

УДК 621.01

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛОЖЕНИЯ ШАТУННЫХ ТОЧЕК ДЛЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ РЫЧАЖНЫХ ПРЯМОЛИНЕЙНО НАПРАВЛЯЮЩИХ МЕХАНИЗМОВ

В. А. ХАРЖЕВСКИЙ

Хмельницкий национальный университет, Украина

Введение

При проектировании современных машин в различных отраслях машиностроения актуальной задачей является синтез цикловых механизмов, некоторая точка исполнительного органа которых должна совершать приближенно прямолинейное движение. Для этого могут использоваться различные типы механизмов, в частности, рычажные, на основе которых можно также проектировать механизмы с периодической остановкой (выстоем) выходного звена. Вследствие отсутствия высших кинематических пар, геометрического замыкания звеньев, такие механизмы имеют ряд преимуществ перед другими типами механизмов, в частности, кулачковыми, что позволяет повысить рабочие скорости машин, обеспечить большую нагрузочную способность, надежность и долговечность.

Приведем некоторые примеры использования таких механизмов в современном машиностроении: механизм портального крана, механизм в рабочем оборудовании гидравлических экскаваторов, механизмы игл высокопроизводительных швейных и основовязальных машин, механизмы ведения инструмента при обработке деталей, механизмы для преобразования вращательного движения в возвратно-поступательное, например, для приводов насосов и т. д.

Однако основной проблемой использования рычажных механизмов на практике является достаточно сложная процедура их синтеза. Существует два направления синтеза таких механизмов [1], [4], [7]: использование алгебраических методов Чебышева, развитию которых посвящены, в частности, работы Блоха, Саркисяна, Эдильяна, Киницкого [2], Функа [5], Гассманна [6], а также методы кинематической геометрии, развитию которых посвящены работы Бурместера (Burmeister), Геронимуса, Лихтенхельдта (Lichtenheldt), Черкудинова [1], Хана (Han). Детальный обзор современного состояния теории синтеза механизмов приведен в работе Уанга [7].

Особенностью методов кинематической геометрии является использование кратных узлов интерполяции, в которых совпадают не только значения самих функций, но также их производные до n -го порядка. В некоторой окрестности таких точек будут участки приблизительно постоянной кривизны, что может быть использовано для проектирования круговых и прямолинейно направляющих механизмов. Такими особыми точками шатунной плоскости являются, в частности, точки Болла (Ball), Бурместера, Чебышева, точки распрямления 4-го порядка [1], [4].

Цель работы – разработка метода синтеза рычажных прямолинейно направляющих механизмов с использованием точек распрямления 4-го порядка, который, в отличие от известного метода, позволяет определять такие точки для любых положений шатунной плоскости шарнирных четырехзвенных механизмов.

Постановка задачи

Как показано автором в работе [4], точки распрямления 4-го порядка в общем случае определяются методами кинематической геометрии как точки пересечения поворотной окружности (геометрическое место распрямлений или перегибов шатунных кривых) с кривой геометрического места точек, обеспечивающих касание не ниже 4-го порядка со своим кругом кривизны: такими точками, в частности, являются точки подвижных шарниров шарнирного четырехзвенного механизма, а также точки Чебышева (случай совпадения точки Болла с точкой Бурместера).

Однако недостатком известного метода определения точек распрямления 4-го порядка, который описан в работе [4], является то, что данные точки определяются как один из корней тригонометрического уравнения с использованием метода универсальной подстановки $z = \operatorname{tg}(\delta/2)$, что приводит к потере корней вида $\delta = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$, т. е. существует вероятность потери корня $\delta = \pi$ (возможный частный случай), о чем в работе [4] указано. В настоящей работе рассмотрим метод синтеза таких механизмов, который не имеет указанного выше недостатка.

