Результатом совместной математической обработки и интерпретации смоделированных пространственно-временных рядов комплексных геодезических и геофизических наблюдений по алгоритму ФКБ явились оценки отметок мобильных пунктов, оценки вертикальных смещений этих пунктов, оценки аномалий силы тяжести, компонент уклонений отвесной линии и аномалий высоты на пунктах геодезической сети с оценкой их точности в 4-х эпохах. Совместная обработка нивелирных и гравиметрических наблюдений с использованием рекуррентного ФКБ позволила при адекватных моделях закономерностей движений земной поверхности и изменений масс поверхностного и глубинного масконов в соответствии с экспоненциальным законом и высокой точностью наблюдений нивелирных превышений значительно повысить точность оценивания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мазуров Б.Т. Модель вертикальных движений земной поверхности и изменений гравитационного поля в районе действующего вулкана// Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка.— 2007.— № 2.— С. 97—106.
2. Мазуров Б.Т. Модель системы наблюдений за вертикальными движениями земной поверхности и изменениями гравитационного поля в районе действующего вулкана//Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка.— 2007.— № 3.— С. 93—101.
3. Панкрушин, В.К. Математическое моделирование и идентификация геодинамических систем.— Новосибирск: СГГА, 2002.
4. Крамаренко А.А., Мазуров Б.Т., Панкрушин В.К. Математическое обеспечение идентификации движений и напряженно-деформированного состояния сооружений и объектов инженерной геодинамики по геодезическим наблюдениям//Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка.— 2005.— № 5.— С. 3—13.
5. Панкрушин В.К., Губонин П.Н., Дементьев Ю.В. Автоматизация математической обработки и интерпретации геодезических наблюдений за движениями и деформациями/Под ред. В.К.Панкрушина: Учебное пособие.— Новосибирск: НИИГАиК, 1989.
6. Мазуров Б.Т., Панкрушин В.К. Вычислительный идентификационный эксперимент: совместная математическая обработка и интерпретация нивелирных и гравиметрических наблюдений за динамикой земной поверхности и гравитационного поля в вулканической области//Сб. материалов научн. конгресса «ГЕО-СИБИРЬ-2005».— Новосибирск: СГГА, 2005.— Т. 2.— С. 67—74.
7. Крамаренко А.А., Мазуров Б.Т., Панкрушин В.К. Вычислительный эксперимент идентификации движений и напряженно-деформированного состояния сооружений и объектов инженерной геодинамики по геодезическим наблюдениям//Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка.— 2005.— № 6.— С. 3—14.

8. Большое трещинное Толбачинское извержение (1975—1976 гг., Камчатка)/Отв. ред. С.А.Федотов.— М.: Наука, 1984.

Поступила 14 сентября 2006 г.
Рекомендована кафедрой высшей геодезии Сибирской государственной геодезической академии.

УДК 528.02

Санкт-Петербургский военный
топографический институт
Кандидат техн. наук *А.В.Астапович*

ОБ УГЛОВЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ В ТРИАНГУЛЯЦИИ

Введение

В последние годы на страницах журналов стали появляться публикации [4 — 8], в которых ставится под сомнение правильность выполнения оценки точности угловых измерений на станции и при уравнивании триангуляции. В них вопросы оценки точности рассматриваются с позиций, которые нельзя признать состоятельными:

— горизонтальные направления не физические величины, которые не могут измеряться, уравниваться и оцениваться по точности;

— соотношение обратных весов «регистраций» (вместо горизонтальных направлений), углов от начального направления и разностей этих углов составляет 1:2:4.

Продолжая дискуссию, открытую на страницах журналов по вопросам оценки точности угловых измерений, в данной статье рассматриваются вопросы: какие величины в триангуляции измеряются, уравниваются и оцениваются и почему оценка точности, выполняемая на разных этапах, разнится.

1. Измеряемые величины в триангуляции

Каждый предмет, объект или явление обладает качественной и количественной определенностью своих свойств. Так, любому лучу присуще свойство направленности. Чтобы выразить это свойство в количественном отношении, необходимо установить систему отсчета (систему координат). В пространственной топоцентрической горизонтной системе координат это свойство отражается азимутом и зенитным расстоянием, в системе плоских прямоугольных координат Гаусса—Крюгера — дирекционным углом, в полярной системе координат на плоскости — углом между положительным направлением полярной оси и проекцией луча на плоскость.

