованием в работах в количестве 1.

3.6. Ресурсы с переменной доступностью

В классической постановке уровень доступности возобновляемых ресурсов фиксирован на протяжении всего проекта. Подобное допущение не всегда выполняется на практике. Например, в реальных проектах количество доступных специалистов может варьироваться в связи с периодическими отпусками, занятостью в других работах и т.п.

Чтобы учитывать данный фактор, вводится понятие доступности возобновляемого ресурса k в момент времени t как функции времени $R_k(t)$. Ресурсы с переменной доступностью рассматривались в работах [[33], [46], [47], [48], [49], [50], [51]]. Часто данная модель применяется в задачах планирования работ с прерываниями (см. раздел 0). В [[52]] обсуждаются аспекты применения данной модели в медицинских исследовательских проектах для контроля доступности исследовательского персонала и лабораторного оборудования.

В нотации $\alpha|\beta|\gamma$ переменная доступность ресурсов отражается как $\alpha = PS; Rm; *, *$, что означает наличие в проекте m возобновляемых ресурсов с переменной доступностью и произвольными уровнями потребления в работах.

Авторы публикации [[9]] ввели понятие дизъюнктивных ресурсов с доступностью, изменяемой во времени от 0 до 1. Заметим, что этот случай соответствует ограниченной функции $R_k(t) \in \{0, 1\}$ и является вариацией эксклюзивных ресурсов. В работе [[53]] рассматривается задача, в которой доступность ресурсов изменяется только в определённые моменты времени, связанные с вехами проекта (milestone).

В работе [[54]] показано, что задача с ресурсами переменной доступности может быть редуцирована к задаче с ресурсами фиксированной доступности путем введения минимальных и максимальных лагов. Для этого предлагается заменить переменную доступность $R_k(t)$ ресурса k на постоянную, соответствующую максимальному значению доступности ресурса за всё время выполнения проекта ($R_k = \max_{0 \leq t \leq T} R_k(t)$), а в периоды, когда доступность меньше максимальной, ввести фиктивные работы, компенсирующие избыток

ресурса ($r_{jkt} = R_k - R_k(t)$). Местоположение таких фиктивных работ в расписании предполагается зафиксировать с помощью минимальных и максимальных временных лагов.

Следует отметить, что задачи с ресурсами переменной доступности являются частными случаями RCPSP-задач с частично возобновляемыми ресурсами.

4. Модели исполнения работ

4.1. Работы с прерываниями

Классическая постановка не допускает прерываний уже начатых работ. Однако рядом исследователей рассматривались работы с прерываниями (preemptive scheduling), которые могут происходить в дискретные моменты времени, обычно, кратные точности представления временных интервалов [[9], [30], [55], [56]]. В нотации Брюкера такие задачи обозначаются как $prmt$ в поле β [[25]]. Изучалась также модель выполнения, допускающая фиксированное число прерываний, не превышающее для каждой индивидуальной работы некоторый заданный порог [[57]]. В [[58], [59]] предлагается определить первоначальный интервал, на протяжении которого работы не могут прерываться. Менее содержательной, на наш взгляд, выглядит модель, описанная в работе [[55]] и устанавливающая возможность параллельного исполнения отдельных стадий работы, сформированных в результате прерываний (fast tracking). Довольно часто прерывания работ интерпретируются в терминах календарей, которые устанавливают допустимые интервалы для проведения работ [[33], [60]]. Однако календари обычно учитываются при вычислении дат начала и завершения работ с учетом выходных и рабочих дней. Поэтому их использование для моделирования прерываний кажется искусственным.

4.2. Профильное использование ресурсов

В традиционной постановке предполагается, что каждая работа j может требовать для своего выполнения некоторое фиксированное количество r_{jk} ресурса k , которое не может изменяться в ходе выполнения. Данная ресурсная модель естественным образом обобщается путем введения профиля r_{jkt} для каждого t -ого интервала выполнения работы j при потреблении ресурса k . Так называемые, зависимые от времени ресурсы (time-dependent resources) находят применение во многих приложениях [[52], [61], [62]]. Тем не менее, существует довольно элегантный прием смоделировать эту ситуацию путем представления работы эквивалентной цепочкой подзадач с фиксированными уровнями потребления ресурса [[54]]. Чтобы избежать наложения или прерывания подзадач по времени, для каждой пары соседей i и $i + 1$ в цепочке устанавливаются минимальные и максимальные лаги с нулевой задержкой (см. разделы 0 и 0).

4.3. Учет накладных временных затрат

Другим направлением в развитии модели исполнения работ является учёт времени подготовки используемых работой ресурсов (setup times), например, для переналадки оборудования. В [[63]] рассматриваются три альтернативы, выражающие характер зависимости времени подготовки от последовательности работ или всего плана работ, в которых задействован ресурс. Соответственно, различают времена подготовки, независимые от последовательности (sequence-independent setup times), зависимые от последовательности (sequence-dependent setup times) и зависимые от расписания (schedule-dependent setup times). Первые учитывают зависимость времени подготовки ресурса от него самого и работы, в котором он участвует. Вторые принимают во внимание и предшествующую работу, использующую тот же ресурс. Наконец, третьи учитывают характер использования ресурсов всеми предшественниками. В нотации Брюкера [[25]] независимые от последовательности и зависимые от последовательности времена обозначаются в поле β как s_j и s_{ij} соответственно.

В [[64]] обсуждаются иные временные факторы, в частности, рассматриваются факторы перенастройки и/или отключения/консервации/вывода из эксплуатации ресурса (removal times). Хотя временные факторы подготовки ресурсов обычно рассматриваются как самостоятельные концептуальные элементы, часто для их представления и учета используется мультимодальность исполнения работ (см. раздел 0) [[33], [65]] или механизмы прерываний и параллельного исполнения работ в сочетании с мультимодальностью [[66]].

4.4. Альтернативные режимы исполнения работ

В традиционной постановке каждая работа выполняется единственным способом, однозначно определяемым заданной продолжительностью и требуемым количеством ресурсов. Начиная с пионерской работы Эльмагхраби [[67]], концепция работ была существенно пересмотрена в сторону поддержки альтернативных (или мультимодальных) режимов M_j для каждой индивидуальной работы j . Каждый режим t отражает один из реализуемых способов исполнить работу за фиксированный период p_{jm} при фиксированном количестве r_{jmk} ресурса k . Изменения режима в ходе выполнения работы и во время её прерывания не допускаются. Класс задач планирования, допускающих мультимодальное исполнение работ, называют Multimodal Resource Constrained Project Scheduling Problem или, сокращенно, MRCPSP. Решением задачи MRCPSP является расписание, которое включает в себя не только даты начала работ S_j , но и режимы t_j , в котором следует выполнять работы. В нотации Брюкера данный класс задач обозначается как MPS в соответствующем поле α .

Задачи MRCPSP с возобновляемыми ресурсами активно изучались в последнее время [[49], [68], [69], [70], [71], [72], [73]]. Постановки MRCPSP с обобщенными отношениями предшествования (лагами) рассмотрены в публикациях [[9], [48], [65], [74], [75], [76], [77]], а постановки с обобщенными ресурсными ограничениями — в [[29]]. В публикациях [[78], [79], [80]] вводится и обосновывается понятие качества мультимодального расписания, как некоторой интегральной характеристики, отражающей важность и приоритетность использования одних режимов над другими. В публикациях [[65], [81]] рассматриваются группы работ, на которые накладываются условия их согласованного выполнения в одних и тех же режимах (mode identity constraints).

4.5. Учет компромиссов

В RCPSP-задачах выделяют два рода компромиссов: компромисс между временем исполнения всего проекта и уровнями потребления ресурсов, а также компромисс между временем исполнения проекта и его стоимостью.

В задаче поиска компромиссного расписания первого рода вводится понятие нагрузки φ_j для работы j . Работа может быть выполнена при любой дискретной комбинации времени выполнения p_j и потребления ресурса r_{jk} , такой что $p_j r_{jk} \geq \varphi_j$. При этом содержательными являются комбинации минимальных допустимых пар значений, для которых имеет место $(p_j - 1) r_{jk} < \varphi_j$ и $p_j (r_{jk} - 1) < \varphi_j$. Задача обеспечения компромисса первого рода для возобновляемых ресурсов исследовалась в публикациях [[82], [83], [84]].

В задаче поиска компромиссного расписания второго рода во внимание принимается единственный не возобновляемый ресурс, который играет роль бюджета проекта. При этом ставится задача минимизации времени выполнения проекта при фиксированном уровне бюджета, а также двойственная ей задача минимизации бюджета проекта при заданном предельном сроке его окончания (deadline) [[85], [86]].

Примечательно, что обе постановки могут рассматриваться как частные случаи задачи MRCPSP с альтернативным исполнением работ. Единственное отличие состоит в том, что в задачах поиска компромиссных расписаний вместо допустимых комбинаций значений времени выполнения работы и потребляемыми ею ресурсами явно оперируют с нагрузками. Иногда, чтобы подчеркнуть этот нюанс, для описания этого класса задач уточняют нотацию $\alpha = T_{tr}PS$. В постановке $\alpha = T_{tc}PS$ при заданном крайнем сроке окончания проекта минимизируется бюджет, причем функция стоимости имеет квадратичную зависимость от задержки фактических сроков выполнения работ [[87]].

