

Математические модели сигналов систем БШД, использующих технологию MIMO

Технология MIMO (Multiple Input Multiple Output - так называемая технология множественного входа и множественного выхода) нашла широкое практическое применение в сетях беспроводного широкополосного доступа стандарта IEEE 802.11n (Wi-Fi), IEEE 802.16 (WiMAX), LTE и недавно вышедшего стандарта 802.22 (White Space). Главное достоинство технологии - возможность увеличения пропускной способности, ёмкости и надёжности сети пропорционально увеличению количества передающих и приёмных антенн. При этом технология позволяет отчасти, либо полностью решить такие проблемы, присущие всем беспроводным сетям, как интерференция, потери при распространении радиоволн, быстрые и медленные замирания сигнала, затенение, экранирование. Технология благодаря своим достоинствам имеет большое будущее, но должна постоянно совершенствоваться, поэтому вопросам её изучения, в том числе моделирования передаваемых и принимаемых сигналов, необходимо уделять должное внимание. В вышеназванных современных беспроводных системах технология MIMO используется вместе с технологией ортогонального кодирования OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing), которая предполагает как можно более эффективное использование спектра за счёт параллельной передачи данных по множеству близко расположенных друг к другу узкополосных частотных подканалов.

Ключевые слова: математическая модель, беспроводной широкополосный доступ, Wi-Fi, WiMAX, LTE, MIMO, OFDM

Бухарев И.А.,
ведущий инженер ФГУП ЦНИИС,
bukharev@zniis.ru

Математические модели принимаемых сигналов и помех систем БШД, использующих технологию MIMO

Разработка математических моделей (ММ) принимаемого полезного сигнала и помех – это первый этап решения задачи синтеза алгоритмов приёма и обработки OFDM-сигналов в абонентском терминале (АТ), работающем с использованием технологии MIMO, методами марковской теории оптимального оценивания случайных процессов [1]. Разрабатываемые математические модели должны в полной мере соответствовать параметрам реальных сигналов и помех, наблюдаемых на входе абонентского терминала, работающего в сетях Wi-Fi/WiMAX/LTE/White Space с использованием технологий MIMO и OFDM.

Согласно рисунку 1, MIMO-сигнал на приёмной стороне в общем виде записывается следующим образом:

$$X(t) = H S(t) + Z(t) \quad (1),$$

где $X(t)$ – матрица принятого сообщения; H – канальная матрица размера $M \times N$ (M – число приёмных антенн, N – число передающих антенн); $S(t)$ – матрица передаваемых OFDM-сигналов; $Z(t)$ – матрица собственных шумов приёмных элементов антенны.

В формуле (1) матрица передаваемых OFDM-сигналов $S(t)$ имеет размер $N \times 1$, зависящий только от числа передающих антенн:

$$S(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \dots \\ s_N(t) \end{bmatrix}.$$

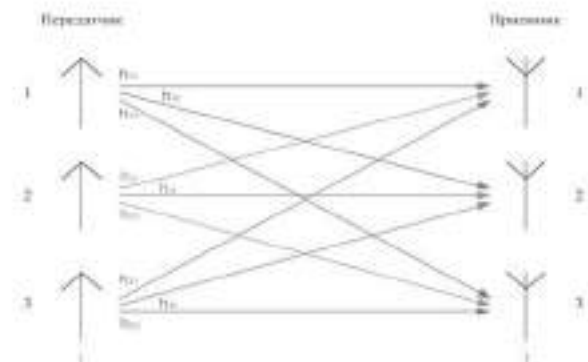


Рис. 1. Модель MIMO-канала

Через каждую антенну передаётся свой модулированный OFDM-сигнал. OFDM-сигнал формируется путём преобразования последовательного потока бинарных символов $S[p]$ в P параллельных потоков, каждый из которых согласуется (в том числе, и комплексно) с исходным потоком $S[p]$, используя различные виды модуляции, с помощью инверсного мультиплексирования (демультимплексирования) [2].

Независимо от способа модуляции (QPSK, QAM или OQAM) модулированное колебание представляет собой сумму синфазной компоненты (косинусоиды) и квадратурной компоненты (синусоиды) [2]. Амплитуда синфазной компоненты равна вещественной части $Re\{X'\} - X^*$ нормированного комплексного модуляционного символа X' . Амплитуда квадратурной компоненты равна мнимой части $Im\{X'\} - X^{**}$ этого символа [2]. В общем случае модуляция разных потоков может быть различной, поэтому некоторые потоки могут нести битовую скорость больше, чем у других. Модуляционный символ X' представляет собой совокупность модулированных ортогональных несущих частот. Его нормировка как раз и вводится для того, чтобы средние мощности колебаний с разными способами модуляции были одинаковыми. Так, для модуляции QPSK нормированный комплексный модуляционный символ $X' = X/(2)^{1/2}$, а для модуляции 16QAM – $X' = X/(10)^{1/2}$ [3].