Если за начало плоских полярных координат принять центр геодезического пункта, а за полярную ось проекцию на горизонтальную плоскость визирного луча на какой-либо ориентир, то свойство направленности сторон сети выразится горизонтальными углами между этим ориентиром и геодезическими пунктами. Эти углы принято называть горизонтальными направлениями. Обычно в качестве ориентира выбирают один из пунктов геодезической сети. В этом случае направление на этот пункт принимает значение, равное нулю.

Как видим, понятие горизонтального направления не противоречит понятию физической величины как свойству, присущему многим объектам, но в количественном отношении индивидуальному для каждого. Оно неразрывно связано с системой полярных координат на плоскости.

Между величинами, выражающими в разных системах координат свойство направленности, существует определенная связь. Так, например, горизонтальное направление M связано с дирекционным углом α соотношением

$$\alpha = M + Z,$$

где Z — ориентирующий угол (дирекционный угол направления, численно равный нулю).

Горизонтальный угол, в отличие от горизонтального направления, обладает свойством инвариантности и представляет собой разность направлений в той или иной системе полярных координат. Очевидно, что n горизонтальных направлений образуют $n - 1$ функционально независимых углов.

2. Представление результатов измерений угловых величин

Угловые величины в триангуляции измеряются, как правило, способом круговых приемов и во всех комбинациях. Покажем на примере четырех направлений, что результаты измерений

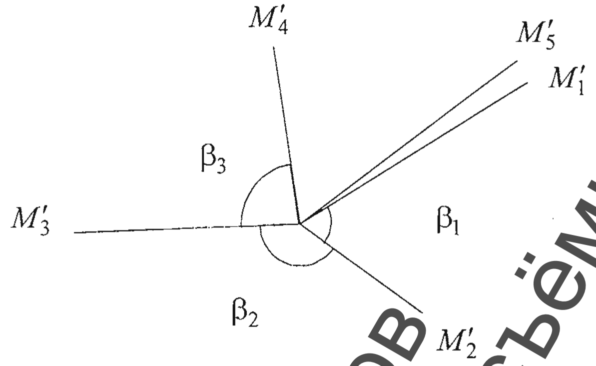

Рис. 1. Схема направлений и углов

этими способами при условии равенства $2m' = mn$ (m' — число круговых приемов, m — число приемов измерения углов во всех комбинациях, n — число направлений) могут представляться как рядом равноточных направлений (рис. 1) M_1, M_2, M_3, M_4 с ковариационной матрицей ошибок

$$K_M = \mu^2 \frac{1}{m'} E = \mu^2 \frac{2}{mn} E, \qquad (1)$$

так и углами β_1, β_2, β_3 (рис. 1) с ковариационной матрицей ошибок

$$K_\beta = \mu^2 Q_\beta = \mu^2 \frac{1}{m'} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \mu^2 \frac{2}{mn} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

или углами от начального направления β_1, β_4, β_5 (рис. 2) с ковариационной матрицей ошибок

$$K_\beta = \mu^2 Q_\beta = \mu^2 \frac{1}{m'} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \mu^2 \frac{2}{mn} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad (3)$$

а также ориентированными направлениями (дирекционными углами, вычисленными по результатам угловых измерений) с вырожденной ковариационной матрицей ошибок

$$K_\alpha = \mu^2 Q_\alpha = \mu^2 \frac{1}{m'} \begin{bmatrix} 0,75 & -0,25 & -0,25 & -0,25 \\ -0,25 & 0,75 & -0,25 & -0,25 \\ -0,25 & -0,25 & 0,75 & -0,25 \\ -0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,75 \end{bmatrix} =$$
$$= \mu^2 \frac{2}{mn} \begin{bmatrix} 0,75 & -0,25 & -0,25 & -0,25 \\ -0,25 & 0,75 & -0,25 & -0,25 \\ -0,25 & -0,25 & 0,75 & -0,25 \\ -0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,75 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

В выражениях (1), (2), (3) и (4) μ — ошибка единицы веса (за единицу веса принят вес измерения направлений); E — единичная матрица, Q_β и Q_α — корреляционные матрицы ошибок соответственно углов и ориентированных направлений.

Для обоснования приведенных выражений рассмотрим механизм уравнивания на станции результатов угловых измерений.

Так исходной информацией для математической обработки одного приема измерений в способе Струве являются средние значения направлений M_1', M_2', M_3', M_4', M_5' (рис. 1), полученные при двух положениях ГК теодолита. M_1' и M_5' — значения начального направления в начале и конце приема.