5. Временные ограничения

5.1. Предшествования с минимальными лагами

В классической постановке работа не может стартовать пока все предшественники не завершат выполнение. Понятие простого предшествования обычно расширяется введением минимального временного лага d_{ij}^{FS} , определяющее ограничение на возможный старт последователя j относительно времени завершения предшественника i как $C_i + d_{ij}^{FS} \leq S_j$. Отрицательные значения лагов допускаются, означая, что работы могут выполняться с наложением временных интервалов. Часто в приложениях рассматривается сразу четыре вида временных лагов d_{ij}^{FS} , d_{ij}^{SS} , d_{ij}^{SF} , d_{ij}^{FF} , связывающие времена старта или завершения предшественника со временем старта или завершения последователя. При условии фиксированной продолжительности планируемых работ данные ограничения легко трансформируются друг в друга [[54]], однако при наличии альтернативных сценариев выполнения работ и актуализации проектного плана поддержка ограничений всех видов является необходимой.

Для данных видов ограничений используется значение $temp$ для поля β в нотации Брюкера [[25]]. Ограничения данного вида рассматриваются в многочисленных публикациях [[47], [50], [51], [88], [89], [90], [91]], однако в публикации [[92]] было отмечено, что данные ограничения могут использоваться для моделирования процессов настройки ресурсов и загрузки производственных линий (sequence-independent setup times).

5.2. Предшествования с максимальными лагами

Аналогично отношениям предшествования с минимальным лагом вводятся временные ограничения с максимальным лагом. Для предшественника i и последователя j данный вид отношений выражается следующим образом: $C_i + d'_{ij}^{FS} \geq S_j$. Задание ограничения данного вида означает, что последующая работа должна стартовать не позже, чем через d'_{ij}^{FS} временных единиц после завершения предшествующей работы. Заметим, что одновременное задание нулевого минимального лага и нулевого максимального лага означает, что последователь должен стартовать сразу после завершения предшественника. Комбинация времен начала и завершения работ для отношения предшествования приводит к четырем видам максимальных лагов d'_{ij}^{FS} , d'_{ij}^{SS} , d'_{ij}^{SF} , d'_{ij}^{FF} , аналогичных ранее рассмотренных. Класс задач планирования, в которых допускается одновременное использование минимальных и максимальных лагов часто обозначается как *RCPSP/max*. Он был рассмотрен в ряде публикаций [[33], [54], [93], [94], [95], [96], [97], [98]]. В контексте анализа альтернативных сценариев выполнения работ он изучался также в публикациях [[9], [74], [75], [76], [77]]. А в [[99]] для них предложена

довольно интересная модель лагов, учитывающая режимы выполнения предшественника m_i и последователя m_j . Однако, следует отметить, что использование максимальных временных лагов способно привести к циклическим структурам. Этот аспект подробно рассмотрен в публикации [[100]].

5.3. Явные временные ограничения

В расширенной RCPSP постановке могут применяться такие понятия, как директивный срок выполнения работы и крайний срок выполнения работы (deadline). Принципиальная разница между этими понятиями заключается в том, что значение первого носит рекомендательный характер, а второго – обязательный. В первом случае работу желательно выполнить к назначенному сроку. Причём опережение или запаздывание может «наказываться» штрафом. Во втором случае работа обязана завершиться до заданного крайнего срока. Нарушение этого условия делает дальнейший поиск расписания бессмысленным. Возможны случаи, когда данное условие не может быть соблюдено ни при каких обстоятельствах. Это лишь означает, что исходная задача планирования поставлена математически некорректно.

Существуют также понятия директивного и самого раннего срока начала выполнения работы. Первое носит рекомендательный характер, второе – строго обязательный. Однако понятие директивного срока начала выполнения работы применяют крайне редко, так как оно однозначно связано с более важным директивным сроком завершения работы. Поэтому в публикациях чаще всего рассматриваются самый ранний срок начала и крайний срок завершения выполнения работы, а также директивный срок завершения работы. Задачам с директивными сроками завершения работ посвящены многочисленные публикации [[98], [101], [102], [103], [104]]. Основное внимание при этом уделяется минимизации штрафов, возникающих из-за нарушения директивных сроков выполнения работ.

Понятия самого раннего и крайнего сроков выполнения работ, а также их применения в задачах планирования подробно рассматриваются в публикациях [[37], [39], [47], [61], [89], [105]]. Отдельного внимания заслуживает работа [[105]], авторы которой рассмотрели, так называемую, кумулятивную задачу построения расписания. Это задача ресурсного планирования, в которой отсутствуют отношения предшествования между работами, однако для каждой работы определены самый ранний срок начала и крайний срок завершения. В результате все работы оказываются «запертыми» в некоторых временных рамках, а иногда и строго фиксируемыми по времени исполнения.

Следует заметить, что задание самого раннего срока начала выполнения работы эквивалентно определению минимального временного лага относительно стартовой вехи проекта, а задание крайнего срока завершения — определению максимального временного лага относительно финальной вехи

проекта. Данное наблюдение позволяет представлять и разрешать временные ограничения в рамках единой дисциплины обработки отношений предшествования.

В нотации $\alpha|\beta|\gamma$ ограничения, накладываемые на начало выполнения работы j , соответствуют обозначению t_j , а накладываемые на завершение работы — d_j .

5.4. Ограничения рабочего времени

Понятие ограниченного рабочего времени было введено в [[106]]. Временная шкала, в соответствии с которой проводится планирование, разбивается на циклически повторяющиеся рабочие и нерабочие временные окна или интервалы. Каждая работа может начать своё выполнение только в рабочее время. Продолжительность выполнения работы не распространяется на нерабочие интервалы. Например, нормированный рабочий день предполагает наличие интервалов с 9 часов утра до 17 часов вечера каждый день, кроме субботы и воскресенья и исключая возможные обеденные перерывы.

В [[9]] отмечена возможность моделирования рабочих интервалов с помощью дополнительного возобновляемого ресурса, лимит доступности которого равен 1 в рабочее время и 0 — в нерабочее. В работе [[107]] авторы применили дисциплину ограничения рабочего времени при компромиссном планировании проекта с соблюдением требований к срокам реализации проекта и его стоимости.

5.5. Иные временные ограничения

В работе [[32]] было введено отношение частичного порядка между работами. Данное отношение применялось в проектах автомобилестроительной отрасли, связанных с проведением инженерных и тестовых работ. Отношение частичного порядка между работами i и j подразумевает, что либо работа i должна быть завершена до начала работы j , либо данные работы должны выполняться в разных режимах (то есть использовать разные ресурсы). Подобное отношение может устанавливаться, если выполнение работы j предполагает уничтожение ресурса, который мог быть использован другой работой i . Например, работы по сборке автомобиля должны предшествовать краш-тесту, в результате которого автомобиль разрушается.

В работе [[52]], посвящённой медицинским исследовательским проектам, применяется отношение между работами, исключающее их завершение за один и тот же временной период. При этом не уточняется, какая работа должна быть завершена первой. В работе [[9]] вводится ограничение параллельности. Данное ограничение предполагает принудительное выполнение двух и более работ параллельно на одном и том же отрезке времени. Там же рассматривается противоположный случай, когда отрезки выполнения работ не могут пересекаться. Кроме того, авторы обобщили

данное условие введением временного лага с момента окончания одной работы до начала другой. Следует отметить, что данное ограничение не может моделироваться отношениями предшествования с минимальными и максимальными лагами, поскольку очерёдность выполнения работ не определена. Авторы публикации [[9]] также ввели понятие «коридора параллельности» $[l, u]$, который предполагает, что ассоциируемые с ним работы должны выполняться параллельно в течении l временных единиц по крайней мере, но не более, чем в течении u временных единиц.

Представляет несомненный практический интерес также отношение предшествования с лагом, выраженном в процентном соотношении [[39]]. Оно предполагает установку процентного значения лага g_{ij} между работами i и j , и означает, что работа j не может начаться раньше, чем работа i завершится на g_{ij} процентов. При этом процент завершения стартовавшей работы j не может превышать процента завершения работы i . Такой вид временных ограничений важен для проектов, в которых моменты начала работ разделены по времени и не допускается опережение одних работ другими.

В работе [[46]] рассматривается довольно занятное ограничение, которое предполагает, что никакая работа k не может быть запланирована между заданными работами i и j . В работе [[48]] используется близкий вид ограничений, в котором еще учитывается зависимость от возобновляемого ресурса. Работа j , связанная данным ограничением с работой i , не может начаться раньше, чем завершится работа i , при этом ни одна другая работа k , которая использует некоторый заданный в отношении ресурс r , не может начаться после завершения работы i и до начала работы j . Данный вид ограничений может использоваться, например, для обеспечения гарантии, что никакая посторонняя работа не сможет начаться между вспомогательной работой по установке ресурса и работой, непосредственно использующей данный ресурс.

Временные ограничения на перемещения ресурсов рассматриваются в [[108]]. Согласно предложенной модели перемещение ресурса r из местоположения, в котором данный ресурс использовался при выполнении работы i , в местоположение, в котором он будет использоваться работой j , занимает Δ_{ijr} временных единиц. Данное время может явно задаваться или насчитываться по местоположению проведения работ.

