

МЕТОДИКА АНАЛИЗА ВЛИЯНИЯ СИЛ ИНЕРЦИИ НА ДИНАМИКУ МАНИПУЛЯЦИОННЫХ РОБОТОВ

Введение

В настоящей работе объектом исследования являются силы инерции, возникающие при движении исполнительного механизма манипуляционного робота. Такой исполнительный механизм называют манипулятором, или манипуляционной системой. Манипуляционные системы роботов структурно представляют собой разомкнутую кинематическую цепь, состоящую из звеньев, соединённых между собой кинематическими парами пятого класса. Звенья моделируются абсолютно твёрдыми телами.

Большинство известных методик моделирования динамики манипуляционных систем основываются на математических моделях ориентированных на выполнение эффективных расчётов. Однако стремление к уменьшению числа операций при проведении вычислений приводит к потере информации, необходимой для проведения комплексного анализа.

Установлено, что нагрузка на приводы манипуляционных роботов определяется главным образом силами инерции, чем быстрее робот выполняет операции, тем выше инерционные нагрузки [1, 2, 3]. Разработка методик, предоставляющих возможность проведения анализа влияния сил инерции на движение манипуляционных систем, является актуальной задачей, решение которой будет способствовать повышению быстродействия манипуляционных роботов, снижению энергоёмкости процессов манипулирования.

Наиболее предпочтительным подходом для разработки методик проведения анализа влияния сил инерции на движение сложных пространственных механизмов, таких как манипуляционные системы, содержащем возможности проведения комплексного анализа динамики, учитывающего влияние всех инерционных факторов, является подход, основанный на методе Лагранжа-Эйлера, реализуемый с использованием аппарата матриц преобразования однородных координат [4].

1. Уравнение движения манипуляционной системы

Для динамического анализа манипуляционных систем роботов, звенья которых моделируются твёрдыми телами, будем использовать математическую модель, полученную на основе уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [S]\{\dot{q}^2\} + 2[K]\{\dot{q}_i\dot{q}_j\} = \{Q\}, \quad i \neq j \quad (i, j = (1, \dots, n)), \quad (1)$$

где n – число степеней свободы манипуляционной системы, $\{\ddot{q}\} = [\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_n]^T$ – вектор

ускорений обобщённых координат, $\{\dot{q}^2\} = [\dot{q}_1^2, \dot{q}_2^2, \dots, \dot{q}_n^2]^T$ – вектор квадратов скоро-

стей обобщённых координат, $\{\dot{q}_i\dot{q}_j\} = [\dot{q}_1\dot{q}_2, \dots, \dot{q}_1\dot{q}_n, \dot{q}_2\dot{q}_3, \dots, \dot{q}_2\dot{q}_n, \dots, \dot{q}_{n-1}\dot{q}_n]^T$ – вектор попарного произведения обобщённых скоростей,

$$[M] = \sum_{k=1}^n [m_{kij}], \quad m_{kij} = \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_j} \right), \quad i, j = (1, \dots, n); \quad (2)$$

$$[S] = \sum_{k=1}^n [s_{kij}], \quad s_{kij} = \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_j^2} \right), \quad i, j = (1, \dots, n); \quad (3)$$

$$[K] = \sum_{k=1}^n [k_{kih}], \quad k_{kih} = \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_l \partial q_t} \right), \quad i = (1, \dots, n), \quad (4)$$

$$h = \left(1, \dots, C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} \right).$$

Здесь l, t принимают значения порядковых сочетаний из n элементов по 2, для соответствующих им индексов j ; H_k – матрица (4×4) инерции k -го звена [1, 4, 5]. $A_{0,k}$ – матрица (4×4) преобразования однородных координат из системы S_k , связанной с k -ым звеном, в абсолютную систему координат S_0 . Эта матрица может быть вычислена как последовательность произведений [1, 4, 6]:

$$A_{0,k} = A_{0,1} A_{1,2} \dots A_{(i-1),i} A_{i,(i+1)} \dots A_{(k-1),k} = \prod_{i=1}^k A_{(i-1),i}, \quad (5)$$

$A_{(i-1),i}$ – матрица (4×4) относительного движения двух соседних звеньев.

В уравнениях (1) – (4) и далее матрицы и векторы, имеющие размерность определяемую степенью свободы системы (n), обозначаются в квадратных и соответственно в фигурных скобках. Например $[M]$ – матрица размерности ($n \times n$), $\{Q\} = [Q_1, Q_2, \dots, Q_i, \dots, Q_n]^T$ – вектор столбец, имеющий размерность ($n \times 1$).

Правая часть уравнения (1) представляет собой вектор обобщённых сил $\{Q\}$, действующих на манипуляционную систему [7]:

$$\{Q\} = \{Q_D\} + \{Q_G\} + \{Q_F\}, \quad (6)$$

$\{Q_D\}$ – вектор усилий развиваемых приводами, $\{Q_G\}$ – вектор обобщённых сил соответствующих силам тяжести, $\{Q_F\}$ – вектор обобщённых сил от действия внешних нагрузок.