Сигнал несущей с номером k и частотой f_k , модулированной символом X_k , может быть представлен в виде вещественной части произведения X_k и комплексного колебания (комплексной экспоненты) с частотой f_k [2]:

$$X_k(t) = \text{Re}\{X_k \cdot e^{j2\pi f_k t}\} = \text{Re}\{X_k \cdot e^{j2\pi \frac{t}{T_0} k}\}, \quad (2)$$

где $j = \sqrt{-1}$, $f_k = 1/T_0 - k$ – k -я гармоника основной частоты (величины, обратной длительности полезной части символа и равной расстоянию между частотами соседних несущих).

Сигнал OFDM, записанный на интервале одного символа, представляет собой сумму всех несущих колебаний, модулированных своими нормированными модуляционными символами [2]:

$$X(t) = \sum_{k=0}^{K-1} X_k(t) = \sum_{k=0}^{K-1} \text{Re}\{X_k \cdot e^{j2\pi \frac{t}{T_0} k}\}, \quad (3)$$

где K – общее количество поднесущих.

Учитывая, что цифровая система передачи данных является системой с дискретным временем $t = nT$ (T – интервал дискретизации; n – номер отсчёта) [4], получаем из выражения (3) формулу:

$$X(nT) = X_s = \text{Re} \sum_{k=0}^{K-1} \{X_k \cdot e^{j2\pi n \frac{k}{N}}\}. \quad (4)$$

Полагая, что $T_0 T = N$, получаем обратное дискретное преобразование Фурье для вычисления модулированных сигналов и переводом их цифровых отсчётов во временную область:

$$X_s = \text{Re} \sum_{k=0}^{K-1} \{X_k \cdot e^{j2\pi n \frac{k}{N}}\}. \quad (5)$$

Вычисление мнимой части выражения $\sum_{k=0}^{K-1} \{X_k \cdot e^{j2\pi n \frac{k}{N}}\}$

наряду с вычислением его вещественной части по формуле (5) используется для переноса спектра сигнала OFDM в заданный диапазон частот и в общем виде даёт следующий общий результат:

$$X(t) = \sum_{k=0}^{K-1} \{X_k \cdot e^{j2\pi f_k t}\} = a + jb$$

Данные составляющие подвергаются цифро-аналоговому преобразованию (ЦАП). Полученные аналоговые сигналы используются для модуляции соответственно синусоиды и косинусоиды (получаемой сдвигом синусоиды на 90°) несущей частоты f_c [2].

Умножим вещественную часть a на синфазное колебание $\cos(2\pi f_c t)$ с частотой f_c , а мнимую часть b – на квадратурное колебание $\sin(2\pi f_c t)$ (сдвинутое по фазе на 90° по отношению к синфазному). Тогда суммирование полученных произведений даёт сигнал OFDM $S(t)$, спектр которого смещён на частоту f_c по отношению к спектру сигнала $X(t)$. Данный сигнал после суммирования передаётся в линию связи [3]:

$$S(t) = a \cos(2\pi f_c t + \varphi_0) + b \sin(2\pi f_c t + \varphi_0) = \sum_{k=0}^{K-1} \{S_k(t - t_g - \tau) (\cos[2\pi(f_k + f_c)t + \varphi_k] + j \sin[2\pi(f_k + f_c)t + \varphi_k])\} \quad (6)$$

где $S_k(t - t_g - \tau)$ – номинальная амплитуда принимаемого полезного сигнала, определяемая закономерностью распространения радиоволн в свободном пространстве; t_g – защитный интервал, добавляемый в начало каждого передаваемого символа, T – время задержки передаваемого сигнала, φ_0 – случайная начальная фаза сигнала.

Используя формулу Эйлера [4], а также с учётом того, что частота дискретизации $\omega_k = 2\pi(f_k + f_c)$, выражение (6) можно привести к следующему виду:

$$S(t) = \sum_{k=0}^{K-1} S_k(t - t_g - \tau) \cdot e^{j(\omega_k t + \varphi_k)}. \quad (7)$$

Передача OFDM-символа начинается не в момент времени $t=0$, а в момент t_g . До этого, в интервале $[0..t_g]$, передаётся периодическое повторение символа. Для упрощения представления сигнала $S(t)$ значение защитного интервала t_g можно не учитывать. Тогда выражение (1.7) принимает следующий вид:

$$S(t) = \sum_{k=0}^{K-1} S_k(t - \tau) \cdot e^{j(\omega_k t + \varphi_k)}. \quad (8)$$

Вследствие разности промежуточных частот приёмника и передатчика возникает случайный сдвиг сигнала по частоте:

$$\Delta\omega_k = \omega_k - \omega'_k = k\omega'_k + d\omega, \quad (9)$$

где $k\omega'_k$ – сдвиг частоты на целое количество гармоник (ω'_k – расстояние между поднесущими в спектре сигнала), $d\omega$ – сдвиг сигнала по частоте на значение, которое не превосходит ω_k . В этом случае выражение (8) записывается следующим образом:

$$S(t) = \sum_{k=0}^{K-1} S_k(t - \tau) \cdot e^{j(\Delta\omega_k t + \varphi_k)}. \quad (10)$$

Время задержки радиосигнала на трассе от передатчика до абонентского терминала может быть представлено в виде:

$$\tau = \tau_d + \Delta t_{\text{атм}} + \Delta t_{\text{г}}, \quad (11)$$

где $\tau_d = \frac{d}{c}$ – задержка сигнала, обусловленная длиной трассы d (c – скорость распространения радиоволн); $t_{\text{атм}}$ – тропосферная задержка сигнала; $\Delta t_{\text{г}}$ – случайная задержка сигнала, вызванная, например, осцилляциями и уходом опорной частоты передатчика от расчётного значения.