5.6. Логические зависимости

Авторы некоторых публикаций [[109], [110]] предпочитают ассоциировать работы с дополнительной логикой в исполнении последователей. Согласно этой модели работы, заданные в классической постановке, следует интерпретировать как логические операции «И», поскольку все последователи рано или поздно обязаны быть выполнены. Однако рассматриваются также логические операции «ИЛИ» и «Исключающее ИЛИ». Первый тип операций

предполагает, что хотя бы один последователь должен быть выполнен. При втором типе выполняется строго один последователь. По мнению авторов подобная модель может у спешно применяться при моделировании проектов научно-исследовательской и опытно-конструкторской деятельности. Например, после работы «Тестирование прототипа», ассоциируемой с операцией «Исключающее ИЛИ», должна быть выполнена либо работа «Доработка прототипа», либо работа «Начало производства». Выполнение одной работы исключает выполнение другой. При этом решение о том, какая работа будет выполняться, принимается после завершения работы предшественника. Часто в литературе подобные зависимости рассматривают в контексте стохастического подхода [[111]]. Однако, данная модель вполне жизнеспособна и для планирования детерминированных процессов.

В работе [[112]] рассматриваются иные зависимости. Авторы предлагают использовать явные взаимосвязи между двумя работами i и j , отличные от отношений предшествования. Ими могут быть связаны любые работы i и j , в том числе не имеющие общего предшественника или последователя. Изложенная в работе модель предполагает также использование трёх типов логических операций: «И», «ИЛИ» и «Исключающее ИЛИ». Подобная модель использовалась при планировании наземных процессов в аэропорту, таких как заправка топливом, чистка салона, снабжение питанием. Следует заметить, что описанная модель является более гибкой, чем описанные ранее логические зависимости. Модель также обобщается на случай отношений между двумя и более работами.

6. Целевые функции

6.1. Минимизация временных показателей проекта

Целевые функции временных показателей являются наиболее распространёнными, так как чаще всего расписание ориентированно на оптимизацию именно временных характеристик проекта. Самой распространённой целевой функцией является уже упомянутая в классической постановке минимизация времени выполнения всего проекта C_{MAX} .

Однако существуют и пользуются достаточной популярностью и другие целевые функции, оперирующие такими временными показателями, как задержка, запаздывание и опережение. Данные понятия тесно связаны с понятием директивного срока d_j выполнения работы j – временем, не позже которого работа должна быть завершена. Исходя из этого, задержкой работы j является значение $L_j = C_j - d_j$. Запаздывание схоже с задержкой с той лишь разницей, что не может быть отрицательным, то есть запаздывание $T_j = \max\{0, (C_j - d_j)\}$. Аналогично определяется и опережение $E_j = \max\{0, (d_j - C_j)\}$.

В некоторых публикациях [[30], [90], [101], [113]] рассматривается минимизация взвешенного запаздывания. Заметим, что минимизация времени выполнения всего проекта является частным случаем данной целевой функции. В работе [[98]] описывается функция минимизации наибольшей задержки и суммарного взвешенного запаздывания, а в [[114]] обсуждается целевая функция, ориентированная на минимизацию суммы всех взвешенных значений опережения и запаздывания. Такая целевая функция позволяет планировать проект с временем завершения каждой работы предельно близким к соответствующему ей директивному сроку выполнения, то есть «точно в срок». При этом если работу не удаётся выполнить в срок, весовые коэффициенты позволяют нивелировать между опережением и запаздыванием для каждой работы (то есть устанавливать приоритет одного над другим). Иногда минимизации суммы абсолютных значений опережения и запаздывания для каждой работы рассматривается в рамках мультимодальной постановки RCPSp-задачи [[115]]. Альтернативной целевой функцией может быть минимизация максимального из всех значений опережения и запаздывания. В работе [[116]] предлагается вариация предыдущей целевой функции с той лишь разницей, что опережение и запаздывание изменяются относительно некоторого определённого отрезка времени («временного окна»), в течение которого работа должна быть выполнена.

В публикации [[117]] автор предложил определить набор «временных окон» для каждой работы. Исходя из некоторых соображений качества и выгоды, желательно, чтобы работа была выполнена в одно из этих «временных окон». Целевая функция, описанная в работе, ориентирована на минимизацию штрафов, возникающих в случае выполнения работы вне выделенного ей «временного окна». Стимулом для разработки такого подхода послужил один биотехнологический проект. В работе отмечено, что предложенный подход подобен временным ограничениям, налагаемым на работу: «временные окна» могут представлять собой жёсткие временные ограничения.

В работе [[30]] предлагается минимизировать сумму всех времён завершения работ, в то время как в публикации [[118]] предлагается минимизировать их взвешенную сумму. Развитием данных подходов является целевая функция минимизации среднего времени потока [[119]], которое соответствует среднеарифметическому всех времён завершения работ. Заметим, что функции минимизации общего времени завершения и среднего времени завершения являются эквивалентными.

В нотации $\alpha|\beta|\gamma$ описанные выше целевые функции могут быть представлены в характеристике γ следующими символьными обозначениями: в случаях, когда целевой функцией является минимизация выполнения всего проекта, в характеристике указывается C_{MAX} ; минимизация наибольшей задержки – L_{MAX} ; минимизация общего взвешенного времени завершения – $\sum w_j C_j$; минимизация общего взвешенного запаздывания – $\sum w_j T_j$. Целевые функции могут быть и более сложные. Например, если

необходимо минимизировать общее взвешенное количество запаздывающих работ, то в характеристике γ необходимо задать функцию $\sum w_j U_j$, где $U_j \in \{0,1\}$ является битовым индикатором, который показывает, является ли работа j запаздывающей или нет (если работа запаздывает, то $U_j = 1$; в противном же случае $U_j = 0$). Если, например, необходимо минимизировать общую сумму всех взвешенных опережений и запаздываний, то есть необходимо выполнить каждую работу предельно точно в установленный срок, то γ будет содержать функцию $\sum (w_j^E E_j + w_j^T T_j)$. Таким образом, как видно, целевые функции временных показателей могут быть достаточно разнообразными и сложными.

6.2. Устойчивость расписания к задержкам

Во время выполнения проекта могут возникать непредвиденные ранее в расписании задержки при выполнении тех или иных работ. Появление таких задержек может привести к дополнительным временным и стоимостным затратам, что может быть крайне не приемлемо в условиях ограниченного бюджета. Поэтому планировщик проекта и ответственный за проект заинтересованы в построении расписания, устойчивого к непредвиденным задержкам, то есть такого расписания, в котором появление таких задержек будет сказываться только на ограниченном количестве соседних работ или не будет сказываться вовсе. Такой подход к планированию обычно называют проактивным. Не смотря на то, что большинство современных подходов, позволяющих решать подобные задачи, работают в рамках стохастического концепта, который позволяет явно задавать некоторую неопределённость, мы в данной статье ограничимся рассмотрением только детерминистических подходов.

Так в публикации [[120]] вводится понятие свободного временного люфта sl_j работы j . Содержательный смысл данной временной характеристики заключается в том, что при появлении в работе j непредвиденной задержки $L'_j \leq sl_j$ она никак не сказывается на выполнении любой другой работы. В этой же публикации описывается двойная целевая функция («бицелевая функция») минимизации общего времени выполнения всего проекта и максимизации общего свободного временного люфта, который может выступать в роли меры надёжности расписания. Такой же подход описан в работе [[121]]. Иногда на практике используется модифицированный вариант данного подхода: в качестве основной целевой функции иногда предлагается использовать максимизацию наименьшего свободного временного люфта $\min_i sl_i$ [[122]]. При этом для достижения наименьшей продолжительности всего проекта предполагается использование использовать дополнительного временного ограничения в виде крайнего срока выполнения всего проекта (deadline).

Придерживаясь подхода, изложенного в публикации [[120]], предпринималась попытка увеличить количество учитываемых факторов [[123]]. В первую очередь рассматривались кроме свободного временного люфта ещё и суммарное количество всех непосредственных последователей и/или суммарное количество всех используемых ресурсов. Кроме того предлагались варианты данного подхода, в которых вышеперечисленные характеристики использовались вместе с весовыми коэффициентами, а свободный временной люфт заменяется бинарным значением $\alpha_j \in \{0,1\}$, которое выступало в роли индикатора наличия данного люфта (если $sl_j = 0$, то $\alpha_j = 0$; если $sl_j > 0$, то $\alpha_j = 1$). Суть последнего подхода заключается в том, чтобы избежать необъективности, возникающей в случае очень больших значений временных люфтов. Использование больших люфтов не имеет практической значимости, в то время как гораздо меньшего люфта может быть достаточно для компенсации типовых задержек.

В работе [[124]] вводится понятие переработки (то есть выполнение работы дольше запланированной продолжительности). Значение RT_{jt} является ожидаемым временем переработки (то есть задержкой) для работы j при условии, если работа будет завершена в момент времени t ; RC_{jt} – ожидаемые затраты из-за переработки. В соответствии с сущностью данных понятий предполагается, что RT_{jt} и RC_{jt} возрастают со временем. Целевой функцией в данной публикации является минимизация суммы времени и стоимости переработки.

Таким образом использование подобных целевых функций позволяет повысить устойчивость расписания к непредвиденным задержкам и минимизировать затраты связанные с их устранением.

