Канонические представления на сфере с действием псевдо-ортогональной группы [1]

© **А. А. Артемов**

Ключевые слова: канонические представления, псевдо-ортогональная группа, преобразование Березина

Обобщенная группа Лоренца $G = \mathrm{SO}_0(1, n-1)$ действует на единичной сфере Ω в $\mathbb{R}^n$ (линейно на лучах). Это действие имеет 3 открытых орбиты. Мы разлагаем не неприводимые компоненты канонические представления $R_{\lambda,\nu}$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $\nu = 0, 1$, группы G и разлагаем сопутствующую форму Березина.

The generalized Lorentz group $G = \mathrm{SO}_0(1, n-1)$ acts on the unit sphere Ω in $\mathbb{R}^n$ (linearly on rays). This action has 3 open orbits. We decompose the canonical representations $R_{\lambda,\nu}$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $\nu = 0, 1$, of the group G into irreducible constituents and decompose the accompanying Berezin form.

Настоящая статья посвящена новой теории в гармоническом анализе: изучению канонических представлений на G-пространствах. Эта теория была начата в работах Молчанова, см. [5], [6], [4].

Канонические представления группы G определяются следующим образом. Пусть $\widetilde{G}$ – группа, содержащая группу G (группа $\widetilde{G}$ называется надгруппой) такая, что группа G выделяется из $\widetilde{G}$ некоторой инволюцией. Пусть $\widetilde{P}$ – параболическая подгруппа группы $\widetilde{G}$ такая, что $\widetilde{P} \cap G = H$. Рассмотрим серию представлений $\widetilde{R}$ группы $\widetilde{G}$, индуцированных характерами (одномерными представлениями) подгруппы $\widetilde{P}$. Представления $\widetilde{R}$ нумеруются комплексным параметром λ и еще, может быть, некоторым дискретным параметром. Как правило, они неприводимы. Они действуют в функциях на некотором компактном многообразии Ω (многообразии флагов для $\widetilde{G}$). Во-первых, каноническими представлениями группы G мы называем ограничения представлений $\widetilde{R}$ на группу G. Многообразие Ω содержит несколько открытых G-орбит. Поэтому второй вариант состоит в том, что каноническими представлениями мы называем ограничение канонических представлений в первом смысле на какую-нибудь одну G-орбиту G/H. Оба варианта должны быть предметом изучения. Первый из них приводит к более естественной и прозрачной теории. Именно этот вариант рассматривается в настоящей работе.

[1] Работа поддержана грантами: РФФИ 07-01-91209 ЯФ_а, 06-06-96318 р_центр_а, Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы" РНП.2.1.1.351 и Темпланом 1.5.07.

В указанных работах Молчанова исследовались псевдоортогональные группы $G = \mathrm{SO}_0(1, n-1)$ с надгруппой $\widetilde{G} = \mathrm{SO}_0(1, n)$, тогда Ω есть сфера в $\mathbb{R}^n$, а также $G = \mathrm{SO}_0(1, 2)$ с надгруппой $\widetilde{G} = \mathrm{SO}_0(2, 2)$, тогда Ω есть тор $S^1 \times S^1$.

Мы рассматриваем случай, когда $G = \mathrm{SO}_0(1, n-1)$, $\widetilde{G} = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ и Ω есть сфера в $\mathbb{R}^n$,

§ 1. Обобщенная группа Лоренца. Ее представления, связанные с конусом

Возьмем в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 4$, билинейную форму

$$[x, y] = -x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n.$$

Пусть I – матрица этой формы, т.е. $I = \mathrm{diag}\{-1, 1, \ldots, 1\}$. Мы рассматриваем группу $G = \mathrm{SO}_0(1, n-1)$, это – связная компонента единицы группы линейных преобразований g пространства $\mathbb{R}^n$, сохраняющих форму $[x, y]$, т.е. $[xg, yg] = [x, y]$. Последнее означает, что $g = Ig'^{-1}I$, штрих – матричное транспонирование. Мы считаем, что G действует в $\mathbb{R}^n$ *справа*: $x \mapsto xg$, в соответствии с этим мы записываем вектор в виде строки.

Пусть $\mathcal{C}$ есть конус $[x, x] = 0$, $x \neq 0$. Группа G действует транзитивно на каждой из его двух пол: $\mathcal{C}^+ = \{x_1 > 0\}$ и $\mathcal{C}^- = \{x_1 < 0\}$.

Возьмем сечение S конуса $\mathcal{C}$ плоскостью $x_1 = 1$. Оно состоит из точек $s = (1, s_2, ..., s_n)$, $s_2^2 + ... + s_n^2 = 1$, так что оно есть сфера в $\mathbb{R}^{n-1}$. Пусть ds – евклидова мера на S:

$$ds = \frac{ds_2 ... \widehat{ds_k} ... ds_n}{|s_k|}$$

и Δ_S – оператор Лапласа–Бельтрами на S.

Пусть $\sigma \in \mathbb{C}$. Представление T_σ группы G действует на $\mathcal{D}(S)$ так

$$\Big(T_\sigma(g)\varphi\Big)(s) = \varphi\Big(\frac{sg}{(sg)_1}\Big)(sg)_1^\sigma.$$

$\big[$Для многообразия M через $\mathcal{D}(M)$ обозначается пространство Шварца комплекснозначных функций с компактным носителем класса C^∞ с обычной топологией, а через $\mathcal{D}'(M)$ обозначается пространство обобщенных функций на M – антилинейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}(M)$.$\big]$

Эрмитова форма

$$\langle \psi, \varphi \rangle_S = \int\limits_S \psi(s)\ \overline{\varphi(s)}\ ds$$

инвариантна относительно пары $(T_\sigma, T_{2-n-\overline{\sigma}})$, т.е.

$$\langle T_\sigma(g)\psi, \varphi \rangle_S = \langle \psi, T_{2-n-\overline{\sigma}}(g^{-1})\varphi \rangle_S \qquad (1.1)$$

(это следует из $d\widetilde{s} = (sg)_1^{2-n} ds$, где $\widetilde{s} = sg/(sg)_1$).

Определим оператор A_σ на $\mathcal{D}(S)$:

$$\big(A_\sigma\varphi\big)(s) = \int\limits_S \big(-[s,t]\big)^{2-n-\sigma}\ \varphi(t)\ dt.$$

Интеграл абсолютно сходится при $\operatorname{Re}\sigma < (2-n)/2$ и может быть продолжен мероморфно во всю плоскость σ. Он имеет простые полюсы в точках $\sigma \in (2-n)/2+\mathbb{N}$, $\mathbb{N}=\{0,1,2,...\}$.

Вообще, все интегралы здесь и в будущем понимаются как аналитические продолжения (мероморфные) по параметрам из области абсолютной сходимости.

Оператор A_σ сплетает представления T_σ с $T_{2-n-\sigma}$:

$$T_{2-n-\sigma}(g)\ A_\sigma = A_\sigma\ T_\sigma(g), \quad g\in G.$$

Пусть K – подгруппа в G, состоящая из элементов k, коммутирующих с I, она сохраняет координату x_1. Эта подгруппа есть максимальная компактная подгруппа группы G, она изоморфна $\mathrm{SO}(n{-}1)$.

Ограничение представления T_σ на K есть представление R подгруппы K вращениями в $\mathcal{D}(S)$. Оно разлагается в прямую сумму (свободную от кратностей) неприводимых представлений π_l, дествующих в пространствах $H_l^{(n-1)}$, $l\in\mathbb{N}$. Пространство $H_l^{(n-1)}$ состоит из ограничений на S однородных гармонических многочленов от $x_2,...,x_n$ степени l.

Пространства $H_l^{(n-1)}$ являются собственными подпространствами оператора A_σ и оператора Δ_S, собственное значение оператора Δ_S на $H_l^{(n-1)}$ равно $\mu_l = l(3{-}n{-}l)$.

Композиция операторов A_σ и $A_{2-n-\sigma}$ есть скалярный оператор

$$A_{2-n-\sigma}\ A_\sigma = \frac{1}{8\pi\omega(\sigma)},$$

где

$$\omega(\sigma) = 2^{-n-2}\ \pi^{-n}\ \sin\Big(\sigma{+}\frac{n}{2}\Big)\pi\cdot(2\sigma{+}n{-}2)\ \Gamma(-\sigma)\ \Gamma(\sigma{+}n{-}2) \qquad (1.2)$$

(как мы увидим позже, $\omega(\sigma)$ есть "мера Планшереля").

Представление T_σ неприводимо для всех σ, кроме $\sigma\in\mathbb{N}$ и $\sigma\in 2{-}n{-}\mathbb{N}$. Если T_σ неприводимо, то T_σ эквивалентно $T_{2-n-\sigma}$ (посредством A_σ или его вычета).

Представление T_σ может быть продолжено на $\mathcal{D}'(S)$ с помощью (1.1), то же относится к оператору A_σ.

