

k_1 – коэффициент, равный количеству невыполненных неравенств при подстановке в качестве аргументов функций системы вектора x ;

* – сложение либо умножение в R .

Определение 6

Невязкой с повторением назовем следующую функцию

$$z_1(x) = z(x) + (\max(\rho_i(x) / m), \quad (5)$$

где $\max(\rho_i(x))$ – максимальное значение невязки неравенств для вектора x , $i \in \overline{1, m}$;

m – количество неравенств системы (1).

Возможно последовательное применение в ходе работы ГА нескольких вариантов невязки, например, в качестве базовой ЦФ используется функция вида (2), а если на i -ой итерации ГА популяция X_i локализовалась в некотором булевом гипершаре радиуса $\rho \ll n$, то для ускорения процесса вывода популяции из этой зоны локализации в роли ЦФ выступает невязка вида (5).

Автор не ставил целью акцентировать внимание читателя на результатах экспериментальных исследований в силу громоздкости последних, необходимо лишь отметить, что проведенные эксперименты показывают пригодность предлагаемых в статье вариантов невязки для практического применения.

Предложенные статистики могут быть полезными для специалистов. Выбор одного из вариантов невязки должен осуществляться

на основе определенных характеристик для каждой конкретной задачи.

Библиографический список

1. Анашкина, Н.В. Использование алгоритма Балаша для нахождения решения системы линейных ограничений специального вида / Н.В. Анашкина // Вестник Моск. гос. ун-та леса – Лесной вестник. – 2005. № 4(35). – С. 176–180.
2. Батищев, Д.И. Генетические алгоритмы решения экстремальных задач / Д.И. Батищев. – Воронеж, 1995.
3. Кисляков, А.В. Генетические алгоритмы: операторы скрещивания и мутации / А.В. Кисляков // Информационные технологии. – 2001. – № 1. – С. 29–34.
4. Кисляков, А.В. Самообучающийся генетический алгоритм решения систем булевых уравнений / А.В. Кисляков, В.Г. Никонов // Научный вестник МГТУ ГА. Серия «информатика». – 2001. – № 38. – С. 28–33.
5. Курейчик, В.М. Методы генетического поиска: учеб. пособие, Ч. 1. / В.М. Курейчик. – Таганрог, ТРТУ, 1998. – 118 с.
6. Кисляков, А.В. О применении генетических алгоритмов для решения систем линейных неравенств / А.В. Кисляков, В.Г. Никонов // Труды школы-семинара «Новые информационные технологии в науке, образовании, телекоммуникации и бизнесе» по материалам докладов XXVII международной конференции IT+SE'2000 «New Information technology in Science, Education, Telecommunications and Business». – Запорожье, 2000. – С. 40.
7. Никонов, В.Г. Пороговые представления булевых функций / В.Г. Никонов // Обзорение прикладной и промышленной математики. – 1994. – Т. 1. – Вып. 3. – С. 402–457.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И КОМПЬЮТЕРНЫЕ МОДЕЛИ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ НА КОНКУРЕНТНОМ РЫНКЕ

И.В. ТРЕГУБ, доц. Финансовой академии при Правительстве РФ, канд. техн. наук,
А.В. ТРЕГУБ, доц. каф. высшей математики МГУЛ, канд. ф.-м. наук

Известно, что цена в рыночной экономике устанавливается при взаимодействии спроса и предложения. Пересечение графиков спроса и предложения происходит в точке равновесия, а соответствующая этой точке цена называется равновесной.

Анализ факторов, влияющих на спрос и предложение, дает возможность выявить детерминанты, оценить их влияние на спрос и предложение, определить тенденции, характерные для спроса и предложения на кон-

курентном рынке, и построить математические модели, позволяющие прогнозировать развитие экономических систем. Вместе с тем, математические модели спроса и предложения позволяют рассчитать равновесную рыночную цену, знание которой позволяет компаниям, работающим на рынке, оптимизировать свою деятельность.

Данная статья посвящена разработке математических и компьютерных моделей ценообразования на конкурентном рынке на

примере самого динамично развивающегося в последнее время рынка дополнительных услуг сотовой связи.