6.3. Обеспечение консервативности расписания

Часто в ходе выполнения проекта возникают непредвиденные ситуации (например, сверхбольшие задержки или перебои с поставками ресурсов), в результате которых дальнейшее выполнение проекта в соответствии с составленным расписанием не представляется возможным. В таких случаях расписание становится неактуальным и не соответствующим сложившимся условиям. Такое расписание должно быть пересмотрено и перепланировано. Специфика данного перепланирования заключается в том, что проект уже находится на стадии выполнения: некоторые работы могут быть уже выполнены и должны быть проигнорированы в ходе выполнения перепланирования; некоторые работы начаты, но ещё не закончены – такие работы участвуют в процессе перепланирования, но имеют фиксированные времена начала и ожидаемого завершения своего выполнения. Кроме того при перепланировании может измениться количество и характер доступности ресурсов. В отличие от проактивного планирования, в котором построение устойчивого к задержкам расписания главным образом сводится к

закладыванию непредвиденных задержек в само расписание, здесь имеет место возникновение непредвиденных событий, выходящих за рамки заложенной надёжности и требующие перестроения всего расписания. Такое планирование обычно называют реактивным.

Основной целевой функцией при перепланировании проекта в большинстве случаев является минимизация вносимых изменений. Этот критерий тесно связан с тем фактом, что ранее представленное расписание, как правило, удовлетворяло все заинтересованные стороны и вынуждало их планировать свою деятельность в соответствии с данным расписанием. Сильно изменённое расписание может привести к дополнительным накладным затратам, задержкам, изменениям в ресурсо-обеспечении или даже к срыву проекта в целом.

В работе [[74]] предлагается минимизировать вносимые в оригинальное расписание изменения путём минимизации количества работ, которые получать в новом расписании новое значение времени начала своего выполнения. А в публикации [[125]] предлагается перепланировать расписание так, чтобы минимизировать сумму всех отклонений нового времени завершения каждой работы от первоначального значения. Данная задача может быть решена в рамках постановки задачи «выполнить точно в срок», где минимизируется взвешенная сумма всех опережений и запаздываний каждой работы. Для редуцирования задачи необходимо оригинальные значения времени завершения каждой работы рассматривать в качестве соответствующих директивных сроков их выполнения. Иногда имеет смысл измерять и минимизировать степень нарушения расписания, суммируя все отклонения значений начала и завершения каждой из работ [[126]].

Отдельно стоит отметить особенности перепланирования проектов, выполняемых в рамках мультимодальной постановки RCPSP-задачи [[127]]. Обычно в таких постановках принято штрафовать все изменения количества и интенсивности использования ресурсов. Кроме того штрафовать предлагается и изменения режимов выполнения каждой из работ. Некоторые особо критические работы, могут быть зафиксированы с помощью введения дополнительных ограничений. Это может быть очень удобно и полезно в случаях с работами, запланированными в непосредственной близости от того момента времени, в который возникла необходимость в перепланировании проекта, то есть работами, которые должны вот-вот начать своё выполнение. Часто на практике вносить изменения в такие работы и, например, откладывать их выполнение не целесообразно. Кроме того данный подход может применяться в случаях, когда необходимо, чтобы новое составленное расписание в какой-то определённый момент времени догнало первоначальное расписание (восстановилось).

6.4. Минимизация затрат на возобновляемые ресурсы

В современной тематической литературе достаточно широко обсуждаются различные целевые функции, связанные с возобновляемыми ресурсами. Наиболее обширный и подробный обзор данных функция приведён в публикации [[128]]. Мы рассмотрим только наиболее популярные и применяемые функции.

Одной из самых распространённых является функция, ориентированная на решение так называемой задачи ресурсных инвестиций. Данная задача является зеркальной копией классической RCPSP-задачи. Так в классической постановке RCPSP-задачи основным является минимизация общего времени выполнения всего проекта, не превышая при этом заданного лимита использования каждого из возобновляемых ресурсов. В данной же задаче основным является минимизация количества используемых возобновляемых ресурсов, не превышая при этом некоторый заданный крайний срок выполнения всего проекта (deadline). Целевой функцией в данной задаче будет минимизация суммы стоимостных затрат на поддержание доступности требуемого количества каждого ресурса, то есть $\sum_k C_k(R_k)$, где R_k – выделенное количество ресурса k (квота), $C_k(R_k)$ – стоимость выделения ресурса k в количестве R_k . Очевидно, что $C_k(R_k)$ является неубывающей функцией, прямо зависящей от размера выделяемой квоты. В частном и наиболее распространённом случае данная стоимостная функция является линейной, то есть $C_k(R_k) = c_k R_k$, где c_k – стоимость поддержания одной единицы ресурса k в доступном состоянии.

Задача ресурсных инвестиций были успешно решена в ряде работ [[97], [98], [129], [130], [131]]. Стоит отметить работу [[132]] в которой представлена расширенная задача ресурсных инвестиций: вместо крайнего срока завершения проекта (deadline) в ней используется директивный срок, что допускает появления задержки завершения всего проекта. Целевой функцией является минимизация общей суммы стоимостных затрат на поддержание ресурсов и на штраф за запаздывание. Штраф за запаздывание проекта прямо пропорционален величине запаздывания.

Иногда основное внимание уделяется арендуемым возобновляемым ресурсам [[133]]. Основная особенность в данном случае заключается в том, что возобновляемый ресурс берётся в аренду, стоимость которой прямо зависит от количества арендуемого ресурса и периода аренды. Стоимость аренды на период t одной единицы ресурса k складывается из фиксированной стоимости c_k^f за факт аренды единицы ресурса и из стоимости аренды c_k^v единица ресурса за единицу времени (ставка аренды). Таким образом, если необходимо взять в аренду r_k единиц ресурса k на время t , то стоимость аренды составит $r_k(c_k^f + c_k^v t)$. Очевидно, что целевой функцией в данной постановке является минимизация суммы всех стоимостных затрат на аренду ресурсов. Как можно заметить, если ставка аренды будет нулевой ($c_k^v = 0$), то данная задача

сводиться к задаче ресурсных инвестиций. Более подробно данная задача рассмотрена в работе [[134]].

Другой не менее важной задачей является выравнивание загруженности ресурсов. Суть данной задачи сводится к минимизации изменений интенсивности использования ресурсов при переходе от одного момента времени к другому соседнему, не превышая при этом крайнего срока выполнения проекта (deadline). Если интенсивность использования ресурсов представить в виде графика, то целью данной задачи является предельное сглаживание данного графика. В работах [[30], [97], [98]] для решения данной задачи в роли целевой функции выступила минимизация наибольшего изменения или сумма всех изменений интенсивности использования ресурсов, а в работе [[135]] предлагается минимизировать для этой цели сумму всех изменений, возведённых в квадрат.

В некоторых случаях полезно минимизировать используемое количество только тех возобновляемых ресурсов, потребление которых превышает некоторый заданный уровень [[97], [113], [136]]. Или, как в работе [[30]], иногда рассматривается минимизация накапливаемого отклонения уровня использования ресурсов от некоторого заданного константного уровня. Такой подход позволяет контролировать и устранять не только перерасход ресурсов, но и возможные простои. Интересный подход изложен в работе [[46]], где предлагается минимизировать как количество, так и продолжительность разрывов в графике (профиле) потребления ресурсов. Очевидно, что данная стратегия также ориентирована на снижение простоя ресурсов. В более развитых постановках [[37]] предлагается разделить всё доступное количество возобновляемых ресурсов на количество, доступное изнутри, и количество, доступное извне. Целевая функция при такой постановке предполагает минимизацию расходов, связанных с использованием только взятых извне ресурсов.

В нотации $\alpha|\beta|\gamma$ все описанные выше целевые функции для решения задачи по выравниванию загруженности ресурсов можно обобщенно представить в характеристике γ как $\sum c_k f(r_k(S, t))$, где c_k – стоимость использования одной единицы ресурса k , f – функция профиля использования ресурса k в количестве $r_k(S, t)$ (t – момент времени в расписании S). Следует заметить, что если $f = R_k$, что соответствует равномерному профилю потребления ресурса k , то данная задача (задача выравнивания загруженности ресурсов) сводится к задаче ресурсных инвестиций.

6.5. Минимизация не возобновляемых ресурсов

Минимизация потребления не возобновляемых ресурсов имеет место только в мультимодальной постановке RCPSP-задачи, так как во всех других постановках потребление ресурсов задачами фиксировано, и, следовательно, сумма потребления не возобновляемых ресурсов всегда будет одинаковой. Во

всём остальном целевые функции, ориентированные на не возобновляемые ресурсы являются, фактически, точной копией возобновляемых ресурсов. В традиционной мультимодальной постановке RCPSP-задачи минимизируется время выполнения всего проекта, не превышая при этом предела доступности ресурсов. Если же необходимо минимизировать потребление не возобновляемых ресурсов, то аналогично задаче ресурсных инвестиций в постановке задачи вводить крайний срок выполнения проекта (deadline), который не должен быть превышен.

Такая целевая функция, ориентированная на не возобновляемые ресурсы, была подробно рассмотрена в публикациях [[85], [86]] в рамках дискретной задачи компромисса времени и стоимости. В данных публикациях не возобновляемые ресурсы интерпретировались в качестве денег. Аналогичный подход изложен и в работах [[30], [80]]. А вот в публикациях [[30], [113]] предлагается минимизировать количество только тех используемых не возобновляемых ресурсов, суммарное потребление которых превышает некоторый заданный предел.

Все эти целевые функции можно обобщенно представить в нотации $\alpha|\beta|\gamma$ как $\gamma = \sum c_k f(r_k(S))$, где c_k – стоимость потребления одной единицы не возобновляемого ресурса k , f – функция потребления ресурса k в количестве $r_k(S)$ в расписании S .