Имеются 3 серии неприводимых унитаризуемых представлений T_σ и их подфакторов:

(1) *непрерывная* серия: T_σ, $\sigma = \frac{2-n}{2}{+}i\rho$, $\rho\in\mathbb{R}$, скалярное произведение есть $\langle\psi,\varphi\rangle_S$;

(2) *дополнительная* серия: T_σ, $2{-}n<\sigma<0$, скалярное произведение есть $\mathrm{const}\cdot\langle A_\sigma\psi,\varphi\rangle_S$;

(3) *дискретная* серия: $T_r^{(d)}$, $r \in \mathbb{N}$, представления $T_r^{(d)}$ действуют в фактор-пространстве $\mathcal{D}(S)/E_r$ где $E_r = H_0^{(n-1)} + H_1^{(n-1)} + ... + H_r^{(n-1)}$, скалярное произведение индуцируется формой $\langle \widetilde{A}_r \psi, \varphi \rangle_S$,

$$\widetilde{A}_\sigma = \frac{1}{\Gamma(\frac{2-n}{2} - \sigma)} A_\sigma;$$

представления $T_r^{(d)}$ эквивалентны представлениям $T_{2-n-r}^{(d)}$, действующим в подпространстве $\sum H_l^{(n-1)}$, $l \geqslant r+1$.

Назовем *расширенной дискретной серией* совокупность представлений $T_r^{(d)}$, $r \in \mathbb{N}$, дискретной серии вместе с представлениями T_r дополнительной серии с целыми r (тогда $(2-n)/2 < r < 0$).

§ 2. Гармонический анализ на гиперболоидах

Мы рассматриваем в $\mathbb{R}^n$ однополостный гиперболоид $\mathcal{X}$ и двуполостный гиперболоид $\mathcal{Y}$ определенные уравнениями $[x,x] = 1$ и $[x,x] = -1$, соответственно.

Гиперболоид $\mathcal{Y}$ распадается на две полы $\mathcal{Y}^+ = \{x_1 \geqslant 1\}$ и $\mathcal{Y}^- = \{x_1 \leqslant -1\}$. Каждая из них есть пространство Лобачевского размерности $n-1$.

Группа G действует (линейно) на $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}^+$, $\mathcal{Y}^-$ транзитивно. Пусть H есть стационарная подгруппа точки $x^0 = (0, ..., 0, 1) \in \mathcal{X}$. Она изоморфна $\mathrm{SO}_0(1, n-2)$. Стационарная подгруппа точки $y^0 = (1, 0, ..., 0) \in \mathcal{Y}^+$ есть $K = \mathrm{SO}(n-1)$.

Многообразия $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}^+$, $\mathcal{Y}^-$ являются симметрическими пространствами группы G. Многообразие $\mathcal{X}$ – псевдо-риманово, многообразие $\mathcal{Y}^\pm$ – риманово. Ранг всех этих пространств равен 1.

Метрика на гиперболоидах, инвариантная относительно G, равна $\mathrm{const} \cdot [dx, dx]$. Мы берем метрику $ds^2 = -[dx, dx]$ на $\mathcal{X}$ и $ds^2 = [dx, dx]$ на $\mathcal{Y}$. Соответствующие меры имеют одинаковое выражение:

$$dx = \frac{dx_1 ... \widehat{dx_k} ... dx_n}{|x_k|}.$$

Пусть $\mathcal{M} = \mathcal{X}, \mathcal{Y}^+, \mathcal{Y}^-$. Обозначим через $U_\mathcal{M}$ представление группы G в функциях на $\mathcal{M}$:

$$\big(U_\mathcal{M}(g) f\big)(x) = f(xg).$$

Оно сохраняет скалярное произведение из L^2:

$$\langle f, h \rangle_\mathcal{M} = \int\limits_\mathcal{M} f(x) \, \overline{h(x)} \, dx,$$

т.е.

$$\langle U_\mathcal{M}(g) f, h \rangle_\mathcal{M} = \langle f, U_\mathcal{M}(g^{-1}) h \rangle_\mathcal{M}. \tag{2.1}$$

Следовательно, представление $U_\mathcal{M}$, действующее на $L^2(\mathcal{M}, dx)$ унитарно (квазирегулярное представление).

Представление $U_{\mathcal{M}}$ на $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ может быть расширено до представления $U_{\mathcal{M}}$ (то же обозначение) на $\mathcal{D}'(\mathcal{M})$ посредством (2.1).

Обозначим через $\delta(x)$ и $\delta(y)$ дельта-функции на $\mathcal{X}$ и на $\mathcal{Y}^+$, сосредоточенные в точках x^0 и y^0 соответственно:

$$\langle \delta(x), f\rangle_{\mathcal{X}} = \overline{f(x^0)}, \quad \langle \delta(y), f\rangle_{\mathcal{Y}^+} = \overline{f(y^0)}.$$

Гармонический анализ на $\mathcal{X}, \mathcal{Y}^+, \mathcal{Y}^-$ эквивалентен разложению этих дельта-функций по сферическим функциям.

Для $\mathcal{X}$ мы имеем (Молчанов (1966), Шинтани (1967))

$$\delta = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\sigma) \sum_{\varepsilon=0,1} \Psi_{\sigma,\varepsilon}\Big|_{\sigma=(2-n)/2+i\rho} d\rho + \sum_{r>(2-n)/2} \omega_r^{(d)} \, \Psi_r^{(d)},$$

где $\omega(\sigma)$ дается формулой (1.2),

$$\omega_r^{(d)} = 2^{-3}\, \pi^{2-n}\, (-1)^{\frac{r-\varepsilon+1}{2}}\, \Gamma\Big(\frac{r+n-2+\varepsilon}{2}\Big)\Big/\Gamma\Big(\frac{r+2-\varepsilon}{2}\Big),$$

$\varepsilon \equiv r+1$, здесь и дальше знак сравнения означает сравнение по модулю 2. Ряд отвечает представлениям расширенной дискретной серии.

Сферические функции $\Psi_{\sigma,\varepsilon}$, $\Psi_r^{(d)}$ (это – обобщенные функции) определяются следующим образом. Подпространство в $\mathcal{D}'(S)$, состоящее из H-*инвариантных функций* в представлении T_σ, имеет размерность 2. Базис образован обобщенными функциями $\theta^+_{\sigma,\varepsilon}(s) = [x^0, s]^{\sigma,\varepsilon} = s_n^{\sigma,\varepsilon}$, $\varepsilon = 0,1$, для $\sigma \neq -m-1$ и обобщенными функциями $(s_n)^{-m-1}$, $\delta^{(m)}(s_n)$ для $\sigma = -m-1$, $m \in \mathbb{N}$. Здесь $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака на вещественной прямой, и мы используем обозначение

$$t^{\sigma,\varepsilon} = |t|^\sigma\, (\operatorname{sgn} t)^\varepsilon, \quad t \in \mathbb{R}, \quad t \neq 0.$$

Функция $\theta^+_{\sigma,\varepsilon}$ порождает преобразование Пуассона $P_{\sigma,\varepsilon} : \mathcal{D}(S) \to C^\infty(\mathcal{X})$:

$$\begin{aligned}(P_{\sigma,\varepsilon}\varphi)(x) &= \langle T_\sigma(g^{-1})\theta^+_{\sigma,\varepsilon}, \overline{\varphi}\rangle_S \\ &= \int_S [x,s]^{\sigma,\varepsilon}\, \varphi(s)\, ds, \ x = x^0 g.\end{aligned}$$

Оно сплетает представления $T_{2-n-\sigma}$ и $U_{\mathcal{X}}$. Сферическая функция $\Psi_{\sigma,\varepsilon}$ есть преобразование Пуассона H-инварианта $\theta^+_{2-n-\sigma,\varepsilon}$, а сферическая функция $\Psi_r^{(d)}$, $r \in \mathbb{Z}$, $r > \frac{2-n}{2}$, есть:

$$\Psi_r^{(d)} = \frac{1}{\Gamma\big(\frac{\sigma+1+\varepsilon}{2}\big)\, \Gamma\big(\frac{3-n-\sigma+\varepsilon}{2}\big)}\, \Psi_{\sigma,\varepsilon}\Big|_{\sigma=r,\ \varepsilon\equiv r+1}.$$

Для $\mathcal{Y}^+$ мы имеем:

$$\delta = \int_{-\infty}^{\infty} 2\omega(\sigma)\, \Psi_\sigma\Big|_{\sigma=(2-n)/2+i\rho} d\rho,$$