При проведении качественного анализа влияния сил инерции на движение манипуляционной системы удобно матричное уравнение (1) с учётом (6) представить однородным векторным уравнением

$$\{Q_D\} + \{Q_G\} + \{Q_F\} - \{Q_M\} - \{Q_S\} - \{Q_K\} = 0, \quad (7)$$

$\{Q_M\} = [M] \{\ddot{q}\} = [Q_{M1}, \dots, Q_{Mn}]^T$ – вектор, определяемый касательными составляющими сил инерции, $\{Q_S\} = [S] \{\dot{q}^2\} = [Q_{S1}, \dots, Q_{Sn}]^T$ – вектор, определяемый центробежными си-

лами, $\{Q_K\} = 2[K]\{\dot{q}_i\dot{q}_j\} = [Q_{K1}, \dots, Q_{Kn}]^T$ – вектор, определяемый кориолисовыми силами.

Уравнение движения манипуляционных систем, записанное в форме (7), реализует известный в механике метод кинетостатики. Данное уравнение может быть сформировано аналитически для манипуляционных систем, звенья которых моделируются телами простой геометрической формы. Для сложных моделей сформировать это уравнение очень затруднительно, однако оно может быть полезно для проведения качественного анализа сил инерции, действующих на упрощённую модель манипуляционной системы.

2. Анализ уравнения движения

Уравнение (1) учитывает все внешние силы и моменты, действующие на звенья манипуляционной системы. Матричные коэффициенты $[M]$, $[S]$ и $[K]$ являются функциями обобщённых координат $q_i = q_i(t)$, $i=(1, \dots, n)$ и зависят от инерционных параметров манипуляционной системы.

При расчёте элементов матричных коэффициентов необходимо учитывать, что некоторые элементы принимают нулевые значения. Элементы матричных коэффициентов принимают нулевые значения в случае конструктивного исключения динамического взаимодействия некоторых звеньев и в отдельные моменты времени при реализации определённых конфигураций манипулятора, кроме того, элементы принимают нулевые значения по техническим причинам, связанным с порядком формирования самих матриц.

Матрица $[M]$ устанавливает связь, действующих на звенья сил и моментов с ускорениями обобщённых координат. $[M]$ – симметрическая матрица размерности $(n \times n)$, элемент матрицы m_{ij} определяет силу инерции, действующую на i -е звено под действием ускорения в j -й кинематической паре.

Если рассматривать матрицу $[M]$ как сумму матриц (2) то при формировании слагаемых матриц $[m_{kij}]$ следует иметь в виду, что элементы этих матриц m_{kij} обращаются в нуль в случаях:

$$\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_j} = 0, \quad (i, j > k).$$

Таким образом, в матрице $[m_{kij}]$ при $k=1$ необходимо вычислять только один элемент m_{111} , остальные элементы этой матрицы заполняются нулями автоматически. При формировании матриц $[m_{kij}]$ для случаев $k=(2, \dots, n)$ дополнительно следует так же учитывать свойство симметричности этих матриц, что почти вдвое снижает объём вычислений.

Используя известные свойства матричных операций $tr(A \cdot B) = tr(B^T \cdot A^T)$, $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ и симметричность матрицы инерции H ($H^T = H$) можно показать, что $[M]$ является симметрической матрицей, действительно $m_{kij} = m_{kji}$ так как

$$tr \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_j} \right) = tr \left(\left(\frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_j} \right)^T \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} H_k \right)^T \right) = tr \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_j} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_i} \right).$$

Матрица $[S]$ определяет связь действующих на звенья сил и моментов с квадратами скоростей обобщённых координат. Элемент матрицы s_{ij} определяет центробежную силу, действующую на i -е звено, порождаемую угловой скоростью в j -й кинематической паре.

Матрица $[S]$ имеет размерность $(n \times n)$ см. (3), элементы матриц s_{ijk} обращаются в нуль в случае:

$$\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} = 0 \left(\frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_j^2} = 0 \right), \text{ при } i > k (j > k).$$

Матрица $[K]$ определяет связь действующих на звенья сил и моментов со скоростями изменения обобщённых координат. Элемент матрицы k_{ih} определяет кориолисову силу, действующую на i -е звено, возникающую в результате сложного относительного (переносного) движения двух звеньев не совпадающих с i -ым. Матрицу $[K]$ так же можно представить суммой матриц (4). При формировании матрицы $[k_{kih}]$ следует иметь в виду, что

$$\frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_i \partial q_h} = 0 \Rightarrow k_{ihk} = 0, \text{ при } i > k \text{ или } h > k.$$

Следовательно, для случая $k=1$ матрицу $[k_{kih}]$ формировать не нужно, так как все элементы этой матрицы равны нулю. Матрицы $[k_{kih}]$ являются прямоугольными матрицами размерности $(n \times C_n^2)$, C_n^2 – число сочетаний из n по 2.