6.6. Минимизация общей стоимости проекта

Оптимизация расписания по критерию стоимости часто является важнейшим аспектом. Как правило, такая оптимизация выполняется в рамках RCPSP-задачи без ресурсов. Обычно для каждой работы j вводится понятие стоимости её выполнения c_{jt} , зависящее от момента времени t , когда работа j начала своё выполнение [[137], [138], [139]]. Как верно замечено в работе [[139]], целевая функция, ориентированная на стоимость, является обобщением разных других хорошо известных целевых функций, таких как минимизация времени выполнения всего проекта, выполнение работ точно в срок или максимизация чистой приведённой стоимости.

Обычно минимизируют общую стоимость проекта, которая состоит из стоимостей опережений и запаздываний относительно директивных сроков выполнения работ, а также из стоимостей, связанных с продолжительностью выполнения работ [[140]]. Более экзотические постановки предполагают, что продолжительность выполнения работы может быть сокращена за дополнительную плату. При этом проект должен быть завершён не позднее некоторого заданного крайнего срока (deadline).

В публикации [[141]] рассматривается минимизация стоимости, состоящей из стоимостей сбоев выполнения работ (то есть неожиданного сокращения продолжительности их выполнения), стоимостей материальных (не возобновляемых) ресурсов и расходов на поддержание инвентаря

(возобновляемых ресурсов). Также в данной работе рассматриваются бонусы и штрафы за раннее и за позднее (относительно некоторого заданного директивного срока) завершение проекта соответственно.

Интересная постановка представлена в публикации [[142]]. Авторы рассмотрели постановку с работами, продолжительность выполнения которых находится в некотором заданном интервале, едином для всех работ. Такой подход привёл авторов к целевой функции, в которой стоимость выполнения каждой работы, связанная с их продолжительностью, является выпуклой функцией.

Также заслуживает внимания двухкомпонентная целевая функция [[143]]. Стоимость выполнения проекта, заложенная в данную целевую функцию, прямо пропорциональна продолжительности выполнения проекта. При этом работы в проекте могут быть скомбинированы (объединены) для уменьшения продолжительности выполнения проекта, а стоимость выполнения данных работ при этом будет складываться. Данная целевая функция может быть использована только в рамках постановки без ресурсных ограничений.

6.7. Максимизация чистой приведенной стоимости

Другой не менее важный тип целевой функции появляется, когда в ходе выполнения проекта имеют место финансовые потоки. Отток денежных средств происходит в результате выполнения какой-либо работы или использования какого-либо ресурса. С другой стороны, приток денежных средств происходит в результате инвестиций, авансовых платежей или после достижения определённых ключевых точек выполнения всего проекта. Также не исключён вариант, когда приток денежных средств осуществляет один раз в конце выполнения проекта (оплата за выполнение проекта). Чистой приведённой стоимостью является разница между суммами всех притоков и оттоков денежных средств. Этот показатель является одним из важнейших для инвесторов. Поэтому целевой функцией должна быть максимизация чистой приведённой стоимости.

Данная задача решается в рамках стандартных ограничений RCPSP-задачи. Обычно максимизации подвергается общая сумма оттоков и притоков денежных средств, при этом оттоки участвуют в сумме со знаком «минус». Кроме того в данной постановке допускается участие скидок при финансовых оттоках. Скидки могут быть как фиксированными, так и зависящими от каких-либо проектных показателей. Всё это детально рассматривается в работах [[144], [145], [146], [147]]. Кроме того следует отметить работы [[38], [148]], в которых исследуется максимизация чистой приведённой стоимости в рамках мультимодальной постановки, а также [[149]] – в рамках задачи ресурсных инвестиций. Так же данной целевой функции посвящены публикации [[53], [96], [150], [151], [152]].

В нотации $\alpha|\beta|\gamma$ целевая функция максимизации чистой приведённой стоимости может быть представлена как $\sum c_j^F \beta^{Fj}$, где c_j^F – денежный поток

(приток или отток) работы j , β^{Fj} – скидка, предоставляемая в данном денежном потоке.

6.8. Многоцелевые функции

Во всех ранее обсуждаемых случаях применялась целевая функция, оптимизирующая только один параметр или характеристику проекта, в то время как все остальные при необходимости контролировались с помощью введения дополнительных ограничений. Однако, в реальности часто необходимо оптимизировать выполнение проекта по нескольким критериям, то есть применить многоцелевую функцию.

Так наиболее частым и распространённым способом получения многоцелевой функции является взвешенное суммирование всех интересующих параметров и/или характеристик. Обычно взвешенному суммированию подвергаются общее время выполнения проекта, опережение и запаздывание работ, равномерность загрузки ресурсов и потребление ресурсов в целом. Такой подход можно встретить во многих работах [[30], [46], [120]].

Другим получивший широкое распространение способом получения многоцелевой функции является генерация расписаний, оптимизированных с точки зрения закона Парето. Общий принцип данного закона прост: 20% приложенных усилий дают 80% результата, а остальные 20% результата достигаются остальными 80% усилий. Данный принцип применительно к методам построения расписания был достаточно подробно изучен и успешно применён в некоторых публикациях [[136], [153], [154], [155]]. Особенно стоит отметить работу [[156]], в которой авторами представлена оригинальная многоцелевая функция, основанная на системе знаний.

Таким образом, многоцелевые функции, с одной стороны, являются наиболее применимыми в реальных условиях, в другой – наиболее сложными. При этом многоцелевые функции по своей природе являются составными, что позволяет достаточно гибко выбирать оптимизируемые критерии проекта.

7. Заключение

Таким образом, представлен обзор современных моделей и методов теории расписаний. Для этой цели был выбран класс задач ресурсного планирования RCPSP, который находит широкое практическое применение и обобщает многочисленные постановки теории расписаний. Проведенный обзор позволяет выявить основные понятия и математические модели, которые могут быть положены в основу универсального объектно-ориентированного каркаса для разработки программных приложений.

Список литературы

- [1]. Интернет-ресурс: https://ru.wikipedia.org/wiki/Теория_расписаний (в редакции от 4 июня 2013 14:07).
- [2]. Лазарев А. А., Гафаров Е. Р. Теория расписаний: задачи и алгоритмы. Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (МГУ), Москва, Россия, 2011, 222 с.
- [3]. Коваленко Ю. В. Сложность некоторых задач теории расписаний и эволюционные алгоритмы их решения. Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук. Омск, Россия, 2013, 129 с.
- [4]. Sprecher A. Resource-constrained project scheduling: Exact methods for the multi-mode case. Серия книг: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, том 409, Springer, Berlin, Germany, 1994, 142 с.
- [5]. Интернет-ресурс: https://ru.wikipedia.org/wiki/Задача_об_упаковке_в_контейнеры (в редакции от 19 сентября 2013 21:17).
- [6]. Интернет-ресурс: https://ru.wikipedia.org/wiki/Задача_о_рюкзаке (в редакции от 29 июня 2014 07:47).
- [7]. Stadler H. Multilevel capacitated lot-sizing and resource-constrained project scheduling: An integrating perspective. International Journal of Production Research, 2005, том 43, выпуск 24, с. 5253-5270.
- [8]. Интернет-ресурс: https://ru.wikipedia.org/wiki/Задача_коммивояжера (в редакции от 21 мая 2014 18:07).
- [9]. Brucker P., Knust S. Resource-constrained project scheduling and timetabling. Lecture Notes in Computer Science, 2001, том 2079, с. 277-293.
- [10]. Drexel A., Salewski F. Distribution requirements and compactness constraints in school timetabling. European Journal of Operational Research, 1997, том 102, выпуск 1, с. 193-214.
- [11]. Pritsker A. A. B., Watters L. J., Wolfe P. M. Multiproject scheduling with limited resources: A zero-one programming approach. Management Science, 1969, том 16, выпуск 1, с. 93-107.
- [12]. Blazewicz J., Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G. Scheduling subject to resource constraints: Classification and complexity. Discrete Applied Mathematics, 1983, том 5, с. 11-24.
- [13]. Ahuja H. N. Construction performance control by networks. John Wiley & Sons, New York, USA, 1976, 636 с.
- [14]. Davis E. W., Patterson J. H. A comparison of heuristic and optimum solutions in resource-constrained project scheduling. Management Science, 1975, том 21, выпуск 8, с. 944-955.
- [15]. Hegazy T. Optimization of resource allocation and leveling using genetic algorithms. Journal of Construction Engineering and Management, 1999, том 125, выпуск 3, с. 167-175.
- [16]. Brooks G. N., White C. R. An algorithm for finding optimal or near optimal solutions to the production scheduling problem. Journal of Industrial Engineering, 1966, том 17, выпуск 2, с. 173-186.
- [17]. Gomory R. E. An all integer programming algorithm. Глава из книги [[157]], с. 193-206.
- [18]. Szwarg W. Solutions of the akers-friedman scheduling problem. Operations Research, 1960, том 8, выпуск 6, с. 782-788.
- [19]. Ashour S. A Decomposition Approach for the Machine Scheduling Problem. University of Iowa, Iowa City, USA, 1967, 416 с.
- [20]. Giffler B., Thompson G. L., Van Ness V. Numerical experience with the linear and Monte-Carlo algorithms for solving production scheduling problems. Глава из книги [[157]], с. 21-29.
- [21]. Page E. S. An approach to the scheduling of the N jobs on M machines. Journal of the Royal Statistical Society, 1961, том 23, выпуск 2, с. 484-492.
- [22]. Kolisch R. Efficient priority rules for the resource-constrained project scheduling problem. Journal of Operations Management, 1996, том 14, выпуск 3, с. 179-192.
- [23]. Docter F. F. Some efficient multi-heuristic procedures for resource constrained project scheduling. European Journal of Operational Research, 1990, том 49, выпуск 1, с. 3-13.
- [24]. Graham R. L., Lawler E. L., Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: A survey. Annals of Discrete Mathematics, 1979, том 5, с. 287-326.
- [25]. Brucker P., Drexel A., Möhring R., Neumann K., Pesch E. Resource-constrained project scheduling: Notation, classification, models, and methods. European Journal of Operational Research, 1999, том 112, выпуск 1, с. 3-41.
- [26]. Słowiński R. Multiobjective network scheduling with efficient use of renewable and nonrenewable resources. European Journal of Operational Research, 1981, том 7, выпуск 3, с. 265-273.
- [27]. Weglarz J. On certain models of resource allocation problems. Kybernetes, 1980, том 9, выпуск 1, с. 61-66.
- [28]. Böttcher J., Drexel A., Kolisch R., Salewski F. Project scheduling under partially renewable resource constraints. Management Science, 1999, том 45, выпуск 4, с. 543-559.
- [29]. Zhu G., Bard J. F., Yu G. A branch-and-cut procedure for the multimode resource-constrained project-scheduling problem. INFORMS Journal on Computing, 2006, том 18, выпуск 3, с. 377-390.
- [30]. Nudtasomboon N., Randhawa S. U. Resource-constrained project scheduling with renewable and non-renewable resources and time-resource tradeoffs. Computers and Industrial Engineering, 1997, том 32, выпуск 1, с. 227-242.
- [31]. Neumann K., Schwindt C. Project scheduling with inventory constraints. Mathematical Methods of Operations Research, 2003, том 56, выпуск 3, с. 513-533.
- [32]. Bartels J. H., Zimmermann J. Scheduling tests in automotive R&D projects. European Journal of Operational Research, 2009, том 193, выпуск 3, с. 805-819.
- [33]. Schwindt C., Trautmann N. Batch scheduling in process industries: An application of resource-constrained project scheduling. OR Spectrum, 2000, том 22, выпуск 4, с. 501-524.
- [34]. Neumann K., Schwindt C., Trautmann N. Scheduling of continuous and discontinuous material flows with intermediate storage restrictions. European Journal of Operational Research, 2005, том 165, выпуск 2, с. 495-509.
- [35]. Weglarz J., Blazewicz J., Cellary W., Słowiński R. Algorithm 520: An automatic revised simplex method for constrained resource network scheduling. ACM Transactions on Mathematical Software, 1977, том 3, выпуск 3, с. 295-300.
- [36]. Blazewicz J., Ecker K., Pesch E., Schmidt G., Weglarz J. Handbook on Scheduling: From Theory to Applications. Серия книг: International Handbooks on Information Systems, Springer, Berlin, Germany, 2007, 647 с.
- [37]. Kis T. A branch-and-cut algorithm for scheduling of projects with variable-intensity activities. Mathematical Programming, 2005, том 103, выпуск 3, с. 515-539.