Канальная матрица H сигнала из выражения (1) состоит из комплексных коэффициентов $h_{k\ell}$, которые не являются постоянными, и записывается в следующем виде:

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1N} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{M1} & h_{M2} & \dots & h_{MN} \end{bmatrix}$$

Для беспроводных систем характерны амплитудные и фазовые искажения, обусловленные большим количеством факторов, в том числе эффектом Доплера и уходом частоты опорного генератора [5]. Такие искажения приводят к возникновению явления «замирания» сигнала. Значения коэффициентов $h_{k\ell}$ случайно изменяются во времени именно вследствие их зависимости от случайных амплитуды и фазы, доплеровский сдвиг которых обусловлен параметрами передающего устройства, многолучевым распространением сигнала, расположением и перемещением абонентского терминала, характером рельефа местности, плотностью застройки, наличием атмосферных осадков, листвы на деревьях, затуханием

сигнала в туннелях и другими помехами искусственного и естественного происхождения [1].

При перемножении в выражении (1) матрицы H и матрицы $S(t)$ [4] получим сигнал в общем виде, наблюдаемый на входе приёмного устройства без учёта шумовой составляющей:

$$X_{\text{наблюдаемый}}(t) = H \cdot S(t) = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1N} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{M1} & h_{M2} & \dots & h_{MN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \dots \\ s_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}s_1(t) + h_{12}s_2(t) + \dots + h_{1N}s_N(t) \\ h_{21}s_1(t) + h_{22}s_2(t) + \dots + h_{2N}s_N(t) \\ \dots \\ h_{M1}s_1(t) + h_{M2}s_2(t) + \dots + h_{MN}s_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N h_{1i}s_i(t) \\ \sum_{i=1}^N h_{2i}s_i(t) \\ \dots \\ \sum_{i=1}^N h_{Mi}s_i(t) \end{bmatrix} \quad (12)$$

где N – число передающих антенн, M – число приёмных антенн.

По сути, значения коэффициентов $h_{M\alpha}$ представляют собой импульсную характеристику каждого передаваемого сигнала. Общее выражение для суммарной импульсной характеристики канала одной антенны записывается следующим образом [3]:

$$h(\tau, t) = \sum_{k=0}^{K-1} \beta_k(t) e^{-j\theta_k(t)} \delta(\tau - \tau_k(t)), \quad (13)$$

где β_k , θ_k – случайные амплитуда и фаза импульса, τ_k – момент появления на приёмном конце импульса при распространении по одному из лучей, t – текущее время (так как параметры канала могут меняться со временем).

Для упрощения рассуждений импульсную характеристику канала, которая создаётся при распространении сигнала, можно обозначить $h(t)$. Тогда принятый сигнал одной антенны с учётом выражения (10) и без учёта шума имеет вид:

$$S(t) = \sum_{k=0}^{K-1} \beta_k(t) e^{-j\theta_k(t)} \delta(\tau - \tau_k(t)) S_k(t - \tau) e^{j(\Delta\omega_k t + \phi_k)} = \sum_{k=0}^{K-1} \beta_k(t) S_k(t - \tau) \delta(\tau - \tau_k(t)) e^{j(\Delta\omega_k t + \phi_k - \theta_k(t))} \quad (14)$$

Формула справедлива в том случае, если импульсная характеристика короче защитного интервала, то есть $\tau_k < t_c$, тогда символы не перекрываются, а также при стационарности импульсной характеристики в течение символа, то есть $t = const$ [6].

Амплитуда принимаемых OFDM-сигналов подчиняется закону распределения Релея, при этом одномерная плотность вероятности амплитуды $S_k(t)$ имеет вид [4]:

$$p(t, S_k) = \frac{S_k}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{S_k^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad \Lambda \geq 0, \quad (15)$$

где σ^2 – параметр релейской плотности вероятности.

Применительно к плотности вероятности математическое ожидание m_A для огибающей $S_k(t)$ равно [4]:

$$m_A = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Дисперсия σ_A^2 для огибающей $S_k(t)$ равна [4]:

$$\sigma_A^2 = (2 - \frac{\pi}{2})\sigma^2$$

Амплитуда импульса β_k принимаемого сигнала представляет собой дискретный случайный процесс, области значений и определения которого представляют собой дискретные множества [5]. В процессе синтеза алгоритма приёма и обработки сигнала такой процесс аппроксимируется простой цепью Маркова на несколько положений [1].