сферическая функция Ψ_σ порождается K-инвариантом, который есть функция, тождественно равная 1, обозначим его для единообразия $\theta^-_{\sigma,\varepsilon}$, а именно,

$$\Psi_\sigma(y) = \int_S [-y, s]^\sigma \, ds.$$

Оператор A_σ переводит H-инвариант $\theta^\pm_{\sigma,\varepsilon}$ в H-инвариант $\theta^\pm_{2-n-\sigma,\varepsilon}$ с множителем:

$$A_\sigma \theta^\pm_{\sigma,\varepsilon} = j^\pm(\sigma,\varepsilon)\theta^\pm_{2-n-\sigma,\varepsilon},$$

где

$$j^\pm(\sigma,\varepsilon) = J(\sigma)\mu^\pm(\sigma,\varepsilon), \tag{2.2}$$

$$J(\sigma) = 2^{-\sigma}\ \pi^{(n-4)/2}\Gamma(\sigma+1)\ \Gamma\Big(\frac{2-n}{2} - \sigma\Big)\mu^\pm(\sigma,\varepsilon), \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
\mu^+(\sigma,\varepsilon) &= (-1)^\varepsilon \sin\big(\sigma + \frac{n}{2}\big)\pi - \sin\frac{n\pi}{2} = \\
&= 2\sin\frac{\sigma+\varepsilon}{2}\pi\ \cos\frac{\sigma+\varepsilon+n}{2}\pi, \qquad (2.4)\\
\mu^-(\sigma,\varepsilon) &= -\sin\sigma\pi = \\
&= -2\sin\frac{\sigma+\varepsilon}{2}\pi\ \cos\frac{\sigma-\varepsilon}{2}\pi. \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Множители $j^\pm(\sigma,\varepsilon)$ являются аналогами c-функции Хариш-Чандры. Мы имеем ($\omega(\sigma)$ см. в (1.2)):

$$j^\pm(\sigma,\varepsilon)\ j^\pm(2-n-\sigma,\varepsilon) = \frac{1}{8\pi\,\omega(\sigma)}.$$

§ 3. Надгруппа. Максимально вырожденные представления

В качестве надгруппы для группы $G = \mathrm{SO}_0(1, n-1)$, мы возьмем группу $\widetilde{G} = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$. Рассмотрим следующую серию представлений $\pi_{\lambda,\nu}$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $\nu = 0,1$, этой группы. Пусть P – ее параболическая подгруппа, состояая из верхних блочно треугольных матриц p, соответствующих разбиению $n = (n-1)+1$:

$$p = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Представления $\pi_{\lambda,\nu}$ индуцируются характерами группы P.

Реализуем $\pi_{\lambda,\nu}$ в однородных функциях. Пусть $\mathcal{D}_{\lambda,\nu}\big(\mathbb{R}^n\big)$ – пространство функций f из $C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, удовлетворяющих следующему условию однородности

$$f(tx) = t^{\lambda,\nu} f(x), \ \ x \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\},\ t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Представление $\pi_{\lambda,\nu}$ группы $\widetilde{G}$ действует в этом пространстве сдвигами:

$$\pi_{\lambda,\nu}(g)\ f(x) = f(xg).$$

Теперь рассмотрим "компактную картину". Обозначим через $\langle x,y\rangle$ и $|x|$ евклидовы скалярное произведение и норму в $\mathbb{R}^n$:

$$\langle x,y\rangle = x_1y_1+...+x_ny_n, \quad |x| = \sqrt{x_1^2+...+x_n^2}.$$

Пусть Ω – сфера $|x|=1$. Обозначим через $\mathcal{D}_\nu(\Omega)$ подпространство функций f в $\mathcal{D}(S)$ четности ν:

$$f(-u) = (-1)^\nu f(u), \quad u\in\Omega.$$

Представление $\pi_{\lambda,\nu}$ группы $\widetilde{G}$ действует в $\mathcal{D}_\nu(\Omega)$ следующим образом:

$$\big(\pi_{\lambda,\nu}(g)f\big)(u) = f\Big(\frac{ug}{|ug|}\Big)\ |ug|^\lambda, \quad g\in\widetilde{G}.$$

Рассмотрим L^2-скалярное произведение функций на Ω:

$$\langle f,h\rangle_\Omega = \int_\Omega f(u)\ \overline{h(u)}\ du,$$

где du – евклидова мера на Ω. Эта эрмитова форма инвариантна относительно пары $(\pi_{\lambda,\nu},\pi_{-\overline{\lambda}-n,\nu})$:

$$\langle \pi_{\lambda,\nu}(g)f,h\rangle_\Omega = \langle f,\pi_{-\overline{\lambda}-n,\nu}(g^{-1})h\rangle_\Omega, \quad g\in\widetilde{G}.$$

Эта формула позволяет распространить представления $\pi_{\lambda,\nu}$ на пространство $\mathcal{D}'_\nu(\Omega)$ обобщенных функций на Ω четности ν.

Представления $\pi_{\lambda,\nu}$ неприводимы, за исключением следующих случаев:

$$(a)\ \lambda\in\mathbb{N},\ \nu\equiv\lambda\ ;$$
$$(b)\ \lambda\in -n-\mathbb{N},\ \nu\equiv\lambda+n\ .$$

Напишем некоторые сплетающие операторы. Определим оператор $B_{\lambda,\nu}$ на $\mathcal{D}_\nu(\Omega)$:

$$\big(B_{\lambda,\nu}f\big)(u) = \int_\Omega [u,v]^{-\lambda-n,\nu}\ f(v)\ dv.$$

Интеграл абсолютно сходится при $\mathrm{Re}\,\lambda < 1-n$ и распространяется мероморфно на всю комплексную плоскость λ. Он сплетает представления $\pi_{\lambda,\nu}$ и $\widehat{\pi}_{-\lambda-n,\nu}$:

$$\widehat{\pi}_{-\lambda-n,\nu}(g)B_{\lambda,\nu} = B_{\lambda,\nu}\pi_{\lambda,\nu}(g), \quad g\in\widetilde{G},$$

где

$$\widehat{\pi}_{\lambda,\nu}(g) = \pi_{\lambda,\nu}(Ig'^{-1}I).$$

Аналогично § 1, пусть $H_l^{(n)}$, $l\in\mathbb{N}$, обозначает пространство гармонических функций на сфере Ω степени l. Такое пространство с $l\equiv\nu$ является собственным пространством для оператора $B_{\lambda,\nu}$ с собственным значением

$$b_l(\lambda) = 2^{\lambda+n}\ \pi^{n/2}\ \frac{\Gamma(1-n-\lambda)}{\Gamma\big(\frac{l-\lambda}{2}\big)\ \Gamma\big(\frac{2-n-\lambda-l}{2}\big)}.$$

Мы имеем

$$B_{-\lambda-n,\nu}\ B_{\lambda,\nu} = \gamma(\lambda,\nu)\cdot E,$$

где

$$\gamma(\lambda,\nu) = b_l(\lambda)\ b_l(-\lambda-n), \quad l\equiv r\ ,$$

так что

$$\gamma(\lambda,\nu) = 2^{n+1}\ \pi^{n-2}\ \Gamma(\lambda+1)\ \Gamma(1-\lambda-n)\ \Big[\cos\Big(\lambda+\frac{n}{2}\Big)\pi - \cos\Big(\nu+\frac{n}{2}\Big)\pi\Big].$$

§ 4. Канонические представления

Канонические представления $R_{\lambda,\nu}$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $\nu=0,1$, группы $G=\mathrm{SO}_0(1,n-1)$ мы определяем как ограничения представлений $\pi_{-\lambda-n,\nu}$ надгруппы $\widetilde{G}$ на группу G. Представление $R_{\lambda,\nu}$ группы G действует в $\mathcal{D}_\nu(\Omega)$ по той же формуле, что и $\pi_{-\lambda-n,\nu}$:

$$\big(R_{\lambda,\nu}(g)f\big)(u) = f\Big(\frac{ug}{|ug|}\Big)\ |ug|^{-\lambda-n}, \quad g\in G.$$

Эрмитова форма $\langle f,h\rangle_\Omega$ инвариантна относительно пары $(R_{\lambda,\nu}, R_{-\overline{\lambda}-n,\nu})$:

$$\langle R_{\lambda,\nu}(g)f,h\rangle_\Omega = \langle f, R_{-\overline{\lambda}-n,\nu}(g^{-1})h\rangle_\Omega, \quad g\in G. \tag{4.1}$$

Назовем *преобразованием Березина* оператор

$$Q_{\lambda,\nu} = c(\lambda,\nu)\ B_{-\lambda-n,\nu},$$

где

$$\begin{aligned} c(\lambda,\nu) &= b_\nu(\lambda)^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\ \pi^{(1-n)/2}\ \frac{\Gamma\big(\frac{\nu-\lambda}{2}\big)}{\Gamma\big(\frac{-\lambda-n+\nu+1}{2}\big)}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Он сплетает $R_{\lambda,\nu}$ с $R_{-\lambda-n,\nu}$. Вот его интегральное выражение:

$$\big(Q_{\lambda,\nu}f\big)(u) = c(\lambda,\nu)\ \int_\Omega [u,v]^{\lambda,\nu}\ f(v)\ dv.$$

Он имеет полюсы (первого порядка) в точках $\lambda\in-1-\nu-2\mathbb{N}$. С формой $\langle\ ,\ \rangle_\Omega$ оператор $Q_{\lambda,\nu}$ взаимодействует так:

$$\langle Q_{\lambda,\nu}f,h\rangle_\Omega = \langle f, Q_{\overline{\lambda},\nu}h\rangle_\Omega. \tag{4.3}$$

Композиция $Q_{-\lambda-n,\nu}\ Q_{\lambda,\nu}$ есть тождественный оператор:

$$Q_{-\lambda-n,\nu}\ Q_{\lambda,\nu} = E. \tag{4.4}$$

Представление $R_{\lambda,\nu}$ и оператор $Q_{\lambda,\nu}$ могут быть продолжены на $\mathcal{D}'_\nu(\Omega)$ – с помощью (4.1) и (4.3).