- [38]. Waligora G. Discrete-continuous project scheduling with discounted cash flows – A tabu search approach. *Computers and Operations Research*, 2008, том 35, выпуск 7, с. 2141-2153.
- [39]. Kis T. RCPS with Variable intensity activities and feeding precedence constraints. Глава из книги [[158]], с. 105-129.
- [40]. Jozefowska J., Mika M., Rozycki R., Waligora G., Weglarz J. Solving the discrete-continuous project scheduling problem via its discretization. *Mathematical Methods of Operations Research*, 2000, том 52, выпуск 3, с. 489-499.
- [41]. Weglarz J. Project scheduling with continuously divisible, doubly-constrained resources. *Management Science*, 1981, том 27, выпуск 9, с. 1040-1053.
- [42]. Bianco L., Dell'olmo P., Speranza M. G. Heuristics for multimode scheduling problems with dedicated resources. *European Journal of Operational Research*, 1998, том 107, выпуск 2, с. 260-271.
- [43]. Bianco L., Caramia M., Dell'olmo P. Solving a preemptive project scheduling problem with coloring techniques. Глава из книги [[159]], с. 135-146.
- [44]. Dorndorf U., Phan-Huy T., Pesch E. A survey of interval capacity consistency tests for time- and resource constrained scheduling. Глава из книги [[159]], с. 213-238.
- [45]. Dorndorf U., Pesch E., Phan-Huy T. Constraint propagation techniques for the disjunctive scheduling problem. *Artificial Intelligence*, 2000, том 122, выпуск 1-2, с. 189-240.
- [46]. Bomsdorf F., Derigs U. A model, heuristic procedure and decision support system for solving the movie shoot scheduling problem. *OR-Spectrum*, 2008, том 30, выпуск 4, с. 751-772.
- [47]. Klein R., Scholl A. Scattered branch and bound – An adaptive search strategy applied to resource-constrained project scheduling. *Central European Journal of Operations Research*, 1999, том 7, с. 177-201.
- [48]. Nonobe K., Ibaraki T. Formulation and tabu search algorithm for the resource constrained project scheduling problem. Глава (с. 557-588) из книги под ред. Ribeiro C. C., Hansen P. *Essays and Surveys in Metaheuristics*. Серия книг: *Operations Research/Computer Science Interfaces Series*, том 15, Springer, Berlin, Germany, 2002, 664 с.
- [49]. Pesch E. Lower bounds in different problem classes of project schedules with resource constraints. Глава из книги [[159]], с. 53-76.
- [50]. Klein R., Scholl A. Computing lower bounds by destructive improvement: An application to resource-constrained project scheduling. *European Journal of Operational Research*, 1999, том 112, выпуск 2, с. 322-346.
- [51]. Klein R. Project scheduling with time-varying resource constraints. *International Journal of Production Research*, 2000, том 38, выпуск 16, с. 3937-3952.
- [52]. Hartmann S. Project scheduling under limited resources: Models, methods, and applications. Серия книг: *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, том 478, Springer, Berlin, Germany, 1999, 221 с.
- [53]. Icmeli O., Rom W. O. Solving the resource constrained project scheduling problem with optimization subroutine library. *Computers and Operations Research*, 1996, том 23, выпуск 8, с. 801-817.
- [54]. Bartusch M., Möhring R. H., Radermacher F. J. Scheduling project networks with resource constraints and time windows. *Annals of Operations Research*, 1988, том 16, выпуск 1, с. 201-240.

- [55]. Debels D., Vanhoucke M. The impact of various activity assumptions on the lead time and resource utilization of resource-constrained projects. *Computers and Industrial Engineering*, 2008, том 54, выпуск 1, с. 140-154.
- [56]. Demeulemeester E. L., Herroelen W. S. An efficient optimal solution procedure for the preemptive resource-constrained project scheduling problem. *European Journal of Operational Research*, 1996, том 90, выпуск 2, с. 334-348.
- [57]. Ballestin F., Valls V., Quintanilla S. Pre-emption in resource-constrained project scheduling. *European Journal of Operational Research*, 2008, том 189, выпуск 3, с. 1136-1152.
- [58]. Buddhakulsomsiria J., Kim D. S. Properties of multi-mode resource-constrained project scheduling problems with resource vacations and activity splitting. *European Journal of Operational Research*, 2006, том 175, выпуск 1, с. 279-295.
- [59]. Buddhakulsomsiria J., Kim D. S. Priority rule-based heuristic for multi-mode resource-constrained project scheduling problems with resource vacations and activity splitting. *European Journal of Operational Research*, 2007, том 178, выпуск 2, с. 374-390.
- [60]. Franck B., Neumann K., Schwindt C. Project scheduling with calendars. *OR Spektrum*, 2001, том 23, выпуск 3, с. 325-334.
- [61]. Drezet L. E., Billaut J. C. A project scheduling problem with labour constraints and time-dependent activities requirements. *International Journal of Production Economics*, 2008, том 112, выпуск 1, с. 217-225.
- [62]. Cavalcante C. C. B., C. de Souza C., Savelsbergh M. W. P., Wang Y., Wolsey L. A. Scheduling projects with labor constraints. *Discrete Applied Mathematics*, 2001, том 112, выпуск 1-3, с. 27-52.
- [63]. Mika M., Waligora G., Weglarz J. Tabu search for multi-mode resource-constrained project scheduling with schedule-dependent setup times. *European Journal of Operational Research*, 2008, том 187, выпуск 3, с. 1238-1250.
- [64]. Mika M., Waligora G., Weglarz J. Modelling setup times in project scheduling. Глава из книги [[158]], с. 131-165.
- [65]. Drexl A., Nissen R., Patterson J. H., Salewski F. Progen/πx – An instance generator for resource-constrained project scheduling problems with partially renewable resources and further extensions. *European Journal of Operational Research*, 2000, том 125, выпуск 1, с. 59-72.
- [66]. Vanhoucke M. Setup times and fast tracking in resource-constrained project scheduling. *Computers and Industrial Engineering*, 2008, том 54, выпуск 4, с. 1062-1070.
- [67]. Elmaghraby S. E. *Activity networks: Project planning and control by network models*. Wiley, New York, USA, 1977, 443 с.
- [68]. Alcaraz J., Maroto C., Ruiz R. Solving the multi-mode resource-constrained project scheduling problem with genetic algorithms. *Journal of the Operational Research Society*, 2003, том 54, выпуск 6, с. 614-626.
- [69]. Bouleimen K., Lecocq H. A new efficient simulated annealing algorithm for the resource-constrained project scheduling problem and its multiple mode version. *European Journal of Operational Research*, 2003, том 149, выпуск 2, с. 268-281.
- [70]. Hartmann S. Project scheduling with multiple modes: A genetic algorithm. *Annals of Operations Research*, 2001, том 102, выпуск 1-4, с. 111-135.
- [71]. Jarboui B., Damak N., Siarry P., Rebai A. A combinatorial particle swarm optimization for solving multi-mode resource-constrained project scheduling problems. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, том 195, выпуск 1, с. 299-308.