При этом модель ошибок направлений считается равной

$$\theta_i = \Delta_i + \lambda(i-1), \quad (5)$$

где $i = 1, 2, \ldots, n+1$ — порядковый номер направления; λ — параметр, характеризующий систематические ошибки направлений; Δ_t — случайные погрешности измерений, характеризующиеся ковариационной матрицей

$$K_\Delta = \mu^2 E.$$

Повторное наблюдение начального направления дает возможность составить условное уравнение с дополнительным параметром, которое можно представить в виде

$$A\Delta + \Lambda\lambda - w = 0, \quad (6)$$

где $A = [1 \ 0 \ \ldots \ 0 \ -1]$; Δ — вектор случайных ошибок направлений; $\Lambda = AB_\lambda$, $B_\lambda^{\mathrm{т}}$; n — число направлений; w — невязка, вычисляемая по формуле

$$w = M_1' - M_{n+1}'.$$

Решение уравнения (6) под условием $\Delta^{\mathrm{т}} K_\Delta^{-1} \Delta = \min$ приводит к сводке формул:

$$\left\| \begin{aligned} & K_w = A K_\Delta A^{\mathrm{т}} = \mu^2 2; \\ & \hat{\lambda} = (\Lambda^{\mathrm{т}} K_w^{-1} \Lambda)^{-1} \Lambda^{\mathrm{т}} K_w^{-1} w = -\frac{w}{n}; \\ & P_\Lambda = E - \Lambda (\Lambda^{\mathrm{т}} K_w^{-1} \Lambda)^{-1} \Lambda^{\mathrm{т}} K_w^{-1} = 0; \\ & \hat{\Delta} = K_\Delta A^{\mathrm{т}} K_w^{-1} P_\Lambda w = 0; \\ & M = M' - B_\lambda \hat{\lambda} - \hat{\Delta} = M' + B_\lambda \frac{w}{n}; \\ & K_M = K_\Delta - K_\Delta A^{\mathrm{т}} K_w^{-1} P_\Lambda A K_\Delta = K_\Delta. \end{aligned} \right. \tag{7}$$

Таким образом, при уравнивании на станции горизонтальных направлений, измеренных круговыми приемами, исключается систематическая составляющая, в результате чего получается ряд некоррелированных равноточных направлений. Для рассматриваемого примера будем иметь

$$\left\| \begin{aligned} & M_1 = M_1'; \\ & M_2 = M_2' + \frac{1}{4} w; \\ & M_3 = M_3' + \frac{1}{2} w; \\ & M_4 = M_4' + \frac{3}{4} w; \\ & K_M = \mu^2 E. \end{aligned} \right. \tag{8}$$

При выполнении m' приемов вычисляются средние значения направлений, которые характеризуются ковариационной матрицей $K_M = \mu^2 \dfrac{1}{m'} E$.

Представляя результаты измерений в виде углов

$$\beta_п = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_2 - M_1 \\ M_3 - M_1 \\ M_4 - M_1 \end{bmatrix}, \beta_с = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_2 - M_1 \\ M_3 - M_2 \\ M_4 - M_3 \end{bmatrix}$$

или

$$\beta_с = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_4 - \beta_1 \\ \beta_5 - \beta_4 \end{bmatrix}$$

на основании известной формулы вычисления ковариационных матриц ошибок функций, получим

$$K_{\beta_n} = F_n K_M F_n^{\text{т}} = \mu^2 \frac{1}{m'} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mu^2 \frac{1}{m'} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad (9)$$

$$K_{\beta_c} = F_c K_M F_c^{\text{т}} = \mu^2 \frac{1}{m'} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \quad (10)$$

$$= \mu^2 \frac{1}{m'} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$K_{\beta_c} = F_{\beta_n} K_{\beta_n} F_{\beta_n}^{\text{т}} = \mu^2 \frac{1}{m'} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \mu^2 \frac{1}{m'} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

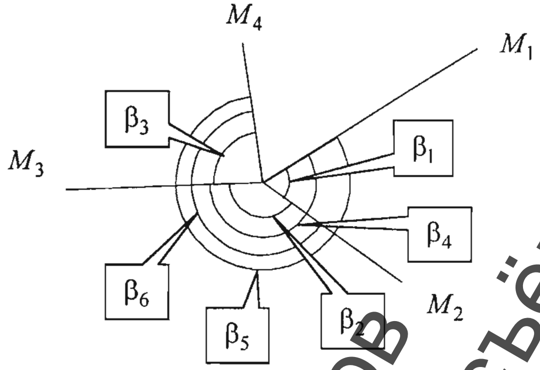

Рис. 2. Схема углов, измеренных во всех комбинациях

Из анализа корреляционных матриц ошибок направлений, углов от начального направления и разностей этих углов видно, что соотношение обратных весов составляет 1:2:2, а не 1:2:4.