Назовем *формой Березина* полуторалинейную форму

$$\mathcal{B}_{\lambda,\nu}(f,h) = \langle Q_{\lambda,\nu} f, h\rangle_\Omega.$$

Действие $u \mapsto ug/|ug|$, $g\in G$, группы G на Ω не транзитивно. Имеется 5 орбит: 3 открытые орбиты: $\Omega_-^+ :\ [u,u] < 0,\ u_1 > 1/\sqrt{2}$ (северная полярная шапка), $\Omega_+ :\ [u,u] > 0$ (сферический пояс), $\Omega_-^- :\ [u,u] < 0,\ u_1 < -1/\sqrt{2}$ (южная полярная шапка), и между ними 2 орбиты размерности $n-2$ (сферы): $\Omega_0^+ :\ [u,u]=0,\ u_1 = 1/\sqrt{2}$, $\Omega_0^- :\ [u,u]=0,\ u_1=-1/\sqrt{2}$.

Отобразим гиперболоиды $\mathcal{X}, \mathcal{Y}^+, \mathcal{Y}^-$ и конус $\mathcal{C}$ на Ω с помощью центрального проектирования: $x \mapsto u = x/|x|$. Тогда мы получим многообразия Ω_+,Ω_-^+, Ω_-^- и Ω_0^+, Ω_0^-, соответственно.

Меры dx на гиперболоидах и du на сфере Ω связаны следующим образом:

$$dx = |x|^n\ du = \big|[u,u]\big|^{-n/2}\ du.$$

Для функций $f(u)$ с носителями в $\mathcal{X}$ представление $R_{\lambda,\nu}$ эквивалентно представлению $U_\mathcal{X}$ в функциях $f(x)$ на $\mathcal{X}$ четности ν. То же самое верно и для $\mathcal{Y}^+$ и $\mathcal{Y}^-$.

§ 5. Граничные представления

Каноническое представление $R_{\lambda,\nu}$ порождает два представления L_λ и M_λ, связанных с границей $\Omega_0 = \Omega_0^+ \cup \Omega_0^-$ многообразий (открытых орбит) $\Omega_\pm$. Эта граница задается уравнением $[u,u]=0$. Представление L_λ действует в обобщенных функциях, сосредоточенных на Ω_0, представление M_λ действует в многочленах Тейлора (струях) от $a=[u,u]$.

Сначала рассмотрим "северную"полусферу Ω_{North}, заданную условием $u_1 > 0$. Введем на Ω_{North} полярные координаты a, s, где $a = [u,u] = 1-2u_1^2$, $-1 \leqslant a \leqslant 1$, и $s\in S$, следующим образом:

$$\begin{aligned} u &= \left(u_1, \sqrt{1{-}u_1^2}s_2, ..., \sqrt{1{-}u_1^2}s_n\right) = \\ &= \left(\sqrt{\frac{1{-}a}{2}}, \sqrt{\frac{1{+}a}{2}}s_2, ..., \sqrt{\frac{1{+}a}{2}}s_n\right). \end{aligned}$$

В этих координатах мера du есть

$$du = 2^{-n/2}\ (1{+}a)^{(n-3)/2}\ (1-a)^{-1/2}\ da\ ds. \tag{5.1}$$

Для функции $f\in\mathcal{D}_\nu(\Omega)$ рассмотрим ряд Тейлора ее ограничения на Ω_{North} по степеням a

$$f(u) \sim c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + ...$$

где $c_m = c_m(s)$ и

$$c_m(s) = \frac{1}{m!}\ \frac{\partial^m}{\partial a^m}\Big|_{a=0}\ f(a,s).$$

Имея в виду (5.1), рассмотрим также функцию

$$f^*(u) = (1+a)^{(n-3)/2}\ (1-a)^{-1/2}\ f(u).$$

и ее коэффициенты Тейлора обозначим c_m^*. Коэффициенты c_m и c_m^* выражаются друг через друга с помощью треугольной матрицы с единицами по диагонали.

Обозначим через $\Sigma_k(\Omega)$ пространство обобщенных функций ζ, сосредоточенных на Ω_0^+ и имеющих в полярных координатах (a, s) следующий вид:

$$\zeta = \varphi_0(s)\delta(a) + \varphi_1(s)\delta'(a) + ... + \varphi_k(s)\delta^{(k)}(a),$$

где $\delta(a)$ – дельта-функция Дирака на действительной прямой, $\varphi_0, ..., \varphi_k$ – функции из $\mathcal{D}(S)$. Значение обобщенной функции $\varphi(s)\delta^{(m)}(a)$ на функции $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ дается следующей формулой

$$\begin{aligned} \langle \varphi(s)\delta^{(m)}(a), f\rangle_\Omega &= \int_{\Omega_{North}} \varphi(s)\ \delta^{(m)}(a)\ \overline{f(u)}\ du = \\ &= 2^{-n/2}\ (-1)^m\ m!\ \langle \varphi, c_m^*\rangle_S, \end{aligned} \tag{5.2}$$

Положим

$$\Sigma(\Omega) = \bigcup_{k=0}^{\infty}\ \Sigma_k(\Omega).$$

Каноническое представление $R_{\lambda,\nu}$ сохраняет $\Sigma_k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$. Обозначим через L_λ ограничение представления $R_{\lambda,\nu}$ на $\Sigma(\Omega)$.

Поставим в соответствие обобщенной функции ζ столбец $(\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_k, 0, ...)$. Тогда L_λ есть верхняя треугольная матрица:

$$L_\lambda = \begin{pmatrix} T_{2-n-\lambda} & * & * & ... \\ 0 & T_{4-n-\lambda} & * & ... \\ 0 & 0 & T_{6-n-\lambda} & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}.$$

Пусть $c[f]$ есть столбец $(c_0, c_1, c_2, ...)$. Вообще, обозначим через $\mathcal{A}(S)$ пространство последовательностей $c = (c_0, c_1, c_2, ...)$, где $c_m \in \mathcal{D}(S)$. Отображение $f \mapsto c[f]$ есть изоморфное отображение пространства $\mathcal{D}(S)$ на $\mathcal{A}(S)$.

Представление M_λ действует на $\mathcal{A}(S)$:

$$M_\lambda(g)c[f] = c\ [R_{\lambda,\nu}(g)f]$$

(оно не зависит от ν). Оно есть нижняя треугольная матрица:

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} T_{-\lambda-n} & 0 & 0 & ... \\ * & T_{-\lambda-n-2} & 0 & ... \\ * & * & T_{-\lambda-n-4} & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}.$$

Имеет место дуальность между L_λ и M_λ.

Для обобщенной функции $\zeta \in \Sigma_k(\Omega)$ (напомним, что $\operatorname{supp} \zeta \subset \Omega_0^+$), обозначим через $\zeta^{(\nu)}$ обобщенную функцию из $\mathcal{D}'_\nu(\Omega)$ такую, что ее ограничение на Ω_{North} есть ζ, т.е.

$$\zeta^{(\nu)}(u) = \zeta(u) + (-1)^\nu \zeta(-u).$$

Следовательно, для $\zeta = \varphi(s)\delta^{(m)}(a)$ имеем

$$\langle \zeta^{(\nu)}, f \rangle_\Omega = 2^{(2-n)/2} \, (-1)^m \, m! \, \langle \varphi, c_m^* \rangle_S,$$

Обозначим пространство обобщенных функций $\zeta^{(\nu)}$ через $\Sigma_k^{(\nu)}(\Omega)$, и обозначим $\Sigma^{(\nu)}(\Omega) = \cup \Sigma_k^{(\nu)}(\Omega)$. Ясно, что $\Sigma_k^{(\nu)}(\Omega)$ изоморфно $\Sigma_k(\Omega)$ и $\Sigma^{(\nu)}(\Omega)$ изоморфно $\Sigma(\Omega)$. Ограничение представления $R_{\lambda,\nu}$ на $\Sigma^{(\nu)}(\Omega)$ эквивалентно представлению L_λ.