- [72]. Jozefowska J., Mika M., Rozycki R., Waligora G., Weglarz J. Simulated annealing for multi-mode resource-constrained project scheduling. *Annals of Operations Research*, 2001, том 102, выпуск 1-4, с. 137-155.
- [73]. Özdamar L. A genetic algorithm approach to a general category project scheduling problem. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews*, 1999, том 29, выпуск 1, с. 44-59.
- [74]. Calhoun K. M., Deckro R. F., Moore J. T., Chrissis J. W., Hove J. C. V. Planning and re-planning in project and production scheduling. *Omega*, 2002, том 30, выпуск 3, с. 155-170.
- [75]. B. de Reyck, Herroelen W. S. The multi-mode resource-constrained project scheduling problem with generalized precedence relations. *European Journal of Operational Research*, 1999, том 119, выпуск 2, с. 538-556.
- [76]. Heilmann R. Resource-constrained project scheduling: A heuristic for the multi-mode case. *OR Spektrum*, 2001, том 23, выпуск 3, с. 335-357.
- [77]. Heilmann R. A branch-and-bound procedure for the multi-mode resource-constrained project scheduling problem with minimum and maximum time lags. *European Journal of Operational Research*, 2003, том 144, выпуск 2, с. 348-365.
- [78]. Li H., Womer K. Modeling the supply chain configuration problem with resource constraints. *International Journal of Project Management*, 2008, том 26, выпуск 6, с. 646-654.
- [79]. Tiwari V., Patterson J. H., Mabert V. A. Scheduling projects with heterogeneous resources to meet time and quality objectives. *European Journal of Operational Research*, 2009, том 193, выпуск 3, с. 780-790.
- [80]. Tareghian H. R., Taheri S. H. A solution procedure for the discrete time, cost and quality tradeoff problem using electromagnetic scatter search. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, том 190, выпуск 2, с. 1136-1145.
- [81]. Salewski F., Schirmer A., Drexl A. Project scheduling under resource and mode identity constraints: Model, complexity, methods, and application. *European Journal of Operational Research*, 1997, том 102, выпуск 1, с. 88-110.
- [82]. Demeulemeester E. L., B. de Reyck, Herroelen W. S. The discrete time/resource trade-off problem in project networks – A branch-and-bound approach. *IIE Transactions*, 2000, том 32, выпуск 11, с. 1059-1069.
- [83]. Ranjbar M., Kianfar F. Solving the discrete time/resource trade-off problem in project scheduling with genetic algorithms. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, том 191, выпуск 2, с. 451-456.
- [84]. Ranjbar M., B. de Reyck, Kianfar F. A hybrid scatter search for the discrete time/resource trade-off problem in project scheduling. *European Journal of Operational Research*, 2009, том 193, выпуск 1, с. 35-48.
- [85]. Akkan C., Drexl A., Kimms A. Network decomposition-based benchmark results for the discrete time-cost tradeoff problem. *European Journal of Operational Research*, 2005, том 165, выпуск 2, с. 339-358.
- [86]. Demeulemeester E. L., B. de Reyck, Foubert B., Herroelen W. S., Vanhoucke M. New computational results on the discrete time/cost trade-off problem in project networks. *Journal of the Operational Research Society*, 1998, том 49, выпуск 11, с. 1153-1163.
- [87]. Deckro R. F., Hebert J. E., Verdini W. A., Grimsrud P. H., Venkateshwar S. Nonlinear time/cost tradeoff models in project management. *Computers and Industrial Engineering*, 1995, том 28, выпуск 2, с. 219-229.

- [88]. Chassiakos A. P., Sakellariopoulos S. P. Time-cost optimization of construction projects with generalized activity constraints. *Journal of Construction Engineering and Management*, 2005, том 131, выпуск 10, с. 1115-1124.
- [89]. Klein R., Scholl A. PROGRESS: Optimally solving the generalized resource-constrained project scheduling problem. *Mathematical Methods of Operations Research*, 2000, том 52, выпуск 3, с. 467-488.
- [90]. Kolisch R. Integrated scheduling, assembly area- and part-assignment for large-scale, make-to-order assemblies. *International Journal of Production Economics*, 2000, том 64, выпуск 1-3, с. 127-141.
- [91]. Vanhoucke M. Work continuity constraints in project scheduling. *Journal of Construction Engineering and Management*, 2006, том 132, выпуск 1, с. 14-25.
- [92]. Demeulemeester E. L., Herroelen W. S. Modelling setup times, process batches and transfer batches using activity network logic. *European Journal of Operational Research*, 1996, том 89, выпуск 2, с. 355-365.
- [93]. Cesta A., Oddi A., Smith S. F. A constraint-based method for project scheduling with time windows. *Journal of Heuristics*, 2002, том 8, выпуск 1, с. 109-136.
- [94]. Dorndorf U., Pesch E., Phan Huy T. A time-oriented branch-and-bound algorithm for resource-constrained project scheduling with generalized precedence constraints. *Management Science*, 2000, том 46, выпуск 10, с. 1365-1384.
- [95]. Schwindt C. Generation of resource-constrained project scheduling problems subject to temporal constraints. Technical Report WIOR-543, Universität Karlsruhe, Germany, 1998.
- [96]. Neumann K., Zimmermann J. Exact and truncated branch-and-bound procedures for resource-constrained project scheduling with discounted cash flows and general temporal constraints. *Central European Journal of Operations Research*, 2002, том 10, выпуск 4, с. 357-380.
- [97]. Neumann K., Zimmermann J. Procedures for resource leveling and net present value problems in project scheduling with general temporal and resource constraints. *European Journal of Operational Research*, 2000, том 127, выпуск 2, с. 425-443.
- [98]. Neumann K., Schwindt C., Zimmermann J. Recent results on resource-constrained project scheduling with time windows: Models, solution methods, and applications. *Central European Journal of Operations Research*, 2002, том 10, выпуск 2, с. 113-148.
- [99]. Sabzehparvar M., Seyed-Hosseini S. M. A mathematical model for the multi-mode resource-constrained project scheduling problem with mode dependent time lags. *Journal of Supercomputing*, 2008, том 44, выпуск 3, с. 257-273.
- [100]. Franck B., Neumann K. Resource-constrained project scheduling with time windows: Structural questions and priority rule methods. Technical Report WIOR-492, Universität Karlsruhe, Germany, 1997.
- [101]. Ballestín F., Valls V., Quintanilla S. Due dates and RCPSP. Глава из книги [[158]], с. 79-104.
- [102]. Brânzei R., Ferrari G., Fragnelli V., Tijs S. Two approaches to the problem of sharing delay costs in joint projects. *Annals of Operations Research*, 2002, том 109, выпуск 1-4, с. 359-374.
- [103]. Chiu H. N., Tsai D. M. An efficient search procedure for the resource-constrained multi-project scheduling problem with discounted cash flows. *Construction Management and Economics*, 2002, том 20, выпуск 1, с. 55-66.
- [104]. Özdamar L., Ulusoy G., Bayyigit M. A heuristic treatment of tardiness and net present value criteria in resource constrained project scheduling. *International Journal of*