Ковариационную матрицу (4) для ошибок ориентированных направлений можно получить, как показано в [3].

При уравнивании на станции углов, измеренных во всех комбинациях (рис. 2), решается система уравнений

$$\Delta_\beta + B\tau + l = 0 \qquad (11)$$

под условием

$$\Delta_\beta^{\tau} K_{\Delta_\beta}^{-1} \Delta_\beta = \min, \qquad (12)$$

Δ_β — вектор погрешностей измерений горизонтальных углов; B — матрица коэффициентов параметрических уравнений; τ — вектор неизвестных; $K_{\Delta_\beta} = \mu^2 P^{-1}$; P — весовая матрица измерения углов.

Если за единицу веса принят вес измерения направлений, то средние значения измеренных во всех комбинациях углов будут иметь вес $P = \frac{m}{2} E$, где m — число приемов; E — единичная матрица в частности размером 6×6.

Принимая в качестве необходимых параметров углы β_1, β_2, β_3, будем иметь

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad K_{\beta_{1,2,3}} = (B^{\text{т}} K_{\Delta_\beta}^{-1} B)^{-1} = \mu^2 \frac{2}{mn} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Если в качестве необходимых параметров принять углы β_1, β_4 и β_5, то получим

$$K_{\beta_{1,4,5}} = (B^{\text{т}} K_{\Delta_\beta}^{-1} B)^{-1} = \mu^2 \frac{2}{mn} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Уравненные значения углов можно представить рядом направлений, например:

$$M_1 = M_1;$$
$$M_2 = \beta_1 + M_1;$$
$$M_3 = \beta_4 + M_1;$$
$$M_4 = \beta_5 + M_1,$$

где M_1 — произвольное значение начального направления.

Для получения ковариационной матрицы ошибок направлений выразим углы функциями:

$$\beta_1 = M_2 - M_1;$$
$$\beta_4 = M_3 - M_1;$$
$$\beta_5 = M_4 - M_1$$

или

$$\beta = FM,$$

где

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Так как

$$K_\beta = FK_MF^{\text{т}}, \qquad (15)$$

то, умножая слева и справа обе части выражения (15) соответственно на $F^{\text{т}}(FF^{\text{т}})^{-1}$ и $(FF^{\text{т}})^{-1}F$, получим

$$F^{\text{т}}(FF^{\text{т}})^{-1}K_\beta(FF^{\text{т}})^{-1}F = \mu^2\frac{2}{mn}\begin{bmatrix} 0,75 & -0,25 & -0,25 & -0,25 \\ -0,25 & 0,75 & -0,25 & -0,25 \\ -0,25 & -0,25 & 0,75 & -0,25 \\ -0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,75 \end{bmatrix} \qquad (16)$$

$$F^{\text{т}}(FF^{\text{т}})^{-1}FK_MF^{\text{т}}(FF^{\text{т}})^{-1}F = \begin{bmatrix} 0,75 & -0,25 & -0,25 & -0,25 \\ -0,25 & 0,75 & -0,25 & -0,25 \\ -0,25 & -0,25 & 0,75 & -0,25 \\ -0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,75 \end{bmatrix}\times$$

$$\times K_M\begin{bmatrix} 0,75 & -0,25 & -0,25 & -0,25 \\ -0,25 & 0,75 & -0,25 & -0,25 \\ -0,25 & -0,25 & 0,75 & -0,25 \\ -0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,75 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что произведение матриц $F^{\text{т}}(FF^{\text{т}})^{-1}F$ есть идемпотентная матрица

$$U = \begin{bmatrix} 0,75 & -0,25 & -0,25 & -0,25 \\ -0,25 & 0,75 & -0,25 & -0,25 \\ -0,25 & -0,25 & 0,75 & -0,25 \\ -0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,75 \end{bmatrix}.$$

Приравнивая в выражении (16) правые части, получим уравнение

$$UK_MU = \mu^2\frac{2}{mn}U. \qquad (17)$$

Очевидно, что при $K_M = \mu^2 \frac{2}{mn} E$ и $K_M = \mu^2 \frac{2}{mn} U$ выражение (17) превращается в тождество:

$$UK_MU = \mu^2 \frac{2}{mn} UEU = \mu^2 \frac{2}{mn} U;$$
$$UK_MU = \mu^2 \frac{2}{mn} UUU = \mu^2 \frac{2}{mn} U.$$

Первое значение для K_M соответствует ковариационной матрице ошибок неориентированных направлений. Второе значение соответствует ковариационной матрице ошибок ориентированных направлений (дирекционных углов, вычисленных по результатам угловых измерений) [8].