Представления L_λ и M_λ разлагаются по представлениям T_σ точно так же, как в работе [3].

Обобщенные функции из $\Sigma_k^{(\nu)}(\Omega)$ можно распространить естественным образом на некоторое пространство, более широкое, чем $\mathcal{D}_\nu(\Omega)$. А именно, пусть $\mathcal{T}_k^{(\nu)}(\Omega)$ – пространство функций f класса C^∞ на каждой G-орбите и четности ν и имеющих разложение Тейлора порядка k:

$$f(u) = c_0 + c_1 a + \cdots + c_k a^k + o(a^k),$$

где $c_m \in \mathcal{D}(S)$. Тогда (5.2) сохраняется для $f \in \mathcal{T}_k^{(\nu)}(\Omega)$ с $m \leqslant k$.

§ 6. Преобразования Пуассона

Определим *преобразования Пуассона $P^\pm_{\lambda,\nu,\sigma}$, связанные с каноническим представлением* $R_{\lambda,\nu}$, следующим образом

$$\big(P^\pm_{\lambda,\nu,\sigma}\varphi\big)(u) = [u,u]_\pm^{(-\lambda-n-\sigma)/2} \int_S [u,s]^{\sigma,\nu} \, \varphi(s) \, ds$$

(мы используем обобщенные функции x_+^λ, x_-^λ на действительной прямой).

Обозначим через $C_\nu^\infty(\Omega_\pm)$ пространство функций $f(u)$ класса C^∞ и четности ν на многообразии $\Omega_\pm$. Преобразование $P^\pm_{\lambda,\nu,\sigma}$ есть оператор $\mathcal{D}(S) \to C_\nu^\infty(\Omega_\pm)$. Он сплетает представления $T_{2-n-\sigma}$ и $R_{\lambda,\nu}$:

$$R_{\lambda,\nu}(g) \, P^\pm_{\lambda,\nu,\sigma} = P^\pm_{\lambda,\nu,\sigma} \, T_{2-n-\sigma}(g), \quad g \in G.$$

Для параметров в общем положении преобразование Пуассона взаимодействует с оператором A_σ по формуле

$$P^\pm_{\lambda,\nu,\sigma} \, A_\sigma = j^\pm(\sigma,\nu) \, P^\pm_{\lambda,\nu,2-n-\sigma},$$

а с преобразованием Березина $Q_{\lambda,\nu}$ следующим образом:

Теорема 6.1 *Имеют место следующие формулы:*

$$Q_{\lambda,\nu}\ P^-_{\lambda,\nu,\sigma} = \Lambda^{--}(\lambda,\nu,\sigma)\ P^-_{-\lambda-n,\nu,\sigma} + \Lambda^{-+}(\lambda,\nu,\sigma)\ P^+_{-\lambda-n,\nu,\sigma}, \tag{6.1}$$

$$Q_{\lambda,\nu}\ P^+_{\lambda,\nu,\sigma} = \Lambda^{+-}(\lambda,\nu,\sigma)\ P^-_{-\lambda-n,\nu,\sigma} + \Lambda^{++}(\lambda,\nu,\sigma)\ P^+_{-\lambda-n,\nu,\sigma}, \tag{6.2}$$

Числа $\Lambda^{\pm\pm}$ *образуют матрицу (зависящую от* λ,ν,σ*):*

$$M = \begin{pmatrix} \Lambda^{--} & \Lambda^{-+} \\ \Lambda^{+-} & \Lambda^{++} \end{pmatrix}.$$

Вот ее явное выражение:

$$M(\lambda,\nu,\sigma) = \frac{\Lambda(\lambda,\nu,\sigma)}{\cos\frac{\lambda-\nu}{2}\pi} \begin{pmatrix} \cos\frac{\lambda+\nu}{2}\pi & \cos\frac{\sigma+\nu}{2}\pi \\ -\cos\frac{\sigma+n-\nu}{2}\pi & -\cos\frac{\lambda+n-\nu}{2}\pi \end{pmatrix}, \tag{6.3}$$

где

$$\Lambda(\lambda,\nu,\sigma) = \frac{\Gamma\left(\frac{-\lambda+\sigma}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{-\lambda-n-\sigma+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-\lambda-\nu+1}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{-\lambda-n+\nu+1}{2}\right)}. \tag{6.4}$$

Доказательство. Для упрощения записи не будем писать аргументы и индексы λ,ν,σ, а переход от λ к $-\lambda-n$ будем обозначать тильдой, так что, например, формула (6.1) запишется так

$$Q\ P^- = \Lambda^{--}\widetilde{P}^- + \Lambda^{-+}\widetilde{P}^+. \tag{6.5}$$

Эта формула означает объединение двух формул, отвечающих Ω_- и Ω_+:

$$\big(Q\ P^-\varphi\big)(u) = \Lambda^{--}\cdot\big(\widetilde{P}^-\varphi\big)(u), \quad u\in\Omega_-, \tag{6.6}$$

$$\big(Q\ P^-\varphi\big)(u) = \Lambda^{-+}\cdot\big(\widetilde{P}^+\varphi\big)(u), \quad u\in\Omega_+, \tag{6.7}$$

где $\varphi\in\mathcal{D}(S)$. Докажем, например, первую из них – формулу (6.6). Обозначим левую часть в ней через $f(u)$:

$$f(u) = \big(Q\ P^-\varphi\big)(u), \quad u\in\Omega_-.$$

Отображение $\varphi\mapsto f$ сплетает $T_{2-n-\sigma}$ с $R_{-\lambda-n,\nu}$. Поэтому функция f есть ограничение на Ω_- некоторой функции класса C^∞, заданной в области $[x,x]<0$ (внутри конуса) и имеющей однородность λ и четность ν. Вернемся по этой однородности от Ω к гиперболоиду $\mathcal{Y}^+$. Мы получим преобразование L, которое функции φ из $\mathcal{D}(S)$, сопоставляет функцию f из $C^\infty(\mathcal{Y}^+)$, причем это преобразование сплетает представление $T_{2-n-\sigma}$ и представление $U_{\mathcal{Y}^+}$ группы G в $C^\infty(\mathcal{Y}^+)$ сдвигами.

Из [1] следует, что такое преобразование L для параметров общего положения только множителем отличается от преобразования Пуассона P_σ для $\mathcal{Y}^+$:

$$\big(P_\sigma\varphi\big)(y) = \int_S [-y,s]^\sigma\ \varphi(s)\ ds,$$

а именно,

$$L = \Lambda^{--} \cdot (-1)^\nu P_\sigma$$

(множитель $(-1)^\nu$ взят в соответствии с определением преобразования P^-, см. начало параграфа). Возвращаясь снова на сферу Ω, получаем, что преобразование L есть $\Lambda^{--} \cdot \widetilde{P}^-$, так что

$$f(u) = \Lambda^{--} \cdot \big(\widetilde{P}^- \varphi\big)(u), \quad u \in \Omega_-.$$

Это и означает равенство (6.6). Аналогично доказывается (6.7) и тем самым (6.5). Точно такое же рассуждение доказывает (6.2).

Остается вычислить множители $\Lambda^{\pm\pm}$.

Мы делаем это прямым вычислением ядер преобразований в некоторых точках. Как уже было сказано, формулы (6.1), (6.2) равносильны следующим четырем формулам:

$$\big(Q\ P^\varepsilon \varphi\big)(u) = \Lambda^{\varepsilon\varkappa} \cdot \big(\widetilde{P}^\varkappa \varphi\big)(u), \quad u \in \Omega_\varkappa,$$

где ε и $\varkappa$ обозначают знаки "+" или "−". Подробно эта формула выглядит так:

$$c \int\limits_\Omega [u,v]^{\lambda,\nu}\ [v,v]_\varepsilon^{\frac{-\lambda-n-\sigma}{2}}\ dv \int\limits_S [v,s]^{\sigma,\nu}\ \varphi(s)\ ds =$$

$$= \Lambda^{\varepsilon\varkappa} \cdot [u,u]_\varkappa^{\frac{\lambda-\sigma}{2}} \int\limits_S [u,s]^{\sigma,\nu}\ \varphi(s)\ ds,$$

где c – множитель (4.2), $u \in \Omega_\varkappa$. Интегрирование по v фактически происходит по Ω_ε. Перейдем от Ω к гиперболоидам $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ по формулам $u = x/|x|$, $v = y|y|$, тогда $dv = |y|^{-n} dy$. Мы получим

$$c \int [x,y]^{\lambda,\nu}\ dy \int\limits_S [y,s]^{\sigma,\nu}\ \varphi(s)\ ds =$$

$$= \Lambda^{\varepsilon\varkappa} \cdot \int\limits_S [x,s]^{\sigma,\nu}\ \varphi(s)\ ds, \tag{6.8}$$

где $x \in \mathcal{Y}$ или $x \in \mathcal{X}$ соответственно при $\varkappa =$ "−" или $\varkappa =$ "+ а внешнее интегрирование в левой части происходит по $\mathcal{Y}$ или $\mathcal{X}$ соответственно при или $\varepsilon =$ "+".