Основная часть

Для решения поставленной задачи запишем уравнение геометрического места точек, рулетты (вычерчиваемые шатунные кривые) которых обеспечивают касание не ниже 4-го порядка со своим кругом кривизны [1]:

$$\omega^2(x^2 + y^2)(m_3 + m_4x + m_5y) - (x_0''x + y_0''y)(m_1x + m_2y + m_3) = 0. \quad (1)$$

Коэффициенты m_1, \dots, m_5 в уравнении (1) определяются таким образом:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= 4\omega y_0''' - 6\omega^2 x_0'' + 6\dot{\omega} y_0''; & m_2 &= -4\omega x_0''' - 6\omega^2 y_0'' - 6\dot{\omega} x_0''; & m_3 &= 3(x_0''^2 + y_0''^2); \\ m_4 &= x_0^{IV} + \Psi x_0'' + m_1; & m_5 &= y_0^{IV} + \Psi y_0'' + m_2; & \Psi &= (\omega^4 - 4\omega\ddot{\omega} - 3\dot{\omega}^2)/\omega^2, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где ω , $\dot{\omega}$, $\ddot{\omega}$ – угловая скорость вращения шатунной плоскости и ее производные по времени; x_0'' , y_0'' , x_0''' , y_0''' , x_0^{IV} , y_0^{IV} – проекции ускорения и производные высоких порядков от перемещения полюса P мгновенного вращения шатунной плоскости.

Уравнение поворотной окружности (круга перегибов) [1]:

$$\omega^2(x^2 + y^2) - (x_0''x + y_0''y) = 0. \quad (3)$$

Определяем точку распрямления 4-го порядка для заданного положения шатунной плоскости как точку пересечения кривых (1) и (3) в повернутой системе координат $x_1 P y_1$:

$$x_F = (x_0'' + n y_0'')/\omega^2(n^2 + 1); \quad y_F = n x, \quad n = (m_4 - m_1)/(m_2 - m_5). \quad (4)$$

Если в соответствии с рекомендациями [1] принять угловую скорость вращения шатунной плоскости $\omega = 1$, то $\dot{\omega} = \ddot{\omega} = 0$. Кроме того, переместив центр системы координат в полюс P мгновенного вращения шатунной плоскости и направив ось абсцисс x_1 вдоль полюсной касательной, получим $x_0'' = 0$.