На сегодняшний день рынок дополнительных услуг сформировался во вполне самостоятельную и мощную индустрию. Он является приоритетным направлением формирования в России информационного общества. Вместе с тем, такая проблема, как отсутствие механизма ценообразования, определяемого специализацией видов услуг в сегментах рынка, ведет к торможению развития рынка.

Комплексное обследование рынка позволяет выявить совокупность наиболее значимых факторов, влияющих на спрос и на предложение, построить математические модели спроса и предложения и разработать модель равновесного ценообразования в рыночной экономике.

Спрос на услуги рассматривается как платежеспособная потребность, т.е. как тот объем услуг, который потребитель готов оплатить при данных ценах.

На предприятиях связи исследование спроса следует проводить по видам предоставляемых услуг: в форме обмена, когда потребление услуг неотделимо от их производства, и в форме предоставления технических средств.

При предоставлении услуг в форме обмена требуется большая квалификация и профессионализм, так как это не только работа с техническими средствами, но и контакт с клиентом. Спрос на эти услуги изобретателен и более требователен с точки зрения качества и доступности.

Такие особенности услуг, как их нематериальность, несохраняемость, оказывают существенное влияние на нестабильность спроса (неравномерность в течение года, месяца, недели, суток). В момент наибольшей нагрузки велика вероятность появления неудовлетворенного спроса, или наоборот, излишних производственных мощностей, рассчитанных на чрезвычайную нагрузку и порождающих непроизводительное использование ресурсов в периоды спада.

На спрос оказывают воздействие *потребительские вкусы*, на которые влия-

ют рекламные и маркетинговые кампании по продвижению услуг, мода и технологические изменения, происходящие на рынке. Расширение функциональных возможностей мобильного аппарата, ведущие к появлению новых моделей со встроенными клавишами вызова дополнительных услуг, облегчает доступ потребителя к услуге, что ведет к увеличению спроса.

Доход потребителей также является важным фактором, влияющим на спрос. Увеличение дохода способствует тому, что для индивида цена услуги начинает играть второстепенную роль по сравнению с удобством ее получения. Например, абонент сотовой сети для получения необходимой ему информации о курсе валют будет пользоваться своим мобильным телефоном, подключенным к соответствующей услуге, вместо того, чтобы получить информацию, покупая газеты или подключаясь к сети Интернет. Если потребитель имеет высокий доход, то удобство и быстрота получения информации будет для него важнее стоимости услуги. С увеличением дохода количество пользователей дополнительными услугами должно возрасти.

Число потребителей, готовых покупать дополнительные услуги сотовой связи, также относится к детерминантам спроса. Это число зависит от количества абонентов операторов сотовой связи. Чем большее количество людей имеют мобильный телефон, тем большее число абонентов смогут воспользоваться дополнительными услугами.

Цены на сопряженные товары или услуги также являются немаловажным фактором, обуславливающим спрос на определенный вид дополнительной услуги сотовой связи. Так, в рассматриваемом выше примере при неизменном уровне дохода потребителя снижение цены газеты или тарифа на Интернет-трафик может снизить количество абонентов, получающих информацию при помощи мобильного телефона.

Ожидания событий, которые могут произойти, также могут повлиять на уровень спроса на дополнительные услуги сотовой связи.

Спрос на дополнительные услуги сотовой связи может быть *потенциальным* и дейс-

твительным. Потенциальный спрос равен числу услуг в денежном или количественном выражении, которое индивид хотел потребить и имел возможность их оплатить, но в силу ряда причин не смог этого сделать. В качестве причин могут выступать технические сбои в работе оборудования оператора или провайдера (например поломка сервера), различные условия, влияющие на качество связи (внешние электромагнитные возмущения среды), а также другие факторы (например отсутствие мобильного телефона в момент потребности в услуге). Величину потенциального спроса можно определить, проводя социологические опросы среди различных групп потребителей. *Действительный спрос* определяется фактическим объемом оказанных услуг.

Предложение показывает объем услуг, т.е. количество информации, которое производитель может передать потребителю по некоторой из возможных в течение определенного периода цене. При этом весь объем передаваемой информации делится на голосовой трафик и дополнительные услуги.