В развёрнутом виде матрицы $[M]$, $[S]$ и $[K]$ имеют вид:

$$[M] = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_1} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_1} \right) & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_1} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_2} \right) & \dots & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_1} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_n} \right) \\ \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_2} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_1} \right) & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_2} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_2} \right) & \dots & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_2} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_n} \right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_n} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_1} \right) & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_n} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_2} \right) & \dots & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_n} H_k \frac{\partial A_{0,k}^T}{\partial q_n} \right) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$[S] = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_1} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_1^2} \right) & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_1} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_2^2} \right) & \dots & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_1} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_n^2} \right) \\ \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_2} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_1^2} \right) & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_2} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_2^2} \right) & \dots & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_2} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_n^2} \right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_n} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_1^2} \right) & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_n} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_2^2} \right) & \dots & \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_n} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_n^2} \right) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$[K] = \sum_{k=2}^n \begin{bmatrix} \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_1} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_1 \partial q_2} \right) \dots \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_1} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_1 \partial q_n} \right) \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_1} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_2 \partial q_3} \right) \dots \\ \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_2} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_1 \partial q_2} \right) \dots \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_2} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_1 \partial q_n} \right) \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_2} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_2 \partial q_3} \right) \dots \\ \dots \dots \dots \\ \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_n} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_1 \partial q_2} \right) \dots \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_n} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_1 \partial q_n} \right) \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_n} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_2 \partial q_3} \right) \dots \end{bmatrix} \cdot \quad (10)$$

При вычислении элементов матриц $[M]$, $[S]$ и $[K]$ следует воспользоваться свойством матриц преобразования однородных координат позволяющим вычисление частных производных от этих матриц представить произведением матриц. Так, с учётом (5) имеют место выражения:

$$\frac{\partial A_{(i-1),i}}{\partial q_i} = A_{(i-1),i} D, \quad \frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} = A_{0,(i-1)} A_{(i-1),i} DA_{i,k}, \quad \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i^2} = A_{0,(i-1)} A_{(i-1),i} DDA_{i,k},$$

$$\frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i \partial q_j} = A_{0,(i-1)} A_{(i-1),i} DA_{i(j-1)} A_{(j-1),j} DA_{j,k},$$

где D – специальная матрица, имеющая размерность (4×4) [1, 4].

Матричное уравнение (1) удобно для компьютерного моделирования динамики манипуляционных систем и проведения комплексного анализа влияния сил инерции, действующих на такие системы. Матричные коэффициенты (8–10) этого уравнения могут быть сформированы автоматически с учётом сложной геометрии звеньев исследуемой манипуляционной системы.

Получить аналитические выражения для ненулевых элементов матричных коэффициентов (8–10) уравнения (1) теоретически возможно используя формулы (2–4), однако задача эта весьма трудоёмкая.

Для проведения анализа влияния сил инерции на динамику манипуляционных систем, звенья которых моделируются телами простой геометрической формы, полезно использовать векторное уравнение (7). Это уравнение даёт возможность не сложными приёмами получить аналитические выражения для сил инерции и всего уравнения движения системы.

Действительно, компонентами уравнения (7) являются векторы, элементы которых отражают влияние сил инерции на соответствующие звенья манипулятора. Рассматривая сложное движение манипуляционной системы как суперпозицию локальных движений, составляющих её звеньев, можно поочерёдно рассматривая эти движения определять возникающие при таких движениях силы инерции. Суммированием найденных составляющих определяются результирующие силы, действующие на каждое звено манипулятора.

3. Анализ влияния сил инерции

Важным этапом исследования движения манипуляционных систем является решение обратной задачи динамики, заключающейся в том, чтобы по известным обобщённым координатам $q_i = q_i(t)$, $i=(1, \dots, n)$ и их производным, на основании уравнения движения, определить действующие на звенья манипулятора силы и моменты. При формировании уравнения

движения в форме (1) необходимо вычислять матричные коэффициенты $[M]$, $[S]$ и $[K]$, определяемые выражениями (8–10).

После определения законов изменения усилий в приводах манипулятора, обеспечивающих движение его рабочего органа по заданной программной траектории с необходимыми скоростями, возникает вопрос оптимизации этих законов. Это связано с тем, что при движении рабочего органа по сложной траектории возникают динамические эффекты, вызываемые силами инерции разной природы. Анализ влияния сил инерции на усилия, развиваемые приводами, через анализ ненулевых элементов матричных коэффициентов уравнения (1), позволяет доработать конструкцию манипулятора при его проектировании, или выполнить допустимую корректировку программной траектории, с учётом оптимизации этого влияния при программировании движения.

Элементы матричных коэффициентов $[M]$, $[S]$ и $[K]$, согласно формулам (2–4), являются функциями обобщённых координат:

$$m_{ij} = m_{ij}(q_1, \dots, q_n), \quad s_{ij} = s_{ij}(q_1, \dots, q_n), \quad k_{ih} = k_{ih}(q_1, \dots, q_n), \quad i, j = (1, \dots, n), \quad h = (1, \dots, C_n^2).$$

По теореме о необходимых условиях экстремума (минимума или максимума) функции многих переменных для матричных коэффициентов m_{ij} , s_{ij} и k_{ih} в точках экстремума $q_i = q_i^*$, $i = (1, \dots, n)$ должны выполняться условия:

$$\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_s}(q_1^*, \dots, q_n^*) = 0, \quad \frac{\partial s_{ij}}{\partial q_s}(q_1^*, \dots, q_n^*) = 0, \quad \frac{\partial k_{ih}}{\partial q_s}(q_1^*, \dots, q_n^*) = 0, \quad s = (1, \dots, n). \quad (11)$$