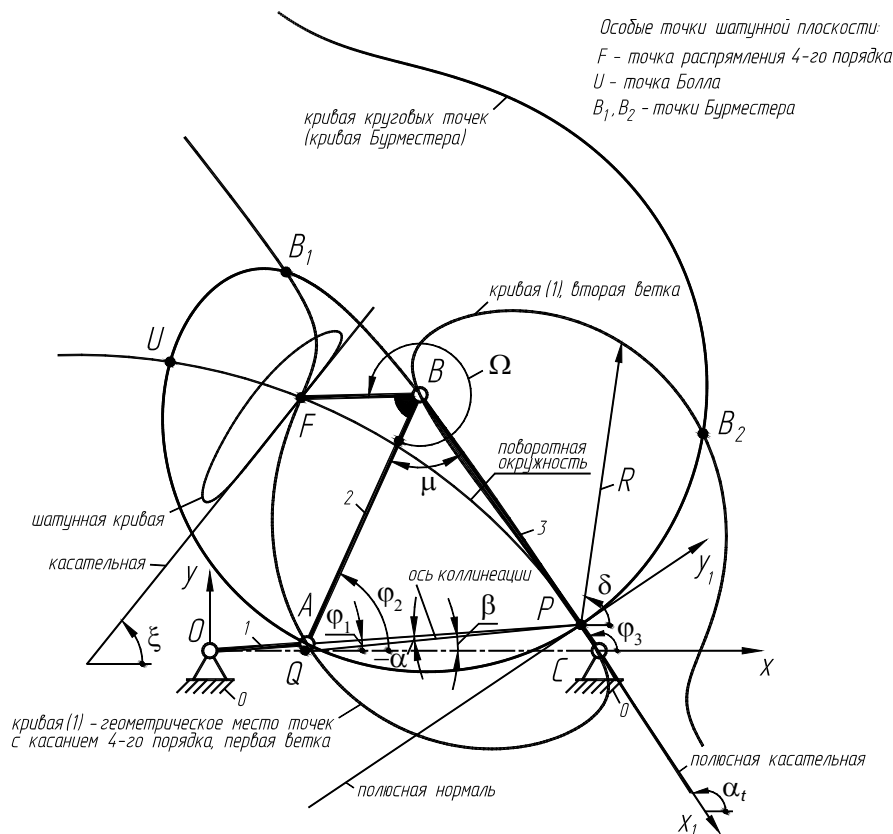


Рис. 1. Расчетная схема шарнирного четырехзвенного прямолинейно направляющего механизма

Учитывая вышеизложенное, последовательность проектирования рычажных прямолинейно направляющих механизмов будет следующей (рис. 1):

1. Задаемся длиной кривошипа $r = l_{OA}$, шатуна $b = l_{AB}$, коромысла $c = l_{BC}$, а также углом поворота кривошипа φ_1 , для которого будем определять в шатунной плоскости точку распрямления 4-го порядка. В соответствии с рекомендациями [1] в качестве модуля длины принято расстояние между осями неподвижных шарниров механизма $d = l_{OC} = 1$. Исследование механизма проводим в соответствии с [3].

Определяем координаты точки A механизма:

$$X_A = r \cos \varphi_1; \quad Y_A = r \sin \varphi_1. \quad (5)$$

2. Вычисляем углы φ_2 и φ_3 , определяющие положение соответственно шатуна 2 и коромысла 3 механизма:

$$\varphi_2 = \psi + \kappa; \quad \varphi_3 = \psi - \chi + \pi, \quad (6)$$

где $\psi = \arctg[Y_A / (X_A - 1)]$; $\chi = \pi - \kappa - \mu$.

Для вычисления искомых углов дополнительно определяем такие величины:

$$\kappa = \arccos\left(\frac{b^2 + \Delta^2 - c^2}{2b\Delta}\right); \quad \mu = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - \Delta^2}{2bc}\right); \quad \Delta = \sqrt{(1 - X_A)^2 + Y_A^2}. \quad (7)$$

3. Вычисляем координаты точки B механизма:

$$X_B = 1 + c \cos \varphi_3; \quad H_B = 1 + c \sin \varphi_3. \quad (8)$$

4. Определяем координаты полюса P мгновенного вращения шатунной плоскости и мгновенного полюса Q относительного движения шатуна 2 и коромысла 3 механизма [1]:

$$X_P = \operatorname{tg} \varphi_3 / (\operatorname{tg} \varphi_3 - \operatorname{tg} \varphi_1); \quad Y_P = X_P \operatorname{tg} \varphi_1; \quad X_Q = (X_A Y_B - X_B Y_A) / (Y_B - Y_A); \quad Y_Q = 0. \quad (9)$$

5. Ускорение полюса P мгновенного вращения шатунной плоскости [1]:

$$y_0'' = -|l_{OP}(l_{OP} - l_{OA}) / l_{OA} \sin(\varphi_3 - \beta)|, \quad (10)$$

где угол наклона оси коллинеации $\beta = \operatorname{arctg}[Y_P / (Y_P - X_Q)]$, $l_{OP} = X_P / \cos \varphi_1$.

6. Координаты шарниров A и B в повернутой системе координат $x_1 P y_1$:

$$\begin{aligned} x_A &= (X_P - X_A) \cos \alpha_t + (Y_P - Y_A) \sin \alpha_t, \quad y_A = (Y_P - Y_A) \cos \alpha_t + (X_A - X_P) \sin \alpha; \\ x_B &= (X_P - X_B) \cos \alpha_t + (Y_P - Y_B) \sin \alpha_t, \quad y_B = (Y_P - Y_B) \cos \alpha_t + (X_B - X_P) \sin \alpha, \end{aligned} \quad (11)$$

где угол наклона полюсной касательной $\alpha_t = \varphi_1 + \varphi_3 - \beta$.