Матрица собственных шумов приёмных элементов антенны $Z(t)$ имеет размер $M \times 1$, зависящий только от числа приёмных антенн:

$$Z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \dots \\ z_M(t) \end{bmatrix}, \quad (16)$$

Такие шумы возникают из-за случайного движения электронов вследствие тепловой активности в приёмнике и называются тепловыми [7]. Эти помехи имеют Гауссовское распределение и равную мощность для всех частотных компонент, то есть спектральная плотность мощности шума постоянна для всех частот и равна $\frac{N_0}{2}$

(где N_0 – интенсивность шума), при этом $\frac{N_0}{2}$ называют

двухсторонней шумовой спектральной плотностью [7]. Таким образом, в общем случае можно считать, что на вход приёмника воздействует стационарный аддитивный белый гауссовский шум (АБГШ) с нулевым средним значением. Статистические характеристики такого шума считаются известными [4]. Математическое ожидание (МО):

$$M\{Z(t)\} = 0$$

Автокорреляционная функция (АКФ):

$$M\{Z(t_1)Z(t_2)\} = \sigma^2 \delta(t_1 - t_2) = \frac{N_0}{2} \delta(t_1 - t_2),$$

где N_0 – интенсивность АБГШ, δ – символ дельта-функции.

Наблюдаемый на входе приёмного устройства сигнал в общем виде с учётом (1), (12) и (16) представляется следующим образом:

$$X(t) = H \cdot S(t) + Z(t) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N h_{1i}s_i(t) \\ \sum_{i=1}^N h_{2i}s_i(t) \\ \dots \\ \sum_{i=1}^N h_{Mi}s_i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \dots \\ z_M(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N h_{1i}s_i(t) + z_1(t) \\ \sum_{i=1}^N h_{2i}s_i(t) + z_2(t) \\ \dots \\ \sum_{i=1}^N h_{Mi}s_i(t) + z_M(t) \end{bmatrix} \quad (17)$$

С учётом (14) выражение (17) переписывается следующим образом:

$$X(t) = H \cdot S(t) + Z(t) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^{K-1} \beta_{ki}(t) S_{ki}(t - \tau) \delta(\tau - \tau_{ki}(t)) e^{j(\Delta\omega_{ki} t + \phi_{ki} - \theta_{ki}(t))} + z_1(t) \\ \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^{K-1} \beta_{ki}(t) S_{ki}(t - \tau) \delta(\tau - \tau_{ki}(t)) e^{j(\Delta\omega_{ki} t + \phi_{ki} - \theta_{ki}(t))} + z_2(t) \\ \dots \\ \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^{K-1} \beta_{ki}(t) S_{ki}(t - \tau) \delta(\tau - \tau_{ki}(t)) e^{j(\Delta\omega_{ki} t + \phi_{ki} - \theta_{ki}(t))} + z_M(t) \end{bmatrix} \quad (18)$$

Вектор наблюдения $\Xi(t)$ для абонентского терминала MIMO-системы имеет вид:

$$\Xi(t) = [\xi_{M1}(t), \dots, \xi_{Mi}(t), \dots, \xi_{MM}(t)]^T, \quad i = \overline{1, M}, \quad (19)$$

где $\xi_{Mi}(t)$ – наблюдение от i -го антенного элемента;

M – общее число антенн.

Математическая модель информационных и сопутствующих процессов непрерывного вектора состояния

Из рассмотрения математической модели полезных OFDM-сигналов, наблюдаемых на входе многоантенного приёмника (18), следует, что, наряду с дискретными параметрами $\theta_{ki}(t)$ и $\beta_{ki}(t)$, они зависят от непрерывных случайных параметров: случайного запаздывания сигнала $\tau(t)$ и случайной фазы сигнала $\varphi(t)$. Непрерывные параметры содержат информацию об условиях распространения радиоволн и стабильности опорной частоты передатчика и используются для обеспечения синхронизации устройства приёма и обработки сигналов.

Случайная фаза сигнала обуславливается естественной нестабильностью опорной частоты передатчика, фазовыми флуктуациями, вносимыми средой распространения радиоволн, и флуктуациями движения абонентского терминала [1]. Эти же факторы могут влиять и на амплитуду принимаемого сигнала. При этом, как правило, мгновенные значения амплитуды сигнала, вследствие быстрых замираний, распределены по закону Релея (частота замираний 0.3...0.5 Гц) с параметром C_A , а начальная фаза имеет равномерное распределение на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Случайные процессы $\varphi(t)$ и $\Delta\omega_{ki}$ могут быть описаны системой стохастических дифференциальных уравнений [5]:

$$\dot{\varphi}(t) = \Delta\alpha(t) - \frac{\omega}{c} \dot{d}(t) + \sqrt{1/2\sigma^2} n_\varphi(t), \quad \varphi(t_0) = \varphi \quad (20)$$

$$\Delta\dot{\alpha}(t) = -\gamma_\omega \Delta\alpha(t) + \sqrt{2\gamma_\omega \sigma} n_{\Delta\omega}(t), \quad \Delta\alpha(t_0) = \Delta\alpha$$

где $n_\varphi(t)$ и $n_{\Delta\omega}(t)$ – АБГШ с нулевым математическим ожиданием и единичной интенсивностью; $\Delta\alpha(t)$ – уход частоты сигнала за счёт нестабильности опорной частоты передатчика и приёмника; γ_ω – коэффициент, характеризующий ширину спектра шума опорного генератора; $\frac{\omega}{c} \dot{d}(t)$ – доплеровское приращение частоты.