Аналитические выражения для частных производных матричных коэффициентов составляющих уравнения (11) имеют вид:

$$\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_s} = \sum_{k=1}^n \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_j \partial q_s} + \frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_j} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_i \partial q_s} \right), \quad (12)$$

$$\frac{\partial s_{ij}}{\partial q_s} = \sum_{k=1}^n \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} H_k \frac{\partial^3 A_{0,k}^T}{\partial q_j^2 \partial q_s} + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_j^2} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_i \partial q_s} \right), \quad (13)$$

$$\frac{\partial k_{ij}}{\partial q_s} = \sum_{k=1}^n \text{tr} \left(\frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} H_k \frac{\partial^3 A_{0,k}^T}{\partial q_l \partial q_t \partial q_s} + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_l \partial q_t} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_i \partial q_s} \right). \quad (14)$$

Для поиска экстремумов и решения уравнений (11) могут быть использованы известные численные методы, например метод Ньютона для безусловной минимизации функции многих переменных. Пологая, что исследуемая функция $f(x_1, \dots, x_n)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности своего минимума $f_{min} = f(x_1^*, \dots, x_n^*)$ алгоритм поиска решения на k -м шаге итерации может иметь вид:

$$\frac{\partial^2 f(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial x^2} \{ \Delta x^{(k)} \} = - \frac{\partial f(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{\partial x}, \quad \{ x^{(k+1)} \} = \{ x^{(k)} \} + \{ \Delta x^{(k)} \},$$

где $\{ \Delta x^{(k)} \}$ – вектор $(n \times 1)$ разности промежуточных решений.

Помимо необходимых условий экстремума (11) по теореме о достаточности условия экстремума функции многих переменных требуется, чтобы наименьший не равный нулю дифференциал, начиная со второго, коэффициентов m_{ij} , s_{ij} и k_{ih} в точках экстремума был

знакоопределённой величиной, т.е. положительно определён в точке минимума и отрицательно определён в точке максимума.

Для проверки условия достаточности экстремума в точке (q_1^*, \dots, q_n^*) исследуются квадратичные формы соответствующих функций: m_{ij} , s_{ij} и k_{ih} , $i, j = (1, \dots, n)$, $h=(1, \dots, C_n^2)$. В нашем случае будем иметь:

$$\sum_{p,q=1}^n \frac{\partial^2 m_{ij}(q_1^*, \dots, q_n^*)}{\partial q_p \partial q_q} dq_p dq_q = \sum_{k,p,q=1}^n tr \left(\begin{array}{l} \frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} H_k \frac{\partial^3 A_{0,k}^T}{\partial q_j \partial q_p \partial q_q} + \\ \frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_j} H_k \frac{\partial^3 A_{0,k}^T}{\partial q_i \partial q_p \partial q_q} + \\ \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i \partial q_p} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_j \partial q_q} + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i \partial q_q} H_k \frac{\partial^2 A_{0,k}^T}{\partial q_j \partial q_p} \end{array} \right) dq_p dq_q, \quad (15)$$

$$\sum_{p,q=1}^n \frac{\partial^2 s_{ij}(q_1^*, \dots, q_n^*)}{\partial q_p \partial q_q} dq_p dq_q = \sum_{k,p,q=1}^n tr \left(\begin{array}{l} \frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} H_k \frac{\partial^4 A_{0,k}^T}{\partial q_j^2 \partial q_p \partial q_q} + \\ \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_j^2} H_k \frac{\partial^3 A_{0,k}^T}{\partial q_i \partial q_p \partial q_q} + \\ \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i \partial q_p} H_k \frac{\partial^3 A_{0,k}^T}{\partial q_j^2 \partial q_q} + \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i \partial q_q} H_k \frac{\partial^3 A_{0,k}^T}{\partial q_j^2 \partial q_p} \end{array} \right) dq_p dq_q, \quad (16)$$

$$\sum_{p,q=1}^n \frac{\partial^2 k_{ih}(q_1^*, \dots, q_n^*)}{\partial q_p \partial q_q} dq_p dq_q = \sum_{k,p,q=1}^n tr \left(\begin{array}{l} \frac{\partial A_{0,k}}{\partial q_i} H_k \frac{\partial^4 A_{0,k}^T}{\partial q_l \partial q_l \partial q_p \partial q_q} + \\ \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_l \partial q_l} H_k \frac{\partial^3 A_{0,k}^T}{\partial q_i \partial q_p \partial q_q} + \\ \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i \partial q_p} H_k \frac{\partial^3 A_{0,k}^T}{\partial q_l \partial q_l \partial q_q} + \\ \frac{\partial^2 A_{0,k}}{\partial q_i \partial q_q} H_k \frac{\partial^3 A_{0,k}^T}{\partial q_l \partial q_l \partial q_p} \end{array} \right) dq_p dq_q. \quad (17)$$

Таким образом, для определения экстремумов ненулевых матричных коэффициентов m_{ij} , s_{ij} и k_{ih} следует применять известные теоремы математического анализа и численные методы оптимизации, используемые для функций многих переменных.

4. Методика анализа влияния сил инерции

На основе изложенного подхода анализа динамики манипуляционных систем, основанного на методе Лагранжа-Эйлера и реализованного с использованием аппарата матриц преобразования однородных координат, разработана методика анализа влияния сил инерции на динамику манипуляционных роботов. Рассмотрим применение этой методики на примере манипуляционного робота имеющего трёхзвенную манипуляционную систему, кинематическая схема которой приведена на рис. 1.

