УДК 519.688

М. М. БЕЗРЯДИН, Г. И. ЛОЗГАЧЕВ

ПОСТРОЕНИЕ МОДАЛЬНОГО РОБАСТНОГО РЕГУЛЯТОРА ПРИ ВОЗМУЩАЮЩИХ И ЗАДАЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Рассматривается проблема построения модального регулятора на основе критерия, обеспечивающего оптимальное соотношение между качеством управления системой и ее робастными свойствами.

Ключевые слова: *алгоритм, модальный регулятор, робастность, качество.*

Одна из наиболее актуальных задач современной теории автоматического управления — компенсация внешних возмущений, влияющих на работу системы управления объектами.

В работах [1—4] предложен алгоритм построения регулятора для свободного движения. В настоящей статье рассматривается метод построения модальных робастных регуляторов при наличии задающих и возмущающих воздействий, при этом предполагается, что задающее и возмущающее воздействие имеют волновую структуру [5]. Данный метод распространяется на системы любого порядка, но в отличие от методов, рассмотренных в работах [6, 7], его математический аппарат достаточно прост и сводится к элементарному делению полиномов.

Метод синтеза регулятора. Рассмотрим замкнутую систему автоматического управления, структурная схема которой представлена на рис. 1.

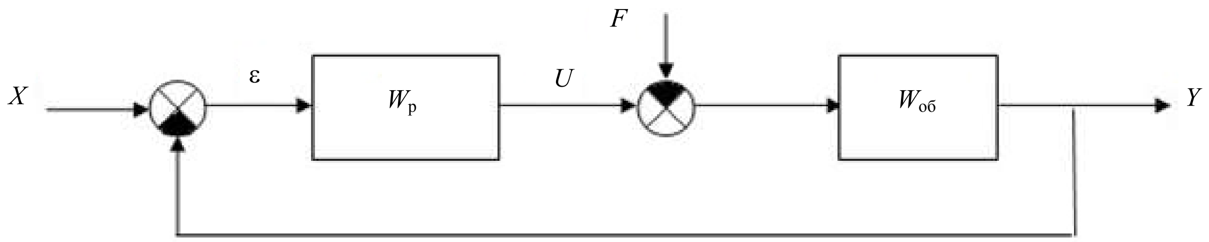

Рис. 1

Пусть задана передаточная функция объекта

$$W_{об}(p) = \frac{P_1(p)}{P_2(p)},$$

где $P_1(p)$ и $P_2(p)$ — полиномы степени m и n, $m \le n$.

Задающее воздействие характеризуется следующим выражением:

$$X(p)=\frac{R_1(p)}{R_2(p)},$$

где $R_1(p)$ и $R_2(p)$ — полиномы степени q и r, а внешнее возмущение — выражением

$$F(p)=\frac{G_1(p)}{G_2(p)},$$

где $G_1(p)$ и $G_2(p)$ — полиномы степени g_1 и g_2.

Пусть задана передаточная функция замкнутой системы в виде частного двух полиномов $Q_1(p)$ и $Q_2(p)$:

$$W_{\text{з.с}}(p)=\frac{Q_1(p)}{Q_2(p)},$$

где $Q_1(p)$ и $Q_2(p)$ — полиномы степени l и k, $l\le k$.

Полином $Q_2(p)$ будем считать требуемым. Полином $Q_1(p)$ задан с точностью до коэффициентов, которые определяются в процессе построения передаточной функции регулятора.