Типовые значения параметров составляют [8]:

$$\sigma_{\Delta\omega}^2 = (5 \dots 125) \text{ Гц}; \quad \gamma_{\Delta\omega} = (10^{-4} \dots 10^{-2}) \text{ Гц};$$

$$N_{\varphi_i} = (2 \cdot 10^{-6} \dots 2 \cdot 10^{-4}).$$

Применительно к решаемой задаче синтеза алгоритма приёма и обработки сигналов OFDM-MIMO непрерывный вектор состояния может быть представлен в виде:

$$X^T(t) = [\Phi^T(t), \Delta\Omega^T(t)], \quad (21)$$

где $\Phi(t) = [\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_g(t)]^T$ – вектор случайных фаз принимаемых OFDM-сигналов; $\Delta\Omega(t) = [\Delta\omega_1(t), \Delta\omega_2(t), \dots, \Delta\omega_g(t)]^T$ – вектор уходов частоты принимаемых OFDM-сигналов.

Динамика компонент непрерывного вектора состояния $X(t)$ описывается системой дифференциальных уравнений [5]:

$$\dot{\phi}_g(t) = \Delta\omega_g(t) - \frac{\omega_g}{c} \dot{d}_g(t) + \sqrt{1/2\sigma_{\phi_g}^2} n_{\phi_g}(t), \quad \phi_g(t_0) = \phi_{g,0}$$

$$\Delta\dot{\omega}_g(t) = -\gamma_{\omega_g} \Delta\omega_g(t) + \sqrt{2\gamma_{\omega_g} \sigma_{\omega_g}} n_{\omega_g}(t), \quad \Delta\omega_g(t_0) = \Delta\omega_{g,0}$$

$$X(t_0) = X_0,$$

где $n_{\phi_g}(t)$ и $n_{\omega_g}(t)$ – независимые формирующие белого гауссовского шума с нулевым математическим ожиданием и известными интенсивностями; $\Delta\alpha_g(t)$ – уход частоты сигнала за счёт нестабильности частоты опорного генератора передатчика; γ_{ω_g} – коэффициент, характеризующий ширину спектра шума опорного генератора; $\frac{\omega_g}{c} \dot{d}_g(t)$ – доплеровское приращение частоты;

X_0 – начальные значения компонент вектора состояния $X(t)$.

Для оценки вектора состояния динамической системы целесообразно использовать рекурсивный фильтр Калмана, имеющий способ гарантированно достигать результат за конечное число действий, используя ряд неполных и зашумлённых измерений [9]. Фильтр Калмана предназначен для рекурсивного дооценивания вектора состояния априорно известной динамической системы, то есть для расчёта текущего состояния системы необходимо знать текущее измерение, а также предыдущее состояние самого фильтра. Таким образом, фильтр Калмана, как и множество других рекурсивных фильтров, реализован во временном представлении, а не в частотном.

При использовании фильтра Калмана для получения оценок вектора состояния процесса по серии зашумлённых измерений необходимо представить модель данного процесса в соответствии со структурой фильтра, то есть непрерывный вектор состояния $X(t)$ в общем виде может быть описан векторно-матричным стохастическим дифференциальным уравнением [10]:

$$\dot{X}(t) = F(t)X(t) + C(t)U(t) + G(t)N(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (22)$$

где $N(t)$ – вектор формирующих белого гауссовского шума с известными статистическими характеристиками; $F(t)$ – матрица состояния системы; $C(t)$ – матрица управления, которая прикладывается к вектору управляющих воздействий $U(t)$; $G(t)$ – матрица возмущения; $U(t) = [W_{x1}, W_{y1}, W_{z1}, \dots, W_{xi}, W_{yi}, W_{zi}]^T$ – вектор управляющих воздействий (вектор управления).

Применительно к решаемой задаче синтеза полный вектор состояния является дискретно-непрерывным и в общем случае имеет вид [11][12]:

$$[\beta_{ki}^T(t), \theta_{ki}^T(t), X^T(t)], \quad (23)$$

где $\theta(t) = [\theta_1(t), \dots, \theta_{k,i}(t)]^T$ – вектор дискретных информационных параметров; $\beta(t) = [\beta_1(t), \dots, \beta_{k,i}(t)]^T$ – вектор дискретных энергетических параметров.

Рассмотренные математические модели принимаемых OFDM-сигналов хорошо отражают реальные условия функционирования систем БШД, использующих технологию MIMO. Они являются в требуемой степени обобщенными и достаточно детально учитывают различные факторы, влияющие на работу системы: фазовую манипуляцию несущих колебаний; фазовые флуктуации OFDM-сигналов; наличие дискретных информационных параметров; наличие внутрисистемных и широкополосных помех.

Параметрическая математическая модель информационных и сопутствующих процессов

Реализация оптимальных алгоритмов приёма и обработки OFDM-сигналов MIMO-систем связана с решением стохастического дифференциального уравнения Стратоновича, что сопровождается значительными трудностями. Поэтому при синтезе оптимальных алгоритмов стремятся упростить математическую модель вектора состояния. Для малых отрезков времени это удаётся сделать путём замены вектора состояния (21) и (22) на его параметрическую модель [11].