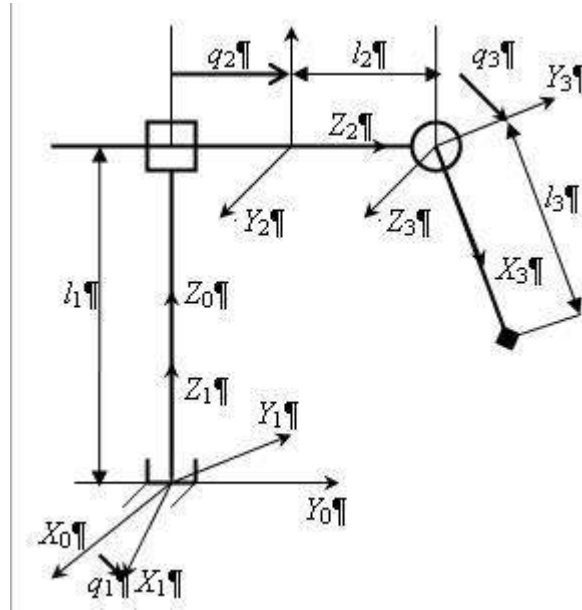


Рис. 1. Кинематическая схема манипуляционной системы

Первое звено исследуемой манипуляционной системы вращается вокруг вертикальной оси, имеет массу m_1 и моделируется тонкостенной трубой длиной l_1 и радиусом R_1 . Второе звено массой m_2 совершает поступательные перемещения вдоль горизонтальной оси и моделируется прямоугольным параллелепипедом со стороной основания a_2 и длиной l_2 . Третье звено представляет собой сосредоточенную массу m_3 и совершает вращательное движение в вертикальной плоскости, совпадающей со вторым звеном.

Основываясь на кинематической схеме манипуляционной системы, сформируем матрицы $A_{0,k}$, описывающие геометрию [6], и матрицы H_k , описывающие распределение масс $k = (1-3)$ [5].

Уравнение движения, определяющее динамическую модель исследуемой манипуляционной системы, записанное на основе уравнения (1) будет иметь вид

$$[M][\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ddot{q}_3]^T + [S][\dot{q}_1^2, \dot{q}_2^2, \dot{q}_3^2]^T + 2[K][\dot{q}_1\dot{q}_2, \dot{q}_1\dot{q}_3, \dot{q}_2\dot{q}_3]^T = \{Q_D\} + \{Q_G\} \quad (18)$$

Матричные коэффициенты $[M]$, $[S]$ и $[K]$, входящие в это уравнение, для выбранной модели можно представить в виде:

$$[M] = \sum_{k=1}^3 [m_{kij}] = \begin{bmatrix} m_{111} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{211} & 0 & 0 \\ 0 & m_{222} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{311} & 0 & 0 \\ 0 & m_{322} & m_{323} \\ 0 & m_{332} & m_{333} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$[S] = \sum_{k=1}^3 [s_{kij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ s_{221} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ s_{321} & 0 & s_{323} \\ s_{331} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$[K] = \sum_{k=2}^3 [k_{kij}] = \begin{bmatrix} k_{211} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{311} & k_{312} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

При проведении качественного анализа влияния сил инерции на движение манипуляционной системы удобно матричное уравнение (18) представить однородным векторным уравнением (7), которое может быть сформировано аналитически для манипуляционных систем, звенья которых моделируются телами простой геометрической формы. Определим компоненты векторов этого уравнения.

Элементы вектора сил инерции $\{Q_M\} = [Q_{M1}, Q_{M2}, Q_{M3}]^T$ можно представить выражениями:

$$Q_{M1} = (m_{111} + m_{211} + m_{311})\ddot{q}_1, \quad Q_{M2} = (m_{222} + m_{322})\ddot{q}_2 + m_{323}\ddot{q}_3, \quad Q_{M3} = m_{332}\ddot{q}_2 + m_{333}\ddot{q}_3.$$

Входящие в эти выражения матричные коэффициенты имеют вид: $m_{111} = m_1 R_1^2$ – момент инерции тонкостенной трубы массы m_1 и радиуса R_1 относительно оси вращения первого звена; $m_{211} = m_2 \left(\frac{1}{3} l_2^2 + \frac{a_2^2}{12} + q_2^2 \right)$ – момент инерции второго звена, моделируемого прямо-

угольным параллелепипедом со стороной основания a_2 , длиной l_2 и массой m_2 , относительно

оси вращения первого звена; $m_{311} = m_3 l_3^2 \left(\left(\frac{l_2 + q_2}{l_3} \right)^2 + 2 \frac{l_2 + q_2}{l_3} \cos q_3 + \cos^2 q_3 \right)$ – момент

инерции третьего звена (сосредоточенная масса m_3) относительно оси вращения первого звена; $m_{222}\ddot{q}_2 = m_2\ddot{q}_2$ – сила инерции, действующая на второе звено, возникающая при по-

ступательном движении самого второго звена; $m_{322}\ddot{q}_2 = m_3\ddot{q}_2$ – сила инерции, действующая на второе звено, возникающая при движении сосредоточенной массы m_3 вместе со вто-

рым звеном; $m_{323}\ddot{q}_3 = -(m_3 l_3 \sin q_3) \ddot{q}_3$ – проекция на ось второго звена силы инерции, возникающей при движении массы m_3 вокруг оси вращения третьего звена;

$m_{332} = m_{323} \Rightarrow m_{332}\ddot{q}_2 = -(m_3 l_3 \sin q_3) \ddot{q}_2$ и $m_{333}\ddot{q}_3 = m_3 l_3^2 \ddot{q}_3$ – моменты сил инерции, действующие на третье звено.