Ошибка управления может быть представлена выражением

$$\varepsilon(p)=X(p)-Y(p)=X(p)-(U(p)+F(p))W_{\text{об}}(p).$$

Введем в рассмотрение полиномы L_1, L_2, $N_{\text{ост}}$, $L_{\text{ост}}$, T_1, $T_{\text{ост}}$, S_1, $S_{\text{ост}}$:

$$\frac{Q_2(p)-Q_1(p)}{P_2(p)}=L_2(p)+\frac{N_{\text{ост}}(p)}{P_2(p)};$$

$$\frac{Q_1(p)}{P_1(p)}=L_1(p)+\frac{L_{\text{ост}}(p)}{P_1(p)};$$

$$\frac{Q_2(p)-Q_1(p)}{R_2(p)}=T_1(p)+\frac{T_{\text{ост}}(p)}{R_2(p)};$$

$$\frac{L_2(p)}{G_2(p)}=S_1(p)+\frac{S_{\text{ост}}(p)}{G_2(p)},$$

тогда

$$\varepsilon(p)=\frac{Q_2(p)-Q_1(p)}{Q_2(p)}X(p)-\frac{P_1(p)L_2(p)}{Q_2(p)}F(p).$$

Если исходная динамическая система является полностью управляемой и наблюдаемой, т.е. передаточная функция объекта $W_{\text{об}}(p)$ представляет собой несократимую дробь, и выполняется условие $k\ge(2n-1)+r+g_2$, то всегда найдутся коэффициенты полинома $Q_1(p)$, при которых происходит деление без остатка: $Q_2(p)-Q_1(p)$ на $P_2(p)$, $Q_2(p)-Q_1(p)$ на $R_2(p)$ и $Q_1(p)$ на $P_1(p)$. При этом существует передаточная функция регулятора, обеспечивающая воспроизведение задающего воздействия без остаточной ошибки и желаемое расположение корней характеристического полинома [1—3]:

$$W_{\text{р}}(p)=\frac{L_1(p)}{L_2(p)}.$$

Для построения регулятора сформируем критерий, обеспечивающий необходимое соотношение между качеством управления системой и ее робастными свойствами:

$$I = \beta_1 \int_0^\infty \left(\varepsilon(t)^2 + \mathrm{K}\dot{\varepsilon}(t)^2 \right) dt + \beta_2 \frac{1}{\rho}, \tag{1}$$

где K — некоторое число, ρ — мера робастности, β_1 и β_2 — весовые коэффициенты.

Первое слагаемое в уравнении (1) представляет собой интегральный критерий качества, а второе слагаемое характеризует робастные свойства системы.

Зададим характеристический полином замкнутой системы с коэффициентами в виде параметров. Используя алгоритм, описанный в работе [8], можно получить регулятор, коэффициенты которого будут выражены через коэффициенты требуемого полинома. Минимизация критерия (1) позволяет найти значения коэффициентов характеристического полинома, обеспечивающие желаемое соотношение между робастными свойствами системы и качеством управления.

Для систем небольшой размерности, а также в случае если передаточная функция объекта имеет один параметр, критерий может быть выражен в явной форме. Иначе необходимо применить численные методы оптимизации.

Вычисление меры робастности системы. Пусть R_n — множество многочленов степени n над полем действительных чисел. Пусть передаточная функция объекта задана в виде

$$W^*_{\text{об}}(p) = \frac{P_1^*(p)}{P_2^*(p)}, \tag{2}$$

где $P_1^* \in R_m$, $P_2^* \in R_n$ и $m \le n$; P_1^* и P_2^* содержат параметрическую неопределенность, заданную в виде

$$\underline{l_i} \le q_i^* - q_i \le \overline{l_i},$$

где q_i — заданные номинальные значения параметров, q_i^* — реальные значения параметров, $\underline{l_i}$ и $\overline{l_i}$ — пределы возможных погрешностей определения i-го параметра, $i = \overline{1, s}$, $s \le n + m$.