Непрерывный вектор состояния $X(t)$ (21) является многокомпонентным марковским диффузионным процессом. При переходе к параметрической модели действительную кривую, определяемую уравнением (22), заменяют ломаной (в простейшем случае ступенчатой) линией с шагом, равным сравнительно малому отрезку времени $T = t_{k+1} - t_k$ [13]. Для этого на каждом полуинтервале времени $[t_k, t_{k+1})$, где $k = 0, 1, 2, \dots$, в уравнении (22) пренебрегают вектором формирующих белого гауссовского шума $N(t)$ как малым (что соответствует равенству нулю коэффициента диффузии процесса $X(t)$ на малых отрезках времени длительностью T).

Отсюда следует, что процесс $X(t)$ становится марковским квазислучайным и на полуинтервалах времени $[t_k, t_{k+1})$, где $k = 0, 1, 2, \dots$, может быть описан следующим выражением [13]:

$$\dot{X}(t) = FX(t) + GU(t), \quad X(t_k) = X_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (24)$$

Для параметрической модели вектора состояния $X(t)$ решение уравнения (24) имеет вид [13][14]:

$$X(t) = \Phi(t - t_k)X_k + \int_{t_k}^t \Phi(t - \tau)CU(\tau)d\tau, \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (25)$$

где $\Phi(t - t_k)$ – фундаментальная матрица, которая в стационарном случае является решением дифференциального уравнения вида [14]:

$$\frac{d\Phi(t - t_k)}{dt} = F\Phi(t - t_k), \quad \Phi(0) = I, \quad (26)$$

где I – единичная матрица.

При дальнейшей аппроксимации математической модели вектора состояния $X(t)$ за счёт упрощения коэффициента сноса $FX(t)$ фундаментальная матрица $\Phi(t, t_k)$ на сравнительно малых отрезках времени мо-

жет быть заменена матрицей $A(t, t_k)$, которая может быть получена путём поэлементного разложения матрицы $\Phi(t, t_k)$ в ряды Тейлора и удерживания только линейных членов [15]. При этом в виде неступенчатых квазислучайных процессов сохраняются лишь те компоненты, для которых недопустимо с требуемой точностью пренебречь детерминированным изменением (сносом) на полуинтервалах $[t_k, t_{k+1})$. Остальные компоненты $X(t)$ могут быть аппроксимированы ступенчатыми квазислучайными процессами. Таким образом, параметрическая модель вектора состояния $X(t)$ в конечном итоге имеет вид [13][14][15]:

$$\dot{X}(t) = A(t, t_k)X_k + \int_{t_k}^t A(t, \tau)C(\tau)U(\tau)d\tau, \quad (27)$$

$$t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad X(t_0) = X_0,$$

$$A(t_k, t_k) = I, \quad X_k = X(t_k).$$

Сформировав параметрическую модель вектора состояния $X(t)$, необходимо проверить обоснованность таких допущений для MIMO-OFDM систем, т.е. оценить, насколько повлияет пренебрежение вышеуказанными параметрами на точность оценивания синтезируемых компонент вектора состояния $X(t)$.

Определённую оценку можно получить, рассчитав приращения компонент вектора математического ожидания и элементов матрицы вторых центральных моментов исходного процесса $X(t)$ (21) на характерных отрезках времени $T = t_{k+1} - t_k$ на основе следующих соотношений [13][14][15]:

$$M_x(k+1) = \Phi(T)M_x(k), \quad M_x(0) = M_{x_0}; \quad (28)$$

$$D(k+1) = \Phi(T)D(k)\Phi^T(T) + \Gamma(T)\Gamma^T(T), \quad D(0) = 0, \quad (29)$$

где $M_x(k) = M\{X_k\}$, $D(k) = M\{(X_k - M_x(k))(X_k - M_x(k))^T\}$;

$M_x(0)$ и $D(0)$ – вектор математического ожидания и матрица вторых центральных моментов вектора состояния в начальный момент времени; $\Phi(T)$ – фундаментальная матрица, $\Gamma(T)$ – переходная матрица возмущений; $\Gamma(T)\Gamma^T(T) = D_1(T)$ – матрица приращений вторых центральных моментов, которую можно определить следующим образом:

$$\frac{dD_1(t)}{dt} = FD_1(t) + D_1(t)F^T + B, \quad D_1(0) = 0, \quad t \in [0, T), \quad (30)$$

где $B = GQG^T$, G – матрица возмущений, Q – матрица интенсивностей $N(t)$.

Полученные значения приращений компонент вектора математического ожидания $M_x(k+1)$ и элементов матрицы дисперсий $D(k+1)$ необходимо сравнить с типовыми значениями соответствующих погрешностей оценивания компонент вектора состояния $X(t)$.

Расчёт приращений математического ожидания и дисперсий для компонент вектора состояния $X(t)$ производился при следующих значениях параметров [16]: $T = 20$ мс, $f_{\text{нес}} = 2,4$ ГГц (на данной частоте функционируют системы Wi-Fi, WiMAX и LTE); $\Delta\theta = 1,8 \cdot 10^{-3}$.