Определим компоненты вектора центробежных сил инерции $\{Q_S\} = [Q_{S1}, Q_{S2}, Q_{S3}]^T$. $Q_{S1} = 0$, так как все центробежные силы, действующие на звенья исследуемого манипулятора, не имеют моментов относительно оси вращения первого звена.

$Q_{S2} = (s_{221} + s_{321})\dot{q}_1^2 + s_{323}\dot{q}_3^2$ – центробежные силы инерции, действующие на второе звено, имеют следующие компоненты:

$$s_{221} = -m_2 q_2, \quad s_{321} = -m_3 (q_2 + l_2 + l_3 \cos q_3), \quad s_{323} = -m_3 l_3 \cos q_3.$$

$Q_{S3} = s_{331}\dot{q}_1^2$ – момент относительно оси вращения третьего звена центробежной силы, действующей на массу m_3 , при её вращении вместе с первым звеном, где

$$s_{331} = m_3 l_3 (q_2 + l_2 + l_3 \cos q_3) \sin q_3.$$

Определим компоненты вектора кориолисовых сил инерции $\{Q_K\}=[Q_{K1}, Q_{K2}, Q_{K3}]^T$. На второе и третье звенья исследуемой манипуляционной системы кориолисовы силы не действуют, следовательно, $Q_{K2} = Q_{K3} = 0$. $Q_{K1} = 2((k_{211} + k_{311})\dot{q}_1\dot{q}_2 + k_{312}\dot{q}_1\dot{q}_3)$ – момент кориолисовых сил инерции, действующих на первое звено, раскладывается на компоненты: $2k_{211}\dot{q}_1\dot{q}_2$ – момент относительно оси вращения первого звена создаваемый кориолисовой силой действующей на второе звено, где $k_{211} = m_2q_2$; $2k_{311}\dot{q}_1\dot{q}_2$ – момент кориолисовой силы действующей на третье звено, в его относительном движении вместе со вторым звеном, где $k_{311} = m_3(l_2 + q_2 + l_3 \cos q_3)$; $2k_{312}\dot{q}_1\dot{q}_3$ – момент кориолисовой силы, возникающей при рассмотрении вращения третьего звена вокруг собственной оси как относительного движения, а вращения первого звена вокруг своей оси как переносного, где $k_{312} = -m_3l_3(l_2 + q_2 + l_3 \cos q_3) \sin q_3$.

Итак, методом кинестатики, получены аналитические выражения для ненулевых элементов матричных коэффициентов уравнения движения (18), иллюстрирующие механический смысл этих величин.

Сформируем вектор обобщённых сил соответствующих силам тяжести, действующим на звенья манипуляционной системы. Для исследуемой модели манипуляционной системы будем иметь $\{Q_G\} = [0, 0, -m_3gl_3 \cos q_3]^T$.

Таким образом, полностью составлено уравнение движения исследуемой манипуляционной системы, получены аналитические выражения для всех силовых факторов, влияющих на движение этой системы.

Для проведения дальнейших исследований матричное уравнение (18) с учётом (19–21) приведём к алгебраическому виду, которому соответствует система уравнений

$$\begin{cases} (m_{111} + m_{211} + m_{311})\ddot{q}_1 + 2(k_{211} + k_{311})\dot{q}_1\dot{q}_2 + 2k_{312}\dot{q}_1\dot{q}_3 = Q_{D1}, \\ (m_{222} + m_{322})\ddot{q}_2 + m_{323}\ddot{q}_3 + (s_{221} + s_{321})\dot{q}_1^2 + s_{323}\dot{q}_3^2 = Q_{D2}, \\ m_{332}\ddot{q}_2 + m_{333}\ddot{q}_3 + s_{331}\dot{q}_1^2 = Q_{D3} + Q_{G3}. \end{cases} \quad (23)$$

Зададим траекторию движения характерной точки манипулятора, совпадающей с сосредоточенной массой третьего звена, в виде прямой линии как показано на рис. 2. Предположим, что характерная точка начинает двигаться равноускоренно и затем также замедляется до полной остановки. Заданный таким образом закон движения $q_i(t)$, $i=(1-3)$ будет иметь вид, показанный на рис. 3.