Факторы, влияющие на предложение (*детерминанты предложения*), можно разделить на две основные группы: *внешние* – общеэкономические и социально-политические факторы – и *внутренние*, обусловленные особенностями функционирования конкретного оператора/провайдера услуг.

К *внешним факторам* можно отнести финансовую политику государства (размер налогов на добавленную стоимость и на доход с продаж услуг), цены на ресурсы (тариф на электроэнергию, средний уровень заработной платы в отрасли, цена нового оборудования и программного обеспечения) и на сопряженные товары, устойчивость и совершенство банковской системы (риск возможного банкротства обслуживающего банка), наличие государственных гарантий от возможных потерь, инвестиционную привлекательность отрасли, конкуренцию со стороны других участников рынка, предоставляющих дополнительные услуги сотовой связи.

Внутренние факторы, влияющие на величину предложения – это используемые *технологии* передачи информации и особенности технологии предоставления услуг, за-

висящие от внедрения новейшего оборудования с большой пропускной способностью каналов передачи данных и *структура услуг*, на которую влияет наличие квалифицированных работников и современного программного обеспечения. Кроме того, к внутренним факторам можно отнести *ожидания* производителей дополнительных услуг.

Так, например, построение сетей 3G на основе новой технологии, лицензию на которую уже приобрели ведущие операторы сотовой связи, может затормозить развитие новых сервисов услуг в существующих сетях, т.к. средства компаний-провайдеров услуг могут быть направлены на создание сервисов в пока еще не введенных в эксплуатацию сетях.

Предложение услуги, так же как и спрос на услуги, можно разделить на потенциальное и реализованное.

Потенциальное предложение – это максимальное количество неголосовой информации в единицу времени, которое может передать оператор абоненту. Это количество обуславливается техническими характеристиками оборудования как оператора, так и провайдера сервисов услуг. На потенциальное предложение влияет пропускная способность канала связи, характеристики транспортной сети, мощность и быстродействие процессора, надежность систем контроля, обработки и тарификации запросов.

Реализованное предложение определяется фактическим объемом оказанных услуг. Это количество запросов абонентов, поступивших в систему и обработанных оператором и провайдером. В условиях бесперебойно функционирующих систем величина реализованного предложения в точности совпадает с величиной действительного спроса на услугу. Если запрос на получение услуги, отправленный абонентом оператору, не был обслужен провайдером, то действительный спрос будет выше реализованного предложения.

Выявление и количественное измерение (прямое или опосредованное) влияния факторов на уровень спроса и предложения открывают возможность построения экономико-математических моделей спроса и предложения дополнительных услуг сотовой связи, что, в свою очередь, дает возможность

прогнозирования данных величин. Кроме того, модели спроса и предложения важны для построения модели равновесного рыночного ценообразования.

Очевидно, что не все из представленных факторов равнозначны, различны и способы учета их влияния на объемы спроса и предложения дополнительных услуг сотовой связи. Для включения того или иного фактора в математическую модель в качестве объясняющей переменной необходимо определить, является ли включенная в модель переменная значащей. Процедуру проверки значимости переменной можно осуществить при помощи t -статистики Стьюдента. Для этого осуществляют оценку параметров и их погрешностей начальной модели по имеющим статистическим данным об объекте-оригинале. После этого находят отношение значения коэффициента при переменной к значению погрешности и сравнивают полученное число с $t_{\text{крит}}$ – двухсторонней квантилью распределения Стьюдента для выбранного заранее уровня значимости. Если рассчитанное число оказывается меньше $t_{\text{крит}}$, то переменную исключают из модели.

В данной статье представлены математические модели реализованного предложения и действительного спроса на рынке дополнительных услуг сотовой связи, а также модель ценообразования на конкурентном рынке. Для построения моделей были собраны статистические данные об объеме рынка дополнительных услуг сотовой связи с момента его формирования по настоящее время. Для построения моделей были применены вероятностный подход, методика прогнозирования с применением теории временных рядов, эконометрическое и компьютерное моделирование.