- Physical Distribution and Logistics Management, 1998, том 28, выпуск 9/10, с. 805-824.
- [105]. Baptiste P., Pape C. L., Nuijten W. Satisfiability tests and time-bound adjustments for cumulative scheduling problems. *Annals of Operations Research*, 1999, том 92, с. 305-333.
- [106]. Yang H. H., Chen Y. L. Finding the critical path in an activity network with time-switch constraints. *European Journal of Operational Research*, 2000, том 120, выпуск 3, с. 603-613.
- [107]. Vanhoucke M., Demeulemeester E. L., Herroelen W. S. Discrete time/cost trade-offs in project scheduling with time-switch constraints. *Journal of the Operational Research Society*, 2002, том 53, выпуск 7, с. 741-751.
- [108]. Krüger D., Scholl A. Managing and modelling general resource transfers in (multi-)project scheduling. *OR Spektrum*, 2010, том 32, выпуск 2, с. 369-394.
- [109]. Elmaghraby S. E. An algebra for the analysis of generalized activity networks. *Management Science*, 1964, том 10, выпуск 3, с. 494-514.
- [110]. Belhe U., Kusiak A. Resource-constrained scheduling of hierarchically structured design activity networks. *IEEE Transactions on Engineering Management*, 1995, том 42, выпуск 2, с. 150-158.
- [111]. Neumann K. Stochastic project networks: Temporal analysis, scheduling and cost minimization. Серия книг: *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, том 344, Springer, Berlin, Germany, 1990, 237 с.
- [112]. Kuster J., Jannach D. Handling airport ground processes based on resource-constrained project scheduling. *Lecture Notes in Computer Science*, 2006, том 4031, с. 166-176.
- [113]. Viana A., P. de Sousa J. Using metaheuristics in multiobjective resource constrained project scheduling. *European Journal of Operational Research*, 2000, том 120, выпуск 2, с. 359-374.
- [114]. Vanhoucke M., Demeulemeester E. L., Herroelen W. S. An exact procedure for the resource-constrained weighted earliness-tardiness project scheduling problem. *Annals of Operations Research*, 2001, том 102, выпуск 1-4, с. 179-196.
- [115]. Franck B., Schwindt C. Different resource-constrained project scheduling models with minimal and maximal time-lags. *Technical Report WIOR-450*, Universität Karlsruhe, Germany, 1995.
- [116]. Lorenzoni L. L., Ahonen H., G. de Alvarenga A. A multi-mode resource-constrained scheduling problem in the context of port operations. *Computers and Industrial Engineering*, 2006, том 50, выпуск 1-2, с. 55-65.
- [117]. Vanhoucke M. Scheduling an R&D project with quality-dependent time slots. *Lecture Notes in Computer Science*, 2006, том 3982, с. 621-630.
- [118]. Rom W. O., Tukul O. I., Muscatello J. R. MRP in a job shop environment using a resource constrained project scheduling model. *Omega*, 2002, том 30, выпуск 4, с. 275-286.
- [119]. Nazareth T., Verma S., Bhattacharya S., Bagchi A. The multiple resource constrained project scheduling problem: A breadth-first approach. *European Journal of Operational Research*, 1999, том 112, выпуск 2, с. 347-366.
- [120]. Al-Fawzan M., Haouari M. A bi-objective model for robust resource-constrained project scheduling. *International Journal of Production Economics*, 2005, том 96, выпуск 2, с. 175-187.
- [121]. Abbasi B., Shadrokh S., Arkat J. Bi-objective resource-constrained project scheduling with robustness and makespan criteria. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, том 180, выпуск 1, с. 146-152.

- [122]. Kobylanski P., Kuchta D. A note on the paper by M. A. Al-Fawzan and M. Haouari about a bi-objective problem for robust resource-constrained project scheduling. *International Journal of Production Economics*, 2007, том 107, выпуск 2, с. 496-501.
- [123]. Chtourou H., Haouari M. A two-stage-priority-rule-based algorithm for robust resource-constrained project scheduling. *Computers and Industrial Engineering*, 2008, том 55, выпуск 1, с. 183-194.
- [124]. Ismeli-Tukel O., Rom W. O. Ensuring quality in resource constrained project scheduling. *European Journal of Operational Research*, 1997, том 103, выпуск 3, с. 483-496.
- [125]. Van de Vonder S., Demeulemeester E. L., Herroelen W. S. A classification of predictive-reactive project scheduling procedures. *Journal of Scheduling*, 2007, том 10, выпуск 3, с. 195-207.
- [126]. Sakkout H., Wallace M. Probe backtrack search for minimal perturbation in dynamic scheduling. *Constraints*, 2000, том 5, выпуск 4, с. 359-388.
- [127]. Zhu G., Bard J. F., Yu G. Disruption management for resource-constrained project scheduling. *Journal of the Operational Research Society*, 2005, том 56, с. 365-381.
- [128]. Neumann K., Schwindt C., Zimmermann J. Resource-constrained project scheduling with time windows: Recent developments and new applications. Глава из книги [[158]], с. 375-407.
- [129]. Drexl A., Kimms A. Optimization guided lower and upper bounds for the resource investment problem. *Journal of the Operational Research Society*, 2001, том 52, выпуск 3, с. 340-351.
- [130]. Ranjbar M., Kianfar F., Shadrokh S. Solving the resource availability cost problem in project scheduling by path relinking and genetic algorithm. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, том 196, выпуск 2, с. 879-888.
- [131]. Yamashita D. S., Armentano V. A., Laguna M. Robust optimization models for project scheduling with resource availability cost. *Journal of Scheduling*, 2007, том 10, выпуск 1, с. 67-76.
- [132]. Shadrokh S., Kianfar F. A genetic algorithm for resource investment project scheduling problem, tardiness permitted with penalty. *European Journal of Operational Research*, 2007, том 181, выпуск 1, с. 86-101.
- [133]. Nübel H. The resource renting problem subject to temporal constraints. *OR-Spektrum*, 2001, том 23, выпуск 3, с. 359-381.
- [134]. Ballestin F. A genetic algorithm for the resource renting problem with minimum and maximum time lags. *Lecture Notes in Computer Science*, 2007, том 4446, с. 25-35.
- [135]. Bandelloni M., Tucci M., Rinaldi R. Optimal resource leveling using non-serial dynamic programming. *European Journal of Operational Research*, 1994, том 78, выпуск 2, с. 162-177.
- [136]. Davis K. R., Stam A., Grzybowski R. A. Resource constrained project scheduling with multiple objectives: A decision support approach. *Computers and Operations Research*, 1992, том 19, выпуск 7, с. 657-669.
- [137]. Maniezzo V., Mingozzi A. The project scheduling problem with irregular starting time costs. *Operations Research Letters*, 1999, том 25, выпуск 4, с. 175-182.
- [138]. Möhring R. H., Schulz A. S., Stork F., Uetz M. On project scheduling with irregular starting time costs. *Operations Research Letters*, 2001, том 28, выпуск 4, с. 149-154.
- [139]. Möhring R. H., Schulz A. S., Stork F., Uetz M. Solving project scheduling problems by minimum cut computations. *Management Science*, 2003, том 49, выпуск 3, с. 330-350.

- [140]. Achuthan N., Hardjawidjaja A. Project scheduling under time dependent costs – A branch and bound algorithm. *Annals of Operations Research*, 2001, том 108, выпуск 1-4, с. 55-74.
- [141]. Dodin B., Elimam A. A. Integrated project scheduling and material planning with variable activity duration and rewards. *IE Transactions*, 2001, том 33, выпуск 11, с. 1005-1018.
- [142]. Nonobe K., Ibaraki T. A metaheuristic approach to the resource constrained project scheduling with variable activity durations and convex cost functions. Глава из книги [[158]], с. 225-248.
- [143]. Rummel J. L., Walter Z., Dewan R., Seidmann A. Activity consolidation to improve responsiveness. *European Journal of Operational Research*, 2005, том 161, выпуск 3, с. 683-703.
- [144]. Kimms A. Maximizing the net present value of a project under resource constraints using a lagrangian relaxation based heuristic with tight upper bounds. *Annals of Operations Research*, 2001, том 102, выпуск 1-4, с. 221-236.
- [145]. Mika M., Waligora G., Weglarz J. Simulated annealing and tabu search for multi-mode resource-constrained project scheduling with positive discounted cash flows and different payment models. *European Journal of Operational Research*, 2005, том 164, выпуск 3, с. 639-668.
- [146]. Padman R., Zhu D. Knowledge integration using problem spaces: A study in resource-constrained project scheduling. *Journal of Scheduling*, 2006, том 9, выпуск 2, с. 133-152.
- [147]. Vanhoucke M., Demeulemeester E. L., Herroelen W. S. On maximizing the net present value of a project under renewable resource constraints. *Management Science*, 2001, том 47, выпуск 8, с. 1113-1121.
- [148]. Varma V. A., Uzsoy R., Pekny J., Blau G. Lagrangian heuristics for scheduling new product development projects in the pharmaceutical industry. *Journal of Heuristics*, 2007, том 13, выпуск 5, с. 403-433.
- [149]. Najafi A. A., Niaki S. T. A. A genetic algorithm for resource investment problem with discounted cash flows. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, том 183, выпуск 2, с. 1057-1070.
- [150]. Herroelen W. S., P. van Dommelen, Demeulemeester E. L. Project network models with discounted cash flows: A guided tour through recent developments. *European Journal of Operational Research*, 1997, том 100, выпуск 1, с. 97-121.
- [151]. Dayanand N., Padman R. On modelling payments in projects. *Journal of the Operational Research Society*, 1997, том 48, выпуск 9, с. 906-918.
- [152]. Etgar R., Shtub A., LeBlanc L. J. Scheduling projects to maximize net present value – the case of time-dependent, contingent cash flows. *European Journal of Operational Research*, 1997, том 96, выпуск 1, с. 90-96.
- [153]. Hapke M., Jaszkiwicz A., Slowinski R. Interactive analysis of multiple-criteria project scheduling problems. *European Journal of Operational Research*, 1998, том 107, выпуск 2, с. 315-324.
- [154]. Slowinski R., Soniewicki B., Weglarz J. DSS for multiobjective project scheduling. *European Journal of Operational Research*, 1994, том 79, выпуск 2, с. 220-229.
- [155]. Dörner K. F., Gutjahr W. J., Hartl R. F., Strauss C., Stummer C. Nature-inspired metaheuristics for multiobjective activity crashing. *Omega*, 2008, том 36, выпуск 6, с. 1019-1037.
- [156]. Nabrzynski J., Weglarz J. Knowledge-based multiobjective project scheduling problems. Глава из книги [[159]], с. 383-411.

- [157]. Под ред. Muth J. F., Thompson G. L. *Industrial Scheduling*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1963, 467 с.
- [158]. Под ред. Jozefowska J., Weglarz J. *Perspectives in Modern Project Scheduling*. Springer Science & Business Media, New York, USA, 2006, 466 с.
- [159]. Под ред. Weglarz J. *Project Scheduling: Recent Models, Algorithms and Applications*. Springer, New York, USA, 1999, 535 с.