Необходимо найти передаточную функцию регулятора, обеспечивающего устойчивость замкнутой системы с передаточной функцией

$$W_{\text{з.с}}(p) = \frac{W^*_{\text{об}}(p) W_{\text{р}}(p)}{1 + W^*_{\text{об}}(p) W_{\text{р}}(p)}$$

при максимальном значения критерия робастности. В качестве такого критерия можно принять $\gamma = \min(\overline{l_i} - \underline{l_i})$ или $\mu = \sum_{i=1}^{s} \delta_i (\overline{l_i} - \underline{l_i})$, где δ_i — весовые коэффициенты, $i = \overline{1, s}$, $s \le n + m$. В качестве критерия робастности можно также выбрать объем (в общем случае n-мерный) области устойчивости системы.

Представим передаточную функцию объекта управления (2) в виде

$$W^*_{\text{об}}(p) = \frac{P_1^*(p) + \Delta P_1(p)}{P_2^*(p) + \Delta P_2(p)},$$

где $\Delta P_1(p)$ и $\Delta P_2(p)$ — полиномы, содержащие неопределенность.

В этом случае характеристический полином замкнутой системы

$$D(p) = Q_2(p) + \Delta P_1(p)L(p) + \Delta P_2(p)N(p)\,. \qquad (3)$$

Обозначим коэффициенты полинома $D(p)$ через b_i, $i = \overline{0, k}$, тогда

$$D(p) = b_0 p^k + b_1 p^{k-1} + ... + b_{k-1} p + b_k\,.$$

Коэффициенты b_i представляют собой функции от коэффициентов a_i, $i = \overline{0,k}$, полинома Q_2 и параметров полиномов $\Delta P_1(p)$ и $\Delta P_2(p)$.

Обозначим через $u_j = (a_1^j, a_2^j, ..., a_{k-1}^j, a_k^j)$ совокупность коэффициентов полинома Q_2. Используя численные методы, можно найти значения $a_1^j, a_2^j, ..., a_{k-1}^j, a_k^j$, обеспечивающие максимальное или требуемое значение любого из перечисленных критериев. Например, для вычисления критерия $\gamma = \min(\overline{l_i} - \underline{l_i})$ можно воспользоваться методом, предложенным в работе [9].

Пример. Пусть передаточная функция объекта задана в виде

$$W_{\text{об}}(p) = \frac{-Kp + 1}{Tp + 1}.$$

Внешнее воздействие представлено единичным скачком.

Зададим передаточную функцию замкнутой системы в виде

$$W_{\text{з.с}}(p) = \frac{Q_1(p)}{Q_2(p)} = \frac{d_0 p^2 + d_1 p + d_2}{p^2 + a_1 p + a_2}.$$

В качестве расчетных значений примем $K = 1$, $T = 1$. Используя программу, описанную в работе [8], получим выражения для передаточной функции регулятора, при котором характеристический полином замкнутой системы будет равен $Q_2(p)$:

$$W_{\text{р}}(p) = \frac{p(-1 + a_1 + a_2) + a_2}{p(1 + a_1 + a_2)}.$$

Квадратичный критерий качества, выраженный через коэффициенты a_i характеристического полинома, определяется как

$$I = \frac{(1 + a_1 + a_2)^2 \left((1 + a_1)^2 - 2a_1 a_2 + a_2^3\right)}{8a_1 a_2}.$$

Зададим приращение параметрам объекта: $K = 1 + \Delta K$, $T = 1 + \Delta T$, при этом

$$W_{\text{об}}(p) = \frac{-p + 1 - \Delta Kp}{p + 1 + \Delta Tp}.$$

Согласно выражению (3) характеристический полином системы с обратной связью

$$D(p) = p^2(1 + \Delta T(1 + a_1 + a_2) + \Delta K(-1 + a_1 + a_2)) + p(a_1 + \Delta K a_2) + a_2\,.$$

Используя условие устойчивости системы, получаем

$$\Delta K > -\frac{a_1}{a_2},\ \ \Delta T > -1 - \Delta K(-1 + a_1 + a_2).$$

Минимизируем функционал I. Для этого определим минимум интегрального критерия. При $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0$ получим $a_1 = 0,66$ и $a_2 = 0,85$. Используя эти значения как начальные, можем производить настройку робастных свойств системы. Переходный процесс в системе при единичном воздействии и $a_1 = 0,66$, $a_2 = 0,85$ представлен на рис. 2.