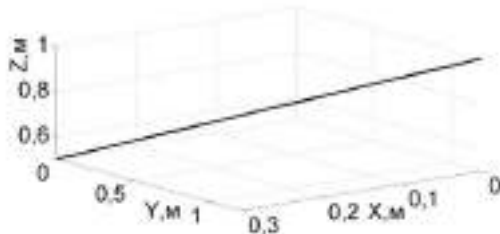


Рис. 2. Траектория движения

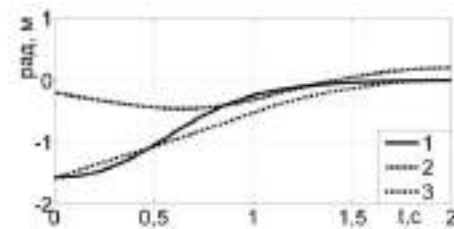


Рис. 3. Закон движения $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$

Используя, полученные выше выражения для ненулевых элементов матричных коэффициентов $[M]$, $[S]$ и $[K]$, и функции $q_i(t)$, $i=(1-3)$, построим временные зависимости для некоторых из этих элементов.

На рис. 4 представлены графики зависимостей $m_{11}(t) = m_{111} + m_{211} + m_{311}$, $m_{211}(t)$ и $m_{311}(t)$.

Влияние центробежных сил инерции определяется коэффициентами $s_{21}(t) = s_{221} + s_{321}$, $s_{23}(t) = s_{323}$, и $s_{31}(t) = s_{331}$, временные зависимости этих коэффициентов представлены графиками на рис. 5, 6.

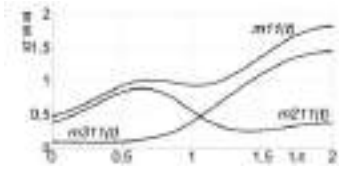


Рис. 4.

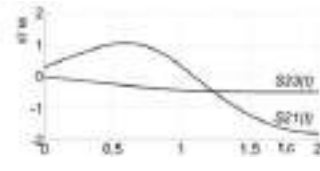


Рис. 5.

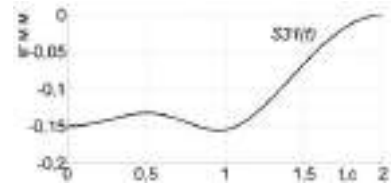


Рис. 6.

Кориолисовы силы инерции определяются коэффициентами $k_{11}(t) = k_{211} + k_{311}$ и $k_{12}(t) = k_{312}$, графики этих коэффициентов представлены на рис. 7, 8.

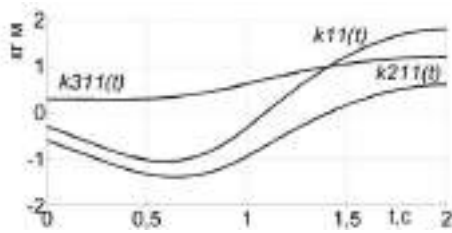


Рис. 7.

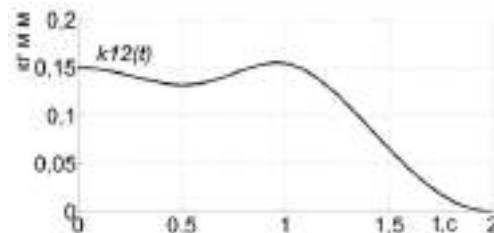


Рис. 8.

Выполним расчёт усилий Q_{Di} , $i=(1-3)$, развиваемых приводами на участке разгона, для этого используем соответствующие уравнения системы (23). Графики зависимостей рассчитанных усилий от времени представлены на рис. 9–11 сплошными линиями D_i , $i=(1-3)$. Дополнительно на этих рисунках представлены графики, изображённые пунктирными линиями, иллюстрирующие влияние сил инерции на усилия, развиваемые приводами исследуемой манипуляционной системы.

На рис. 9 график $D_1^*(k=0)$, изображённый пунктирной линией, соответствует решению первого уравнения системы (23) при условии $k_{11} = k_{211} + k_{311} = 0$ и $k_{12} = k_{312} = 0$. Решение при этих условиях показывает степень влияния кориолисовых сил на усилие, развиваемое приводом первого звена на участке разгона. Кривая $D_1^{**}(m=0)$ соответствует решению этого же уравнения при условии $m_{11} = m_{111} + m_{211} + m_{311} = 0$.

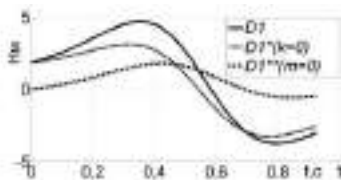


Рис. 9.

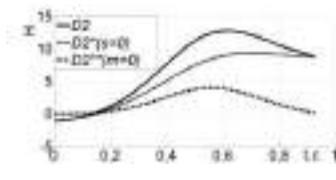


Рис. 10.

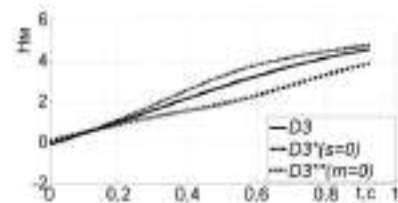


Рис. 11.

На рис. 10 пунктирная линия $D_2^*(s=0)$ соответствует решению второго уравнения системы (23) при условии $s_{21} = s_{221} + s_{321} = 0$ и $s_{23} = s_{323} = 0$ и показывает степень влияния центробежных сил на усилие, развиваемое приводом второго звена. Кривая $D_2^{**}(m=0)$ соответствует случаю решения этого же уравнения при условии $m_{22} = m_{222} + m_{322} = 0$ и $m_{23} = m_{323} = 0$.