7. Определяем производные 3-го порядка от перемещения полюса P мгновенного вращения шатунной плоскости механизма:

$$x_0''' = \frac{3y_A y_0''}{x_A^2 + y_A^2} - \frac{y_A y_0'''}{x_A} - 3y_0''; \quad y_0''' = \frac{3x_A x_B y_B y_0'' [y_B - y_A (x_B^2 + y_B^2) / (x_A^2 + y_A^2)]}{(x_A y_B - x_B y_A)(x_B^2 + y_B^2)}. \quad (12)$$

8. Производные 4-го порядка от перемещений полюса P мгновенного вращения:

$$x_0^{IV} = \frac{y_A y_0'' [3y_0'' - y_A (4x_0''' + 6y_0'')] + 4x_A y_0'''}{x_A (x_A^2 + y_A^2)} - \frac{3y_0'' - y_A (4x_0''' + 5y_0'' - y_0^{IV})}{x_A} - 4y_0'''; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} y_0^{IV} &= \frac{x_A y_B y_0'' [3y_0'' - y_B (4x_0''' + 6y_0'')] + 4x_B y_0'''}{(x_A y_B - x_B y_A)(x_B^2 + y_B^2)} - \frac{x_A}{(x_A y_B - x_B y_A)} \times \\ &\times \left[\frac{x_B y_A y_0'' (n_1 - y_A y_0'')}{x_A (x_A^2 + y_A^2)} - \frac{x_B n_1}{x_A} + 4y_0''' x_B + 3y_0''^2 - y_B (4x_0''' + 5y_0'') \right], \end{aligned} \quad (14)$$

где $n_1 = 3y_0''^2 + 4x_A y_0''' - y_A (4x_0''' y_A + 5y_0'')$.

9. Определяем координаты точки распрямления 4-го порядка F в базовой системе координат xOy . Для этого проведем обратный поворот системы координат:

$$X_F = X_P - x_F \cos \alpha_t + y_F \sin \alpha_t; \quad Y_F = Y_P - y_F \cos \alpha_t - x_F \sin \alpha_t. \quad (15)$$

10. Проектируем четырехзвенный механизм, у которого длина второго плеча шатуна $k = l_{BF}$ и угол Ω его излома определяют положение шатунной точки, в качестве которой будет принята найденная точка распрямления 4-го порядка:

$$k = l_{BF} = \sqrt{(X_F - X_B)^2 + (Y_F - Y_B)^2}; \quad \Omega = \pi - \varphi_2 + \operatorname{arctg} \left(\frac{Y_F - Y_B}{X_F - X_B} \right), \quad 0 \leq \Omega \leq 2\pi. \quad (16)$$

Выбрав найденную точку распрямления 4-го порядка в качестве шатунной точки, получим шатунную кривую, которая в некоторой окрестности от выбранной точки будет иметь приближенно-прямолинейный участок.

11. Угол наклона прямолинейного участка шатунной кривой механизма:

$$\xi = \operatorname{arctg} \left(\frac{Y_P - Y_F - y_0'' \cos \alpha_t}{X_P - X_F + y_0'' \sin \alpha_t} \right). \quad (17)$$

Следует отметить, что поскольку угол ξ , а также все другие углы, значения которых определяются через функцию $\operatorname{arctg}(x)$, могут изменяться от 0 до 360°, для определения их величины нужно использовать не обычную функцию арктангенса, а функцию $\xi = \operatorname{arctan} 2(y, x)$, где y, x – соответственно числитель и знаменатель в выражении (18). Эта функция есть в большинстве языков программирования.