Анализ квартальных данных о количестве дополнительных услуг, оказанных операторами сотовой связи (S_t), показал, что наряду с плавно возрастающей с течением времени составляющей присутствует периодическая компонента с практически не изменяющейся во времени амплитудой колебаний. Это свидетельствует о наличии тренда T_t и сезонной составляющей s_t , причем исходный временной ряд может быть представлен аддитивной моделью.

$$S_t = T_t + s_t.$$

Коэффициенты тренда можно оценить методом наименьших квадратов. Стандартная форма оцененной модели тренда имеет вид

$$T_t = 0,8953 \cdot t^2 + 2,0372 \cdot t - 3,8041 + \hat{\varepsilon}_t,$$

Коэффициент детерминации модели близок к единице $R^2 = 0,99$, что свидетельствует о высокой объясняющей способности переменных модели. Об этом же можно сказать, проведя исследование модели с помощью F -теста. $F = 1605 > F_{\text{крит}} = 4,2$. Сезонные компоненты имеют следующие значения $s_{1\text{кв.}} = 9,13$, $s_{2\text{кв.}} = -19,87$, $s_{3\text{кв.}} = -9,25$, $s_{4\text{кв.}} = 20,02$.

Значения сезонных компонент в первом и четвертом кварталах свидетельствуют о положительном отклонении реализованного предложения от трендового значения, в то время как во втором и третьем кварталах наблюдается отрицательное отклонение. Это связано в первую очередь с изменением спроса на дополнительные услуги, который зависит от различных факторов. Так, например, наличие праздников в декабре – марте повышает количество абонентов, пользующихся дополнительными услугами для поздравлений друзей, коллег по работе и т.п. И наоборот, пользователи, находящиеся в летних отпусках, меньше обращаются за услугами посредством мобильного телефона.

Для прогнозирования действительного спроса была построена эконометрическая модель, отражающая зависимость действительного спроса от количества абонентов в сетях сотовых операторов. Стандартная форма оцененной модели имеет вид

$$D = 2,44 \cdot n - 514,09 + \hat{\varepsilon}_t,$$

Коэффициент детерминации

$$R^2 = 0,87, F\text{-тест } F = 48,64 > F_{\text{крит}} = 5,59.$$

При помощи рассмотренных выше моделей можно построить прогноз значений реализованного предложения и действительного спроса на будущие периоды. Так, для первого квартала 2008 г. результаты прогноза представлены в таблице

Сравнивая прогнозные значения с эмпирическими данными, можно рассчитать ошибки моделей. Для модели предложения ошибка прогноза равна 0,32 %, для модели спроса – 15,83 %.

Квартал	Прогноз D	Прогноз S	Эмпирическое значение $D = S$	Ошибка прогноза D	Ошибка прогноза S
1 кв.	840,11	817,36	820,02	15,83 %	0,32 %

Для того чтобы модели спроса и предложения можно было применять для анализа ценообразования на конкурентном рынке, необходимо в модели в качестве объясняющей переменной включить цену услуги. Таким образом, требуется составить спецификацию модели, которая позволяет объяснять величину спроса и предложения товара, а также его рыночную цену величиной дохода на душу населения, количеством фирм, оказывающих услуги на рынке, числом потребителей, их ожиданиями. При составлении спецификации следует учесть известные экономические законы, касающиеся спроса, предложения и равновесной цены.

Уровень спроса в текущий период объясняется текущими ценой товара или услуги и располагаемым доходом на душу населения, причем уровень спроса падает с ростом цены на услугу и возрастает с увеличением дохода на душу населения. Большое количество потребителей на рынке обуславливает большой спрос на услугу, ожидания потребителей относительно возможных изменений в будущем могут привести как к увеличению, так и к уменьшению величины спроса.

Текущее предложение объясняется ценой услуги в предшествующем периоде и возрастает с ростом цены. На величину предложения влияют количество поставщиков услуг на рынке и их ожидания относительно будущей конъюнктуры рынка. Увеличение фирм, оказывающих дополнительные услуги на рынке, ведет к увеличению величины предложения. Изменение ожиданий может привести как к росту предложения в случае, если эти ожидания благоприятные, так и к уменьшению предложения, когда руководство предприятия считает, что дальнейшее оказание услуг станет нерентабельным.