На рисунке 2 показано приращение математического ожидания по фазе $\Delta M[\varphi]$ радиосигнала. Приращение

математического ожидания этой компоненты достаточно велико, поэтому пренебречь детерминированным изменением компоненты φ нельзя, и, следовательно, соответствующие элементы матрицы $A(T)$ должны быть сохранены.

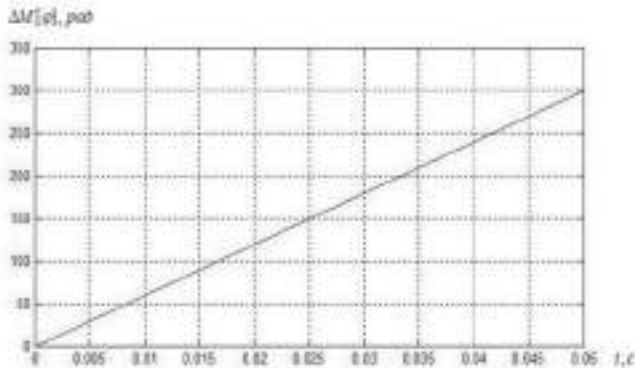


Рис. 2. Приращение математического ожидания по фазе

Расчет приращения априорной дисперсии по фазе вектора состояний $X(t)$ производился на ПЭВМ в программном пакете MATLAB при помощи численного решения дифференциального уравнения (29) с использованием метода Рунге-Кутты четвертого порядка [10]. График, представленный на рисунке 3, отражает характер изменений априорной дисперсии по фазе. Анализируя рисунок 3, можно увидеть, что приращение дисперсии на отрезке T достаточно мало (по сравнению с погрешностями оценивания) и поэтому использование параметрической модели вида (24) и (27) вполне допустимо для решения задачи синтеза применительно к OFDM-MIMO системам.

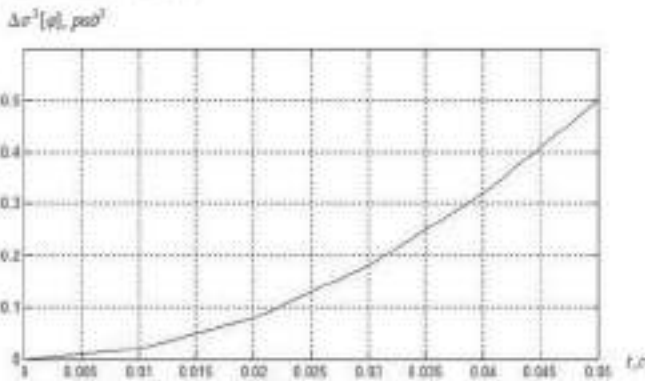


Рис. 3. Приращение априорной дисперсии по фазе

Замена модели вектора состояния в виде диффузионного марковского процесса на параметрическую модель в виде квазислучайного процесса позволяет аналитически решить уравнение Стратоновича, тем самым повысить конструктивность, и, как следствие, точность алгоритмов приема и обработки сигналов.

Сформулированные модели наблюдений совместно с предложенными моделями информационных и сопутствующих процессов позволяют корректно осуществить постановку задачи синтеза алгоритмов комплексной первичной обработки информации в абонентском терминале систем БШД с использованием технологии MIMO.

Математические модели информационных и сопутствующих процессов дискретной компоненты вектора состояния

Математические модели полезных сигналов зависят не только от непрерывных случайных параметров, но и содержат в себе дискретную часть, которая представляет собой вектор $[\beta_v^T(t), \theta_v^T(t)]$. Одна компонента $\theta(t)$ такого вектора дискретных параметров является информационным параметром, предназначенным для передачи речи, служебной информации и т.п., а другая $\beta(t)$ – энергетическим, характеризующим, например, амплитуду принимаемого радиосигнала на входе абонентского терминала [17].

Основным информационным параметром, предназначенным для передачи речевых сообщений, данных, служебной информации и т.п. в системах OFDM-MIMO и содержащимся в полезных сигналах, является дискретный параметр $\theta(t)$.

Обычно изменения $\theta(t)$ во времени удаётся описать однородной цепью Маркова на два (в более общем случае на R) положения с известными статистическими характеристиками [17]:

$P(t_k) = [P_{\mu\nu}(t_k)]$, $\mu, \nu = \overline{1, M}$, – матрица вероятностей перехода $\theta(t)$,

где $P_{\mu\nu}(t_k) = P\{\theta(t_k) = \theta_\nu / \theta(t_{k-1}) = \theta_\mu\}$ – вероятность перехода информационного параметра на k -ом шаге;

$P_\theta = [P_1(t_0), P_2(t_0), \dots, P_M(t_0)]^T$ – вектор вероятностей начального состояния $\theta(t)$.