Как видно (рис. 1), найденная точка распрямления 4-го порядка не совпадает с точками Бурместера или Болла (которые также используются для проектирования соответственно круговых и прямолинейно-направляющих механизмов) и определяет отдельное семейство прямолинейно направляющих механизмов.

Геометрическим местом точек распрямления 4-го порядка, найденных для разных положений шатунной плоскости механизма, является кривая точек распрямления 4-го порядка, пример которой показан на рис. 2, а.

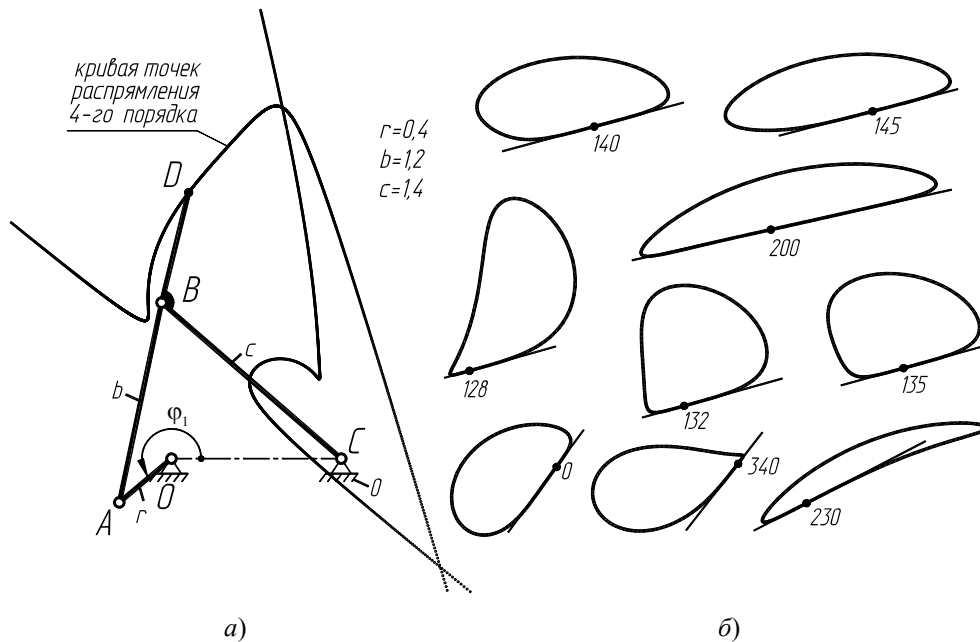


Рис. 2. Проектирование прямолинейно направляющих механизмов:

а – кривая точек распрямления 4-го порядка шарнирного четырехзвенника (для заданных размеров звеньев r, b, c); б – примеры полученных шатунных кривых (синтез проведен для разных углов поворота кривошипа)

На рис. 2, б показаны примеры форм шатунных кривых с прямолинейными участками, которые можно получить с помощью найденных точек распрямления 4-го порядка. На основе таких механизмов можно также спроектировать цикловые меха-

низмы с периодической остановкой (выстоем) выходного звена, присоединив диады II класса 3-го и 5-го вида (по классификации Ассура-Артоболевского).

Для проверки правильности проведенного синтеза покажем, что найденные точки распрямления 4-го порядка действительно принадлежат поворотной окружности (3) и кривой (1) геометрического места точек, обеспечивающих касание не ниже 4-го порядка со своим кругом кривизны. Несмотря на то что уравнение (1) может быть использовано для проведения расчетов, его нельзя использовать для графического построения кривой, поскольку оно записано в неявном виде. Для этого необходимо записать уравнение в параметрическом представлении, что будет рассмотрено ниже.