В итоге трансляции данных утверждений на математический язык можно составить спецификацию модели, которая выглядит следующим образом

$$\begin{cases} D_t = f(P_t, x_t, n_t, \xi), \\ S_t = f(P_{t-1}, N_t, \zeta), \\ D_t = S_t. \end{cases} \quad (1)$$

В этой модели три эндогенные переменные спрос (D), предложение (S), цена услуги (P), четыре экзогенные переменные доход на душу населения (x), количество потребителей (n), количество фирм, оказывающих дополнительные услуги сотовой связи (N) и две фиктивные переменные, отражающие качественные характеристики потребителей (ξ) и производителей (ζ) – их ожидания будущих событий. Определение вида функции можно осуществить, используя эмпирические данные указанных выше переменных.

В простейшем случае в качестве функциональной зависимости можно выбрать полином первой степени. При этом нужно учесть, что при оценивании коэффициентов модели из одновременных уравнений можно столкнуться с *проблемой идентификации*. Она заключается в выявлении условий, при которых существует возможность для определения параметров модели. Оказывается, что далеко не всякая модель из одновременных уравнений допускает оценивание коэффициентов структурной формы. Например, для простейшей модели спроса-предложения товара или услуги на конкурентном рынке

$$\begin{cases} D_t = a_0 + a_1 \cdot p_t + a_2 \cdot x_t, \\ S_t = b_0 + b_1 \cdot p_t, \\ D_t = S_t, \\ a_1 < 0, a_2 > 0, b_1 > 0. \end{cases}$$

нет даже принципиальной возможности однозначно определить коэффициенты ее первого уравнения (функции спроса). Другими словами, в выборке наблюдаемых значений эндогенных и экзогенных переменных этой модели не хватает информации о коэффициентах первого уравнения, сколь бы обширной эта выборка ни была. В подобной ситуации говорят, что модель (или какое-то ее уравнение) *неидентифицируема*. Следует подчеркнуть, что не существует статистической процедуры, позволяющей вычислять состоятельные оценки коэффициентов такой модели, помочь может лишь изменение ее спецификации. Таким образом, на этапе спецификации модели необ-

ходимо выявить неидентифицируемые уравнения и так изменить спецификацию, чтобы модель стала идентифицируемой.

Методика устранения неидентифицируемых уравнений модели из одновременных уравнений заключается в целенаправленном включении в модель predetermined переменных, при этом если в модели имеется неидентифицируемое уравнение, то predetermined переменные следует включать не в это, а в смежные уравнения. Анализ зависимости спроса и предложения от внешних переменных и определение равновесной цены в модели (1) удобнее выполнять при помощи компьютерного моделирования.

Компьютерное моделирование экономических систем позволяет исследователю изучать структуру и рассчитывать параметры сложных систем, рассматривать процессы, происходящие в них, анализировать эффективность функционирования и строить прогнозы на будущее. Пакет Matlab/Simulink является удобной визуальной средой для создания имитационных моделей динамики сложных экономических систем, среди которых можно выделить рынок товаров и услуг.

Для анализа изменения переменных цена, спрос, предложение во времени используются динамические неравновесные модели рынка. Изучение зависимости спроса и предложения от цены осуществляется для каждого зафиксированного значения всех экзогенных переменных модели.

В начальный момент цена отличается от равновесной. Процесс установления равновесной цены может быть описан дискретной моделью, когда переменные на промежутке времени $t \in [t, t + 1)$ считаются неизменными. Последовательным интервалам времени $t \in [t, t + 1)$ соответствуют значения цены P_t , спроса $D(P_t)$ и предложения $S(P_t)$. Если в дискретной модели динамики цен происходит запаздывание предложения, то равновесная цена определяется из соотношения

$$S(P_t) = D(P_t).$$

В линейном приближении зависимости спроса и предложения от цены могут быть заданы функционально

$$D(P_t) = D_0 - D_1 \cdot P_t, \quad S(P_t) = S_0 + S_1 \cdot P_t,$$

где коэффициенты модели D_0, D_1, S_0, S_1 могут быть оценены, например, двухшаговым методом наименьших квадратов с использованием данных об объекте-оригинале, полученных на основании исследований.

Общий вид блок-схемы компьютерной модели динамики рыночных цен, соответствующий линейному приближению функций спроса и предложения, представлен на рис. 1.