Возьмем в (6.8) в качестве x точку $e_1 = (1, 0, ..., 0) \in \mathcal{Y}$ для $\varkappa =$ "−" и точку $e_n = (0, ..., 0, 1) \in \mathcal{X}$ для $\varkappa =$ "+". Тогда равенства (6.8) превратятся в следующие равенства:

$$c \int (-y_1)^{\lambda,\nu}\ dy \int\limits_S [y,s]^{\sigma,\nu}\ \varphi(s)\ ds =$$

$$= \Lambda^{\varepsilon,-}\ (-1)^\nu \int\limits_S \varphi(s)\ ds, \tag{6.9}$$

$$c \int (y_n)^{\lambda,\nu}\ dy \int_S [y,s]^{\sigma,\nu}\ \varphi(s)\ ds =$$

$$= \Lambda^{\varepsilon,+} \int_S s_n^{\sigma,\nu}\ \varphi(s)\ ds. \qquad (6.10)$$

Теперь мы хотим переставить интегрирования в левых частях. Непосредственная перестановка приводит к расходящимся интегралам. Поэтому предварительно поместим во внешних интегралах в левых частях (6.9) и (6.10) множитель $(r^2+1)^\lambda$, где $r^2 = y_2^2 + ... + y_{n-1}^2$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда интегралы абсолютно сходятся при условиях

$$\mathrm{Re}(\lambda+\sigma) < 0, \quad \mathrm{Re}(\lambda-\sigma) < 0, \quad \mathrm{Re}\lambda > -1, \quad \mathrm{Re}\lambda < \frac{4-n}{2}.$$

Переставляя интегрирования, мы получим соотношения для ядер:

$$c \int (-y_1)^{\lambda,\nu}\ [y,s]^{\sigma,\nu}\ (r^2+1)^\lambda\ dy\Big|_{\lambda=0} = \Lambda^{\varepsilon,-}\ (-1)^\nu,$$

$$c \int (y_n)^{\lambda,\nu}\ [y,s]^{\sigma,\nu}\ (r^2+1)^\lambda\ dy\Big|_{\lambda=0} = \Lambda^{\varepsilon,+}\ s_n^{\sigma,\nu}.$$

Положим здесь $s = s^+ = (1,0,...,0,1)$, мы получим

$$c \int (-y_1)^{\lambda,\nu}\ (-y_1+y_n)^{\sigma,\nu}\ (r^2+1)^\lambda\ dy\Big|_{\lambda=0} = \Lambda^{\varepsilon,-}\ (-1)^\nu,$$

$$c \int (y_n)^{\lambda,\nu}\ (-y_1+y_n)^{\sigma,\nu}\ (r^2+1)^\lambda\ dy\Big|_{\lambda=0} = \Lambda^{\varepsilon,+}.$$

Подинтегральные функции зависят только от от y_1 и y_n (поскольку $r^2 = y_1^2 - y_n^2 \pm 1$), поэтому, интегрируя по $y_2,...,y_{n-1}$, получим

$$c\ \Omega_{n-2} \int_{\mathcal{D}_\varepsilon} y_1^{\lambda,\nu}\ (-y_1+y_n)^{\sigma,\nu}\ r^{n-4}\ (r^2+1)^\lambda\ dy_1\ dy_n\Big|_{\lambda=0} = \Lambda^{\varepsilon,-},$$

$$c\ \Omega_{n-2} \int_{\mathcal{D}_\varepsilon} y_n^{\lambda,\nu}\ (-y_1+y_n)^{\sigma,\nu}\ r^{n-4}\ (r^2+1)^\lambda\ dy_1\ dy_n\Big|_{\lambda=0} = \Lambda^{\varepsilon,+},$$

где интеграл берется по области $\mathcal{D}_\varepsilon$ на плоскости переменных y_1, y_n, задаваемой неравенствами $y_1^2 - y_n^2 - 1 > 0$ для $\varepsilon =$ "$-$" и $y_1^2 - y_n^2 + 1 > 0$ для $\varepsilon =$ "$+$". Множитель r^{n-4} соответственно равен $(y_1^2 - y_n^2 - 1)^{(n-4)/2}$ для $\varepsilon =$ "$-$" и $(y_1^2 - y_n^2 + 1)^{(n-4)/2}$ для $\varepsilon =$ "$+$". Сейчас можно в интегралах положить $\lambda = 0$ и считать n комплексным числом, удовлетворяющим неравенствам $2 < \mathrm{Re}\ n < 4$. Таким образом, получаем

$$\Lambda^{--} = c\ \Omega_{n-2} \int_{\mathcal{D}_-} y_1^{\lambda,\nu}\ (-y_1+y_n)^{\sigma,\nu}\ (y_1^2 - y_n^2 - 1)^{\frac{n-4}{2}}\ dy_1\ dy_n,$$

$$\Lambda^{-+} = c\ \Omega_{n-2} \int\limits_{\mathcal{D}_-} y_n^{\lambda,\nu}\ (-y_1 + y_n)^{\sigma,\nu}\ (y_1^2 - y_n^2 - 1)^{\frac{n-4}{2}}\ dy_1\ dy_n,$$

$$\Lambda^{+-} = c\ \Omega_{n-2} \int\limits_{\mathcal{D}_+} y_1^{\lambda,\nu}\ (-y_1 + y_n)^{\sigma,\varepsilon}\ (y_1^2 - y_n^2 + 1)^{\frac{n-4}{2}}\ dy_1\ dy_n,$$

$$\Lambda^{++} = c\ \Omega_{n-2} \int\limits_{\mathcal{D}_+} y_n^{\lambda,\nu}\ (-y_1 + y_n)^{\sigma,\varepsilon}\ (y_1^2 - y_n^2 + 1)^{\frac{n-4}{2}}\ dy_1\ dy_n.$$

Здесь подинтегральные функции не изменяются при одновременном изменении знаков у y_1, y_n, поэтому интегралы можно брать по половине области $\mathcal{D}_\varepsilon$, умножив их на 2, а именно, по области $y_1 > \sqrt{y_n^2+1}$ для $\mathcal{D}_-$ и по объединению областей $|y_1| < y_n < \sqrt{y_1^2+1}$ и $|y_n| < y_1$ для $\mathcal{D}_+$. В эти три области соответственно мы вводим "полярные" координаты $y_1 = \rho\,\mathrm{ch}t,\ y_n = \rho\,\mathrm{sh}t;$ $y_1 = \rho\,\mathrm{sh}t,\ y_n = \rho\,\mathrm{ch}t;$ $y_1 = \rho\,\mathrm{ch}t,\ y_n = \rho\,\mathrm{sh}t;$ где $-\infty < t < \infty$, а переменное ρ изменяется в интервалах $\rho > 1$, $0 < \rho < 1$, $\rho > 0$, соответственно. Мы получаем

$$\Lambda^{--} = 2\ c\ \Omega_{n-2}\ (-1)^\nu \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{ch}t)^\lambda\ e^{-\sigma t}\ dt \int\limits_1^\infty \rho^{\lambda+\sigma+1}\ (\rho^2-1)^{\frac{n-4}{2}}\ d\rho,$$

$$\Lambda^{-+} = 2\ c\ \Omega_{n-2}\ (-1)^\nu \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{sh}t)^{\lambda,\nu}\ e^{-\sigma t}\ dt \int\limits_1^\infty \rho^{\lambda+\sigma+1}\ (\rho^2-1)^{\frac{n-4}{2}}\ d\rho,$$

$$\Lambda^{+-} = 2\ c\ \Omega_{n-2} \Big\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{sh}t)^{\lambda,\nu}\ e^{-\sigma t}\ dt \int\limits_0^1 \rho^{\lambda+\sigma+1}\ (1-\rho^2)^{\frac{n-4}{2}}\ d\rho +$$

$$+(-1)^\nu \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{ch}t)^\lambda\ e^{-\sigma t}\ dt \int\limits_0^\infty \rho^{\lambda+\sigma+1}\ (\rho^2+1)^{\frac{n-4}{2}}\ d\rho \Big\},$$

$$\Lambda^{++} = 2\ c\ \Omega_{n-2} \Big\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{ch}t)^\lambda\ e^{-\sigma t}\ dt \int\limits_0^1 \rho^{\lambda+\sigma+1}\ (1-\rho^2)^{\frac{n-4}{2}}\ d\rho +$$

$$+(-1)^\nu \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{sh}t)^{\lambda,\nu}\ e^{-\sigma t}\ dt \int\limits_0^\infty \rho^{\lambda+\sigma+1}\ (\rho^2+1)^{\frac{n-4}{2}}\ d\rho \Big\}.$$