Проведем радиус-вектор R из полюса P мгновенного вращения шатунной плоскости под углом δ , значения которого будут изменяться от 0 до 2π (рис. 1), причем справедливой будет следующая зависимость:

$$y = x \operatorname{tg} \delta. \quad (18)$$

Тогда уравнение (1) можно представить в таком виде:

$$k_1 x^3 + k_2 x^2 - k_3 x = 0, \quad (19)$$

где коэффициенты k_1, k_2, k_3 :

$$k_1 = \frac{\omega^3 (m_5 \operatorname{tg} \delta + m_4)}{\cos^2 \delta}; \quad k_2 = \frac{\omega^2 m_3}{\cos^2 \delta} - (x_0'' + y_0'' \operatorname{tg} \delta)(m_1 + m_2 \operatorname{tg} \delta); \quad k_3 = m_3 (x_0'' + y_0'' \operatorname{tg} \delta).$$

Очевидно, что уравнение (19) представляет собой полином 3-й степени, у которого отсутствует свободный член. Таким образом, одним из корней уравнения (19) является $x = 0$, геометрический смысл которого состоит в том, что кривая (1) проходит через полюс P мгновенного вращения шатунной плоскости. Сократив (19) на x , получим квадратное уравнение, определим его корни:

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{2k_1} \left(\sqrt{k_2^2 + 4k_1 k_3} - k_2 \right). \quad (20)$$

Поскольку уравнение (19) имеет два корня, то кривая (1) состоит из двух веток. Проведение геометрических построений по выведенным формулам подтвердило правильность проведенных расчетов: как показано на рис. 1, точки распрямления 4-го порядка, а также точки Бурместера принадлежат кривой геометрического места точек (1), что соответствует теоретическим положениям кинематической геометрии.

Заключение

В результате проведенных исследований разработан метод проектирования рычажных прямолинейно направляющих механизмов с использованием теоретических положений кинематической геометрии бесконечно близких положений шатунной плоскости, в частности, с использованием точек распрямления 4-го порядка. Разработанный метод, в отличие от известного, позволяет определять положение этих точек в шатунной плоскости для любых положений механизма. Кроме того, выведено уравнение кривой (в параметрическом виде) геометрического места точек, обеспечивающих касание не ниже 4-го порядка со своим кругом кривизны, что позволило провести графическое построение этой кривой и подтвердить правильность разработанного метода синтеза.

Литература

1. Артоболевский, И. И. Синтез плоских механизмов / И. И. Артоболевский, Н. И Левитский, С. А. Черкудинов. – М. : Физматгиз, 1959. – 1084 с.
2. Киницкий, Я. Т. Шарнирные механизмы Чебышева с выстоем выходного звена / Я. Т. Киницкий. – К. : Вища шк., 1990. – 232 с.
3. Кіницький, Я. Т. Теорія механізмів і машин в системі Mathcad : навч. посібник / Я. Т. Кіницький, В. О. Харжевський, М. В. Марченко. – Хмельницький : ХНУ, 2014. – 295 с.
4. Харжевський, В. О. Синтез важільних прямолінійно-напрямних механізмів та механізмів із зупинкою вихідної ланки на базі шарнірного чотириланкового механізму : дис. ... канд. техн. наук : 05.02.02 / В. О. Харжевський ; Хмельницький держ. ун-т. – Хмельницький, 2004. – 262 с.
5. Funk, W. Unsymmetric Tchebysheff-type Straight-line Mechanisms / W. Funk, V. Gassmann // Proc. Tenth World Congress on the Theory of Mechanisms and Machines, vol. 1 Oulu, Finland, 1999. – P. 222–226.
6. Gassmann V. Synthese von Geradfürungen mit ebenen Viergelenkgetrieben, Hamburg, Universität der Bundeswehr Diss., 2000. – 102 p.
7. Wang, D. Kinematic Differential Geometry and Saddle Synthesis of Linkages / D. Wang, W. Wang. – John Wiley & Sons Singapore Pte. Ltd., 2015. – 450 p.

Получено 21.09.2015 г.