При помощи блоков *Constant*, *Generator*, *Gain* задаются значения цены для построения графиков зависимости функций спроса и предложения от цены. Для этого ключи *Switch* и *Switch1* в модели устанавливаются в верхнее положение. При переводе ключей в нижнее положение начинается процесс имитационного моделирования.

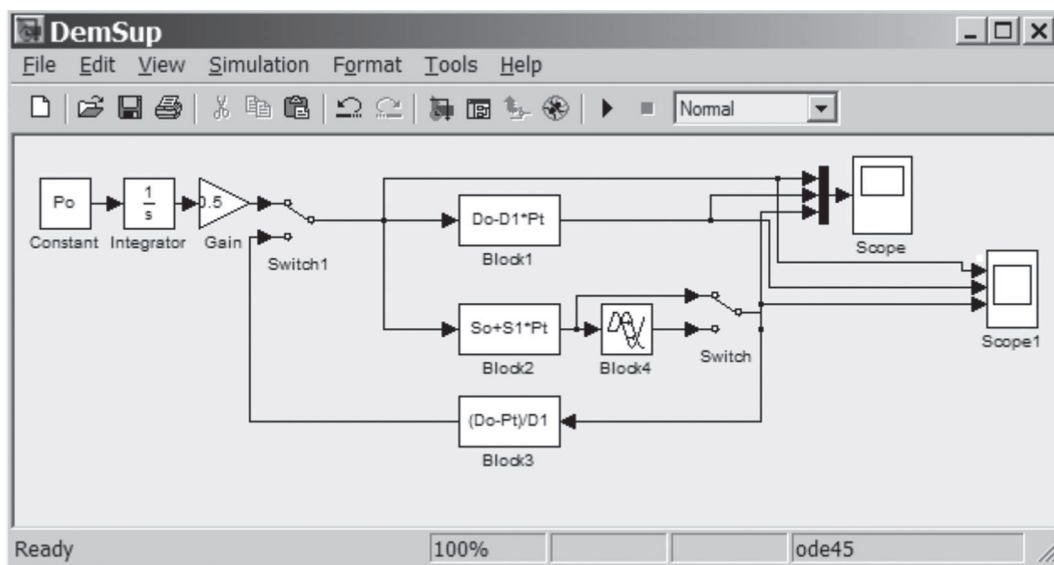


Рис. 1. Блок-схема имитационной модели динамики рыночных цен

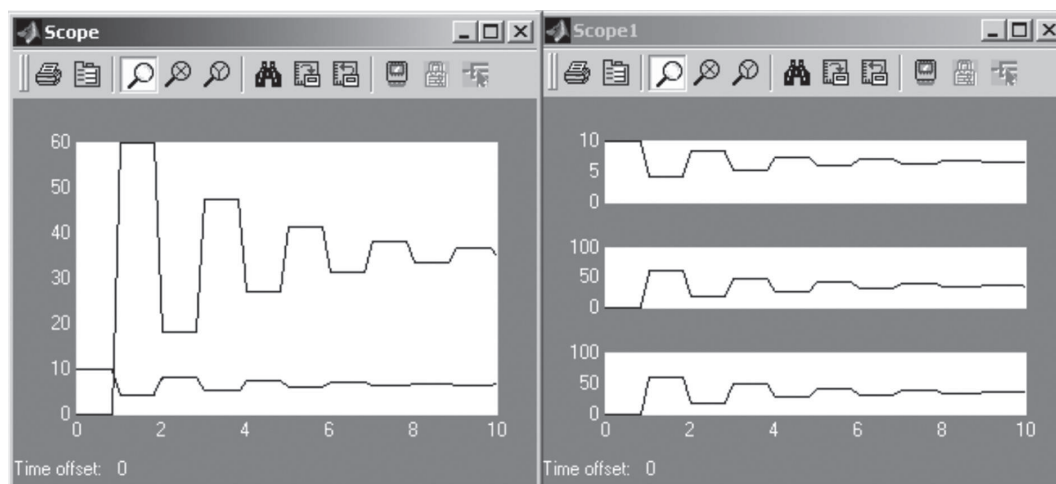


Рис. 2. Изменение цены, спроса и предложения во времени

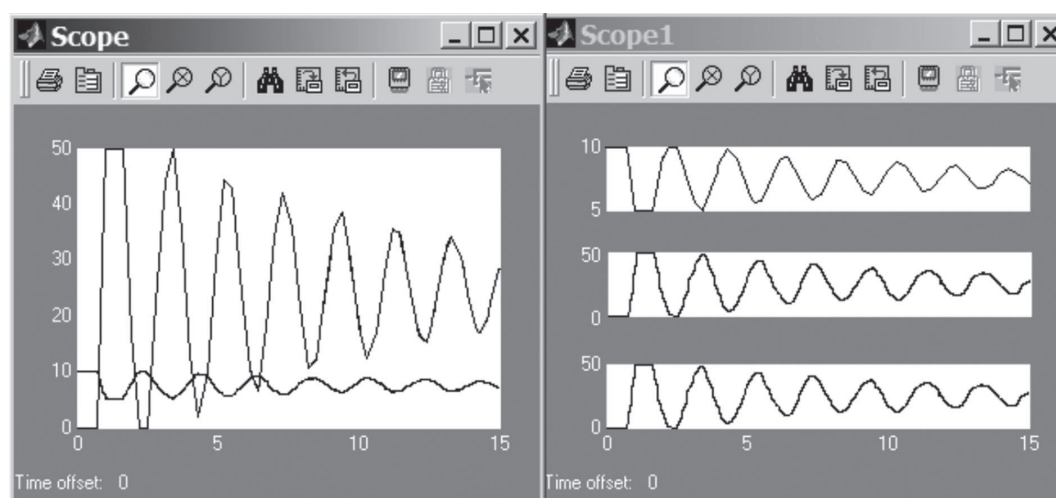


Рис. 3. Увеличение крутизны графика функции спроса и/или предложения приводит к замедлению процесса установления равновесной цены

Спрос моделируется при помощи блока *Block1*, вычисляющего значения функции спроса в зависимости от значения цены на входе в блок. Функция предложения, зависящая от цены и количества товаров и услуг на рынке в модели, состоит из трех блоков. Блок *Block2* вычисляет значения функции предложения в зависимости от значения цены на входе, блок *Block4* имитирует запаздывание поставки товаров и услуг на рынок, количество которых определяется на основе цен предыдущего момента времени. Блок *Block3* имитирует ситуацию на рынке, когда все поставляемые товары и услуги реализуются по цене, диктуемой линией спроса. Обратная функция спроса, реализуемая в блоке 3, по которой вычисляется цена покупки всего товара и услуг, может быть выражена зависимостью

$$D^{-1}(P) = (D_0 - P) / D_1.$$

В результате работы программы определяются равновесные значения рыночных цен на товары и услуги. Отображение результатов моделирования, представленное на рис. 2, осуществляется с помощью блоков Scope и Scope1, которые строят графики изменения спроса, предложения и цены с течением времени.

Для исследования влияния спроса и предложения на формирование равновесной цены необходимо задать значения параметров D_0 , D_1 , S_0 , S_1 . Смещение функции спроса обуславливается изменением значения параметра D_0 в блоках *Block1* и *Block3*, при этом цена движется к новому равновесию.

Влияние предложения на равновесную цену можно проследить, изменяя значение параметра S_0 в блоке *Block2*.