Таким образом, угловые величины, измеряемые круговыми приемами и способом во всех комбинациях, могут представляться рядом равноточных направлений, различными углами и ориентированными направлениями. При их уравнивании важно использовать соответствующие ковариационные матрицы.

3. Оценка точности угловых измерений

Рассмотрим теперь оценку точности угловых измерений в сети триангуляции. Она выполняется на станции, по результатам предварительной обработки и при уравнивании сети.

На станции оценка точности угловых измерений по способу круговых приемов производится на основе формулы Петерса

$$\mu = 1{,}25 \frac{\sum [|v|]}{n\sqrt{m(m-1)}}, \tag{18}$$

где μ — средняя квадратическая погрешность измерения направления одним приемом; $\sum[\,|v|\,]$ — сумма абсолютных значений уклонений результатов измерений направлений от средних значений; m — число приемов, n — число направлений, считая и начальное.

Заметим, что точность направлений в способе круговых приемов может быть оценена так, как, например, изложено в [9, § 63]:

$$\mu = \sqrt{\frac{[v^2] - \frac{\sum [v]^2}{n}}{(n-1)(m-1)}} \qquad (19)$$

или методом максимального правдоподобия по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} \nu_i^{\mathrm{T}} Q_\beta^{-1} \nu_i}{(n-1)(m-1)}}, \qquad (20)$$

где ν_i — вектор отклонений результатов измерений в приеме i от своих средних значений; Q_β — корреляционная матрица ошибок углов от начального направления. Например, для углов, образованных четырьмя направлениями:

$$Q_\beta = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

если за единицу веса принят вес измерения направлений.

Для сравнения по формулам (18)—(20) была выполнена оценка точности измерений направлений одним приемом на пункте Шанца ганноверской триангуляции [9, § 63]. Результаты приведены в таблице.

Таблица

Значение средней квадратической ошибки направления		
По формуле (18)	По формуле (20)	Взято из [9, § 63]
1,99	2,00	2,00

Как видим, все формулы для вычисления средней квадратической ошибки направлений по результатам наблюдений на станции хорошо согласуются между собой. Однако наиболее удобной для вычислений является формула (18).

Оценка точности измерения углов по способу всех комбинаций производится по разностям v измеренного и уравненного на станции значений угла. Средняя квадратическая ошибка m_β угла, измеренного одним приемом, вычисляется по формуле

$$m_\beta = \sqrt{\frac{2m[v^2]}{(n-1)(n-2)}}. \qquad (21)$$

Соотношение средних квадратических ошибок m_β и μ (угла и направления) определяется формулой $m_\beta = \mu\sqrt{2}$.

По результатам уравнивания на станции точность угловых измерений оценивается по внутренней сходимости, т.е. по формулам, которые используют отклонения от среднего. Очевидно, что оценка точности по внутренней сходимости отражает влияние только случайных ошибок на точность измерений.

Оценку точности измерения углов в триангуляции на этапе предварительной обработки выполняют по формуле Ферреро

$$m_\beta = \sqrt{\frac{[w^2]}{3n}}, \qquad (22)$$

где n — число треугольников, w — невязки треугольников, которые порождаются случайными, остаточными систематическими и скрытыми ошибками.

По материалам уравнивания триангуляции СКО единицы веса

$$\mu = \sqrt{\frac{w^{\mathrm{T}} N^{-1} w}{r}} \qquad (23)$$

будет характеризовать точность измерения углов, если в качестве единицы веса был принят вес измерения углов. Заметим, что в формуле (23) участвуют все невязки независимых геометрических условий, которые возникают в сети, а N означает матрицу коэффициентов нормальных уравнений коррелат. Если использовать только невязки треугольников и считать, что измерения углов выполняются с одинаковой точностью, а их ошибки не коррелированны, то выражение (23) принимает вид формулы Ферреро.

Как видим, на разных этапах математической обработки оценка точности направлений не может иметь одно и то же значение [1, 2], так как на разных этапах оценивается влияние разных источников ошибок на точность измерений.