Все сводится, таким образом, к пяти интегралам, выражающимся через бета-функцию:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{ch}t)^\lambda\ e^{-\sigma t}\ dt = 2^{-\lambda-1}\ B\Big(\frac{-\lambda+\sigma}{2}, \frac{-\lambda-\sigma}{2}\Big),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\text{sh}t)^{\lambda,\nu}\ e^{-\sigma t}\ dt = 2^{-\lambda-1}\ \Big\{B\Big(\frac{-\lambda+\sigma}{2},\lambda+1\Big) + (-1)^{\nu}\ B\Big(\frac{-\lambda-\sigma}{2},\lambda+1\Big)\Big\} =$$

$$= 2^{-\lambda-1}\ B\Big(\frac{-\lambda+\sigma}{2},\frac{-\lambda-\sigma}{2}\Big)\cdot(-1)^{\nu}\frac{\sin\frac{\lambda-\sigma}{2}\pi + (-1)^{\nu}\sin\frac{\lambda+\sigma}{2}\pi}{\sin\lambda\pi},$$

$$\int\limits_{0}^{1} \rho^{\lambda+\sigma+1}\ (1-\rho^2)^{\frac{n-4}{2}}\ dr = \frac{1}{2}\ B\Big(\frac{\lambda+\sigma+2}{2},\frac{n-2}{2}\Big),$$

$$\int\limits_{1}^{\infty} \rho^{\lambda+\sigma+1}\ (\rho^2-1)^{\frac{n-4}{2}}\ dr = \frac{1}{2}\ B\Big(\frac{-\lambda-n-\sigma+2}{2},\frac{n-2}{2}\Big),$$

$$\int\limits_{0}^{\infty} \rho^{\lambda+\sigma+1}\ (\rho^2+1)^{\frac{n-4}{2}}\ dr = \frac{1}{2}\ B\Big(\frac{\lambda+\sigma+2}{2},\frac{-\lambda-n-\sigma+2}{2}\Big).$$

Первый из них вычисляется с помощью [2] 1.5(26), второй – с помощью [2] 1.5(25).

Подставляя эти значения в последние выражения для $\Lambda^{\pm\pm}$ и производя преобразования с гамма-функциями и тригонометрическими функциями, мы получим (6.3)–(6.4). $\square$

Матрица M есть своего рода "собственное число" преобразования Березина $Q_{\lambda,\nu}$. Приведем некоторые свойства матрицы M (штрих означает матричную транспозицию):

$$M(-\lambda-n,\nu,\sigma)\ M(\lambda,\nu,\sigma) = E,$$
$$M(\lambda,\nu,\sigma)' = M(\lambda,\nu,2-n-\sigma).$$

Нам потребуется в § 9 вычет $\widehat{M}_m(\lambda,\nu)$ матрицы $M(\lambda,\nu,2-n-\sigma)$ в точке $\sigma=\lambda-2m$, $m\in\mathbb{N}$:

$$\widehat{M}_m(\lambda,\nu) = \frac{\widehat{\Lambda}_m(\lambda,\nu)}{\cos\frac{\lambda-\nu}{2}\pi}\begin{pmatrix} \cos\frac{\lambda+\nu}{2}\pi & (-1)^{m+1}\cos\frac{\lambda+n-\nu}{2}\pi \\ (-1)^m\cos\frac{\lambda+\nu}{2}\pi & -\cos\frac{\lambda+n-\nu}{2}\pi \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{\Lambda}_m(\lambda,\nu) &= \mathrm{Res}_{\sigma=\lambda-2m}\Lambda(\lambda,\nu,\sigma) = \\ &= \frac{2(-1)^m\Gamma\big(-\lambda+m+1-n/2\big)}{m!\Gamma\big(\frac{-\lambda-\nu+1}{2}\big)\ \Gamma\big(\frac{-\lambda-n+\nu+1}{2}\big)}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Кроме того, матрица $\widetilde{M}_m(\lambda,\nu)$, получающаяся из этой матрицы делением ее столбцов на $j^-(\lambda-2m,\nu)$, $j^+(\lambda-2m,\nu)$, соответственно, т.е матрица

$$\widetilde{M}_m(\lambda,\nu) = \mathrm{Res}_{\sigma=\lambda-2m}\left(\frac{\Lambda^{\alpha\beta}(\lambda,\nu,2-n-\sigma)}{j^{\beta}(\sigma,\nu)}\right), \tag{6.12}$$

есть (см. (2.2))

$$\widetilde{M}_m(\lambda,\nu) = (-1)^{\nu+1}\frac{\widehat{\Lambda}_m(\lambda,\nu)}{\sin\lambda\pi\cdot J(\lambda-2m)}\begin{pmatrix} 1 & (-1)^m \\ (-1)^m & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.13}$$

Теорема 6.2 *Пусть $\sigma\notin(2-n)/2+\mathbb{Z}$. Для K-финитной функции $\varphi\in\mathcal{D}(S)$ ее преобразования Пуассона имеют следующие разложения по степеням $a=[u,u]$:*

$$\begin{aligned}\left(P^{\pm}_{\lambda,\nu,\sigma}\varphi\right)(u) &= (-1)^{\nu}a_{\pm}^{(-\lambda-n-\sigma)/2}\ 2^{-\sigma/2}\sum_{m=0}^{\infty}\left(C_{\sigma,m}\varphi\right)(s)a^m + \\ &+ (-1)^{\nu}\ a_{\pm}^{(-\lambda+\sigma-2)/2}\ 2^{\sigma+n-2)/2}j^{\pm}(\sigma,\nu)\ \sum_{m=0}^{\infty}(W_{\sigma,m}\varphi)(s)a^m,\end{aligned}$$

где $u\in\Omega$ имеет полярные координаты (a,s), см. § 5, $W_{\sigma,m}$ – некоторые дифференциальные операторы (многочлены от оператора Лапласа-Бельтрами Δ_S на S степени m, см. ниже) и

$$C_{\sigma,m} = A_{2-n-\sigma}\ W_{2-n-\sigma,m}.$$

Эта теорема доказывается аналогично соответствующей теореме из [1].

Множители $a_{\pm}^{(-\lambda-n-\sigma)/2}$, $a_{\pm}^{(-\lambda+\sigma-2)/2}$ дают полюсы преобразований Пуассона в плоскости σ, зависящие от λ, они располагаются в точках

$$\sigma{=}\lambda{-}2k,\qquad \sigma{=}2{-}n{-}\lambda{+}2l,\qquad k,l\in\mathbb{N}, \tag{6.14}$$

так что $P^{\pm}$ зависят от σ мероморфно.

Полюсы преобразований Пуассона – простые, кроме случая, когда обе последовательности (6.14) пересекаются и полюс принадлежит их пересечению (в этом случае его порядок 1 или 2).

Дифференциальные операторы $W_{\sigma,m}$ определяются с помощью производящей функции:

$$V_{\sigma,l}(a) = (1+a)^{\frac{2-n-\sigma}{2}}\ F\Big(\frac{\sigma{+}n{-}2{+}l}{2},\ \frac{\sigma{+}1{-}l}{2};\ \sigma{+}\frac{n}{2};\frac{2a}{1+a}\Big)$$

где F – гипергеометрическая функция Гаусса. Разложим функцию $V_{\sigma,l}(a)$ в ряд по степеням a:

$$V_{\sigma,l}(a) = \sum_{k=0}^{\infty}\ w_k\ a^k.$$

Оказывается, что эти коэффициенты w_k являются многочленами от $\mu_l = l(3-n-l)$, коэффициенты которых являются рациональными функциями от σ:

$$w_k = w_k(\sigma,\mu_l),$$

именно,

$$\begin{aligned} w_k &= \sum_{r=0}^{k} \frac{\left(\frac{4-n-\sigma}{2}-k\right)^{[k-r]}}{2^r\ r!\ (k-r)!\ \left(\sigma+\frac{n}{2}\right)^{[r]}} \times \\ &\times \prod_{m=0}^{r-1} \left[\mu_l + (\sigma+n-2m)(\sigma+1+2m)\right], \end{aligned}$$

для $r = 0$ произведение $\prod$ считается равным 1, мы используем обозначение (вместо символа Похгаммера):

$$x^{[p]} = x(x+1)...(x+p-1).$$

Напомним, что число $\mu_l = l(3-n-l)$ является собственным значением оператора Лапласа-Бельтрами Δ_S на пространстве $H_l^{(n-1)}$, см. § 1. Положим

$$W_{\sigma,k} = w_k(\sigma, \Delta_S).$$

Как функция от σ оператор $W_{\sigma,k}$ является мероморфной функцией, с полюсами (простыми) в точках $\sigma = -m - n/2$, $0 \leqslant m \leqslant k-1$, $k \geqslant 1$. Например,

$$\begin{aligned} W_{\sigma,0} &= 1, \\ W_{\sigma,1} &= \frac{2-n-\sigma}{2\sigma+n}\left(\Delta_S + \frac{n-2}{2}\right). \end{aligned}$$