Дискретный случайный процесс $\beta(t)$, характеризующий амплитуду принимаемого полезного сигнала, описывается простой цепью Маркова на L положений и может принимать одно из значений λ_j , $j = \overline{1, L}$. Возможные моменты перехода параметра $\beta(t)$ из одного состояния в другое являются дискретными, хотя в общем случае случайными, так как зависят от случайного запаздывания принимаемого сигнала [11][15]:

$$t_{k+1} = t_k - T_c - \tau_s(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.31)$$

где $\tau_s(t) = \tau_s(t, X(t))$ – случайное запаздывание сигнала; $T_c = \text{const}$ – длительность тактового интервала.

Значения дискретного случайного процесса $\beta(t)$ на соседних тактовых интервалах образуют простую цепь Маркова с матрицами одношаговых вероятностей перехода [15][18]:

$$P_\beta(t_k) = [P_{ij}(t_k)], \quad i, j = \overline{1, L};$$

и вектором вероятностей начального состояния:

$$P_{\beta j} = [P_{\beta 1}(t_0), P_{\beta 2}(t_0), \dots, P_{\beta L}(t_0)]^T; \quad j = \overline{1, L}.$$

На всех полуинтервалах времени $[t_k, t_{k+1})$, где $k = 0, 1, 2, \dots$, дискретные параметры $\beta(t)$ и $\theta(t)$ остаются постоянными и описываются априорными уравнениями вида [13][15]:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = 0; \quad \frac{d\beta(t)}{dt} = 0, \quad (32)$$

где $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Применение представленных математических моделей полезных сигналов, помех, информационных и сопутствующих параметров OFDM-MIMO систем позволяет достаточно корректно сформулировать постановку задачи синтеза оптимальных алгоритмов оценивания. Располагая априорными сведениями о дискретных параметрах $\beta(t)$ и $\theta(t)$, сведениями о непрерывном векторе состояния $X(t)$ и наблюдениями $\Xi(t)$, требуется определить оценку непрерывного вектора состояния $X^*(t)$, оптимальную по критерию минимума апостериорных дисперсий, и оценки информационных и энергетических параметров $\theta^*(t)$ и $\beta^*(t)$, оптимальные по критерию максимума апостериорной вероятности.

Литература

1. Лепин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1989. – 656 с.
2. Лебедев В. Модуляция OFDM в радиосвязи. Радиолюбитель. Август, 2008. С.51-55; Сентябрь, 2008. С.36-39)
3. Гарагин М.В., Журавлев В.И., Кумегин С.В. Системы и сети передачи информации. Учебное пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 2001. – 336 с.
4. Кори Г. и Кори Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М., 1973. – 832 с.)
5. Вараксин Л.Е. Теория систем сигналов. – М.: Советское радио, 1978. – 304 с.
6. Иванов А. Алгоритмы синхронизации в OFDM-системах. – б с.
7. Сетевые проекты "Применение современных методов модуляции, кодирования и разделения в WiMAX" – http://www.networkspro.ru/pages_64/index.html.
8. Зверев В.А., Стрёмков А.А. Выделение сигналов из помех численными методами. – Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2001. – 188 с.
9. Kalman R. E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. – 1960. – 12 с.
10. Фильтр Калмана для "чайников": матрица наблюдаемости и фундаментальная матрица. – 4 с.
11. Тихов А.И. Оптимизация цифровых детекторов в приёмниках по минимуму вычислительных затрат. – Самара, 1994. – 256 с.
12. Некшелов Н. Калмановская фильтрация. – <http://www.basegroup.ru/library/clearing/kalmanfilter>.
13. Павлов Б.А. Синхронный приём. – М.: Энергия, 1977. – 80 с.
14. Тихонов В.И., Харисов В.И. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. – М.: Радио и связь, 2004. – 608 с.
15. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. – М.: Радио и связь, 1986. – 264 с.
16. Волков Л.Н., Немировский М.С., Шинаков Ю.С. Системы цифровой радиосвязи: базовые методы и характеристики. – М.: Эко-Трендз, 2005. – 392 с.
17. Френкс Л. Теория сигналов. Перевод с английского под редакцией Д.Е. Вакмана. – М.: Советское радио, 1974. – 344 с.
18. Липкин И.А. Статистическая радиотехника. Теория информации и кодирования. – М.: Вузовская книга, 2002. – 216 с.

MATHEMATICAL MODELS OF SIGNAL OF BWA SYSTEMS BASED ON MIMO

Bukharev I.A., FSUE ZNIIS, lead engineer, bukharev@zniis.ru

Annotation: MIMO technology (Multiple Input Multiple Output) has found wide practical applications in wireless broadband network of standard IEEE 802.11n (Wi-Fi), IEEE 802.16 (WiMAX), LTE and the recently released standard 802.22 (White Space). The main advantage of technology - increasing throughput, capacity and reliability of the network in proportion to the number of transmitting and receiving antennas. The technology allows you to partially or completely solve problems inherent in all wireless networks, such as interference with propagation loss, slow and fast fading, shadowing, shielding. The technology has a great future, but should be constantly improved, so the question of its study, including modeling of transmitted and received signals, must be given due attention. In modern wireless systems MIMO technology is used in conjunction with the technology of orthogonal coding OFDM.

Keywords: mathematical model, broadband wireless access, Wi-Fi, WiMAX, LTE, MIMO, OFDM.