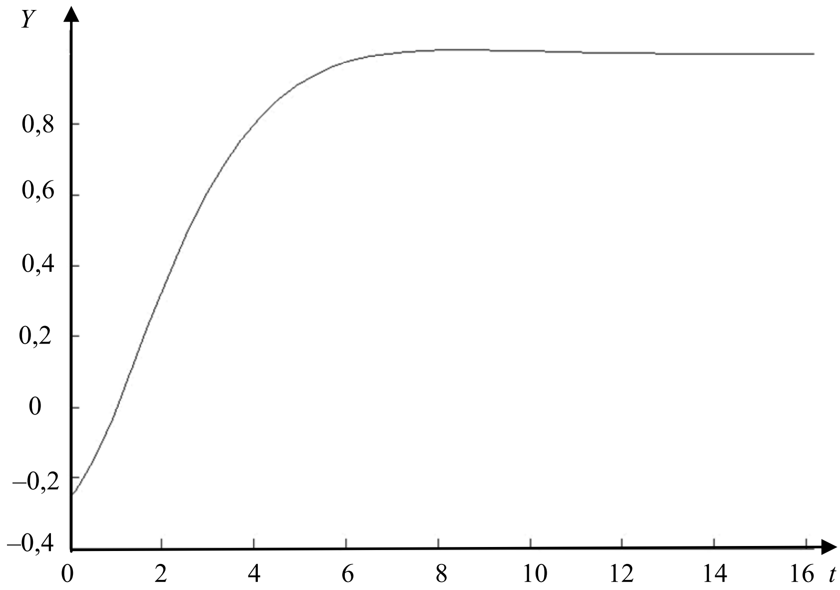

Рис 2.

Рассмотренный метод построения модального робастного регулятора благодаря алгоритмической простоте достаточно удобен для реализации на компьютере. К достоинствам этого метода можно также отнести возможность получения регулятора в общем виде, что позволяет производить оптимизацию характеристик системы непосредственно по коэффициентам характеристического полинома замкнутой системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лозгачев Г. И.* Синтез модальных регуляторов по передаточной функции замкнутой системы // АиТ. 1995. № 5. С. 49—55.
2. *Лозгачев Г. И.* Построение модальных регуляторов для одноконтурных и многосвязных систем // АиТ. 2000. № 12. С. 15—21.
3. *Дылевский А. В., Лозгачев Г. И.* Синтез линейных систем управления с заданным характеристическим полиномом// Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления. 2003. № 5. С. 17—20.
4. *Лозгачев Г. И., Безрядин М. М.* Проблема соотношения робастности и качества управления при построении модальных регуляторов // Кибернетика и высокие технологии XXI века: XII Междунар. науч.-техн. конф., 11—12 мая 2011г. Воронеж, 2011. Т. 2. С. 412—416.
5. Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах / Под ред. *К. Т. Леондеса*. М.: Мир, 1980. 408 с.
6. *Bhattacharyya S. P., Chapellat H., Keel L.* Robust control: the parametric approach // Upper Saddle River. N. J.: Prentice Hall, 1995.
7. *Coddard P. J., Clover K.* Controller approximation^ approaches for preserving H^{∞} performance // IEEE Trans. Automat. Control. 1998. Vol. 43, N 7. P. 858—871.
8. *Лозгачев Г. И., Безрядин М. М.* Программная реализация алгоритма построения модального робастного регулятора по передаточной функции замкнутой системы в случае наличия возмущающего воздействия // Вестн. ВГУ. Системный анализ и информационные технологии. 2010. № 2. С. 50—52.
9. *Воронов А. А*. Введение в динамику сложных управляемых систем. М.: Наука, 1985.