Пунктирная кривая $D_3^*(s=0)$ на рис. 11 соответствует решению третьего уравнения системы (23) при условии $s_{31} = s_{331} = 0$ и показывает степень влияния центробежных сил на усилие, развиваемое приводом третьего звена. Кривая $D_3^{**}(m=0)$ соответствует условию $m_{32} = m_{332} = 0$ и $m_{33} = m_{333} = 0$.

Анализ временных зависимостей для ненулевых элементов матричных коэффициентов $[M]$, $[S]$ и $[K]$ (19–21), представленных на рис. 9–11, позволяет определить влияние соответствующих этим элементам сил инерции на движение исследуемой манипуляционной системы по заданной траектории. Однако для выбора альтернативной траектории или возможного изменения конструкции манипулятора необходимо рассматривать зависимости этих элементов от обобщённых координат. В этом случае необходимо привлекать методы математического анализа функций многих переменных, например, использовать уравнения (11–17) для поиска и анализа экстремумов таких функций. На рис. 12–15 приведены трёхмерные представления зависимостей: $m_{311}(q_2, q_3)$, $m_{11}(q_2, q_3)$, $s_{31}(q_2, q_3)$ и $k_{12}(q_2, q_3)$.

Таким образом, на примере модели манипуляционной системы с тремя степенями свободы выполнен анализ коэффициентов уравнения движения (18), отражающих влияние сил инерции на исследуемую манипуляционную систему.

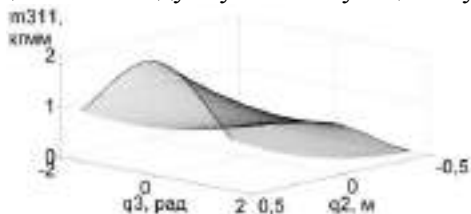


Рис. 12

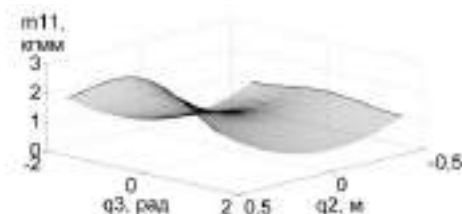


Рис. 13

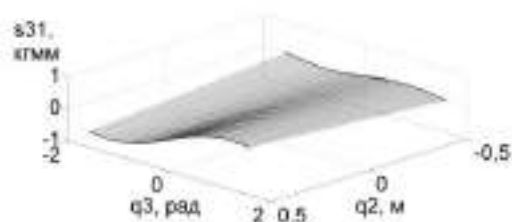


Рис. 14

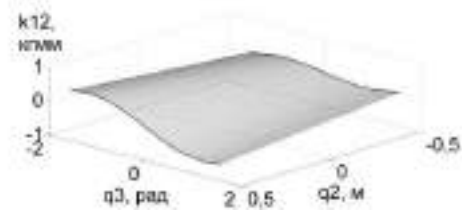


Рис. 15

Заключение

Проведено исследование уравнения движения манипуляционной системы (1), полученного на основе уравнения Лагранжа 2-го рода с применением аппарата матриц преобразования однородных координат. Выполнен анализ матричных коэффициентов этого уравнения, отражающих влияние сил инерции на движение манипуляционной системы.

Получены уравнения (12–17) позволяющие проводить исследование влияния сил инерции, путём анализа соответствующих элементов матричных коэффициентов уравнения движения (1), методами математического анализа.

Практическим результатом исследования рассмотренного подхода для анализа динамики манипуляционных систем является разработанная на его основе методика анализа влияния сил инерции на динамику манипуляционных роботов. Методика может быть использована при проектировании манипуляционных роботов, а также при планировании траекторий движения таких роботов при их программировании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Козлов, В.В.** Динамика управления роботами / В.В. Козлов, В.П. Макарычев, А.В. Тимофеев, Е.И. Юревич – М.: Наука, 1984.
2. **Коловский, М.З.** Основы динамики промышленных роботов / М.З. Коловский, А.В. Слоущ. –М.: Наука, 1988.
3. **Черноустько, Ф.Л.** Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация / Ф.Л. Черноустько, Н.Н. Болотник, В.Г. Градецкий. – М.: Наука. 1989.
4. **Зенкевич, С.Л.** Основы управления манипуляционными роботами: учебник для вузов / С.Л. Зенкевич, А.С. Ющенко –М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
5. **Блейшмидт, Л.И.** Построение инерционной модели манипуляционной системы промышленного робота / Л.И. Блейшмидт, О.Н. Крахмалев – Брянск: БИТМ, 1990. – Деп. ВИНТИ №1616–В91.
6. **Блейшмидт, Л.И.** Геометрия манипуляционных систем промышленных роботов / Л.И. Блейшмидт, О.Н. Крахмалев – Брянск: БИТМ, 1990. – Деп. ВИНТИ №1618–В91.
7. **Крахмалев, О.Н.** Моделирование обобщенных сил, действующих на звенья манипуляционных систем / О.Н. Крахмалев, А.П. Болдырев // Брянск: Вестн. БГТУ. – 2011. – №1. – С.115–121.

Поступила в редакцию 14.06.2012

После доработки 26.10.2012