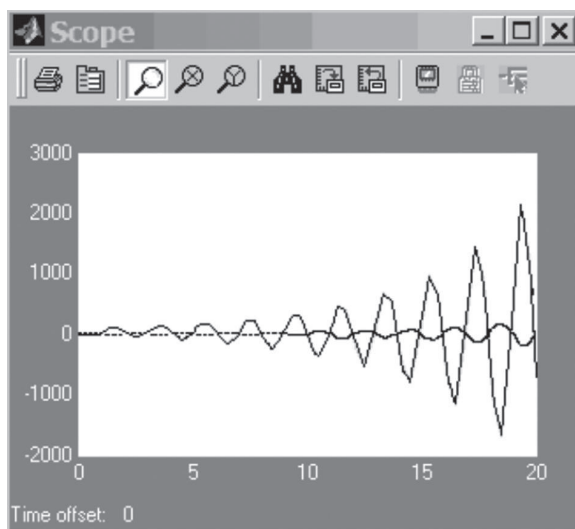


Рис. 4. Отсутствие равновесия на рынке

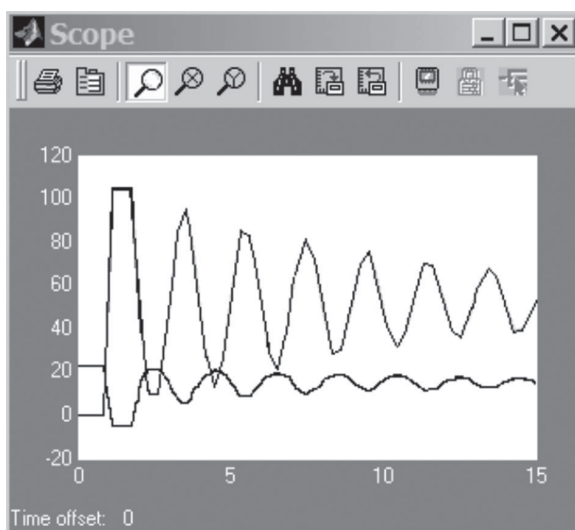


Рис. 5. Установление равновесной цены в случае параболической аппроксимации функции спроса и предложения

Крутизна графика функции спроса, определяемая коэффициентом D_1 , и крутизна графика функции предложения, задаваемая коэффициентом S_1 , также оказывают влияние на формирование равновесной цены. При увеличении S_1 колебания в системе возрастают и процесс перехода цены к равновесному значению замедляется. Соответствующие графики представлены на рис. 3.

При S_1 равном D_1 процесс затухания колебаний прекращается, что свидетельствует об отсутствии равновесия на рынке. При $S_1 > D_1$ система становится неустойчивой. Амплитуда колебаний возрастает, процесс расходится, равновесие не достигается. Соответствующие графики изображены рис. 4.

Следует отметить, что данная ситуация не характерна для реальных экономических систем. Расхождение графиков может быть объяснено неточностью начальных предположений о линейном приближении функций спроса и предложения. Поэтому в случае, когда коэффициенты S_1 и D_1 близки по значению, спрос и предложение нужно аппроксимировать функциями второго порядка. В этом случае колебания спроса и предложения затухают и цена достигает своего равновесного значения, что можно видеть на рис. 5.

Автоматизацию управления экспериментом можно осуществить, используя программный пакет MATLAB. При этом можно проследить движение цены к своему равновесному значению.

Первый режим моделирования – построение зависимости функции спроса и предложения от цены. Второй этап моделирования – симуляции переходного процесса к рыночному равновесию (рис. 6).

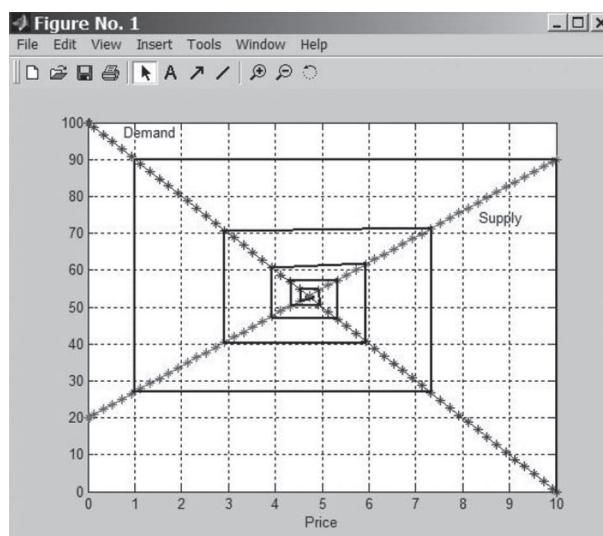


Рис. 6. Движение цены к равновесию

Предложенные в работе модели спроса, предложения и динамики рыночных цен позволяют анализировать процесс установления равновесной цены на товары и услуги на конкурентном рынке. При помощи разработанных моделей можно выявлять степень влияния экзогенных переменных модели на конечный результат, оценивать значения спроса и предложения в будущие периоды, а также прогнозировать значение цены в зависимости от спроса и предложения.