Запишем вычеты $\widehat{P}^{\pm}_{\lambda,\nu,\mu}$ преобразований Пуассона в простых полюсах μ. Оказывается, что эти вычеты являются операторами, действующими из $\mathcal{D}_\nu(S)$ в пространство $\Sigma^{(\nu)}(\Omega)$, см. § 5. Определим следующий оператор

$$\xi_{\lambda,m}(\varphi) = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r\ \frac{m!}{(m-r)!}\ W_{\lambda-2m,r}(\varphi)\ \delta^{(m-r)}(a),$$

действующий из $\mathcal{D}_\nu(S)$ в $\Sigma_m(\Omega)$. Он сплетает представление $T_{2-n-\lambda+2m}$ с представлением L_λ:

$$\xi_{\lambda,m} \circ T_{2-n-\lambda+2m} = L_\lambda \circ \xi_{\lambda,m}.$$

Для $m \geqslant 1$ он зависит от λ мероморфно – с простыми полюсами в точках $\lambda = m + r + (2-n)/2$, $r = 0, 1, ..., m-1$. В частности,

$$\xi_{\lambda,0}(\varphi) = \delta(a).$$

Теперь в соответствии с § 5 определим операторы $\xi^{(\nu)}_{\lambda,m} : \mathcal{D}(S) \to \Sigma^{(\nu)}_m(\Omega)$:

$$\xi^{(\nu)}_{\lambda,m}(\varphi) = \left(\xi_{\lambda,m}(\varphi)\right)^{(\nu)},$$

так что

$$\langle \xi^{(\nu)}_{\lambda,m}(\varphi), f\rangle_\Omega = 2^{(2-n)/2}\ (-1)^m\ m!\ \sum_{r=0}^{m} \langle W_{\lambda-2m,r}(\varphi), c^*_m\rangle_S.$$

Через них выражаются вычеты преобразований Пуассона:

$$\begin{aligned}
\widehat{P}^{\pm}_{\lambda,\nu,\lambda-2k}(\varphi) &= 2^{(\lambda+n-2k)/2}\,(\mp 1)^k\,(-1)^\nu\,\frac{1}{k!}\,j^{\pm}(\lambda-2k,\nu)\,\xi^{(\nu)}_{\lambda,k}(\varphi),\\
\widehat{P}^{\pm}_{\lambda,\nu,2-n-\lambda+2l} &= -2^{(\lambda+n-2l)/2}\,(\mp 1)^l\,(-1)^\nu\,\frac{1}{l!}\,\xi^{(\nu)}_{\lambda,l}\big(A_{\lambda-2l}(\varphi)\big).
\end{aligned}$$

§ 7. Преобразования Фурье

Преобразования Фурье $F^{\pm}_{\lambda,\nu,\sigma}$, *связанные с каноническим представлением* $R_{\lambda,\nu}$, определяются как операторы, сопряженные преобразованиям Пуассона, они имеют такие же ядра (с заменой λ на $-\lambda-n$), именно, $F^{\pm}_{\lambda,\nu,\sigma}$ есть оператор $\mathcal{D}_\nu(\Omega)\to\mathcal{D}(S)$, определяемый формулой

$$\left(F^{\pm}_{\lambda,\nu,\sigma}f\right)(s)=\int_\Omega [u,s]^{\sigma,\nu}\;\;[u,u]_{\pm}^{(\lambda-\sigma)/2}\,f(u)\,du.$$

Фактически интегрирование ведется по $\Omega_\pm$. Интегралы сходятся абсолютно для $\mathrm{Re}\,(\lambda+\sigma+n)>0$, $\mathrm{Re}\,(\lambda-\sigma+2)>0$ и распространяются мероморфно по λ и σ.

Преобразование Фурье $F^{\pm}_{\lambda,\nu,\sigma}$ сплетает $R_{\lambda,\nu}$ с T_σ:

$$F^{\pm}_{\lambda,\nu,\sigma}\,R_{\lambda,\nu}(g)=T_\sigma(g)\,F^{\pm}_{\lambda,\nu,\sigma},\qquad g\in G.$$

Сопряженность

$$\langle F^{\pm}_{\lambda,\nu,\sigma}f,\varphi\rangle_S=\langle f,P^{\pm}_{-\overline{\lambda}-n,\nu,\overline{\sigma}}\varphi\rangle_\Omega$$

с преобразованием Пуассона позволяет перенести утверждения для преобразования Пуассона на преобразование Фурье. Например,

$$A_\sigma\,F^{\pm}_{\lambda,\nu,\sigma}=j^{\pm}(\sigma,\nu)\,F^{\pm}_{\lambda,\nu,2-n-\sigma}$$

и

$$\begin{aligned}
F^{-}_{-\lambda-n,\nu,\sigma}\,Q_{\lambda,\nu}&=\Lambda^{--}(\lambda,\nu,\sigma)\,F^{-}_{\lambda,\nu,\sigma}+\Lambda^{-+}(\lambda,\nu,\sigma)\,F^{+}_{\lambda,\nu,\sigma},\\
F^{+}_{-\lambda-n,\nu,\sigma}\,Q_{\lambda,\nu}&=\Lambda^{+-}(\lambda,\nu,\sigma)\,F^{-}_{\lambda,\nu,\sigma}+\Lambda^{++}(\lambda,\nu,\sigma)\,F^{+}_{\lambda,\nu,\sigma}.
\end{aligned}$$

Преобразование Фурье $F^{\pm}_{\lambda,\nu,\sigma}$ имеет полюсы в точках

$$\sigma=-\lambda-n-2k,\qquad \sigma=\lambda+2+2l,\qquad k,l\in\mathbb{N}. \tag{7.1}$$

Полюсы простые, если последовательности (7.1) не пересекаются.

Запишем вычеты $\widehat{F}^{\pm}_{\lambda,\nu,\mu}$ в простых полюсах μ. Для этого определим "граничные" операторы $b_{\lambda,m}:\;\;\mathcal{D}_\nu(\Omega)\to\mathcal{D}(S)$, используя коэффициенты Тейлора c^*_k, см. § 5:

$$b_{\lambda,m}(f)=\sum_{r=0}^{m}W_{-\lambda-n-2m,r}(c^*_{m-r}).$$

Эти граничные операторы и операторы ξ сопряжены:

$$\langle \xi^{(\nu)}_{-\lambda-n,m}(\varphi), f\rangle_\Omega = 2^{(2-n)/2}(-1)^m\ m!\ \langle \varphi, b_{\overline{\lambda},m}(f)\rangle_S. \qquad (7.2)$$

Оператор $b_{\lambda,m}$ сплетает представления $R_{\lambda,\nu}$ и $T_{-\lambda-n-2m}$:

$$b_{\lambda,m}\ R_{\lambda,\nu}(g) = T_{-\lambda-n-2m}(g)\ b_{\lambda,m}, \quad g\in G,$$

он мероморфен по λ с простыми полюсами в точках $\lambda = -(n/2) - m - r - 1$, $r = 0, 1, \ldots, m-1$.

Вычеты преобразования Фурье выражаются через граничные операторы:

$$\begin{aligned}\widehat{F}^{\pm}_{\lambda,\nu,-\lambda-n-2k} f &= 2^{(2-n-\lambda-2k)/2}\ (\pm 1)^k\ (-1)^\nu\ j^{\pm}\ (-\lambda-n-2k,\nu)\ b_{\lambda,k}(f),\\ \widehat{F}^{\pm}_{\lambda,\nu,\lambda+2+2l} f &= -2^{(2-n\lambda-2l)/2}\ (\pm 1)^l\ (-1)^\nu\ A_{-\lambda-n-2l}\ b_{\lambda,l}(f).\end{aligned}$$

§ 8. Преобразования Пуассона и Фурье в полюсах друг друга

Преобразования Пуассона и Фурье в полюсах друг друга имееют некоторые специальные свойства.

Сначала рассмотрим преобразования Пуассона

$$P^{\pm}_{\lambda,\nu,-\lambda-n-2m}, \qquad P^{\pm}_{\lambda,\nu,\lambda+2+2m}.$$

Разложение этих преобразований по степеням a имеет ведущие множители $a_\pm^m$ и $a_\pm^{-\lambda-1-m-n/2}$. Следовательно, для $\mathrm{Re}\,\lambda < -2k-1-n/2$ одно из двух слагаемых в разложении преобразований (8.1), которое содержит $a_\pm^{-\lambda-1-m-n/2}$, есть $o(a^k)$ при $a\to 0$. Поэтому мы будем рассматривать следующую линейную комбинацию преобразований Пуассона

$$P^{(m)}_{\lambda,\nu} = P^{+}_{\lambda,\nu,-\lambda-n-2m} + (-1)^m P^{-}_{\lambda,\nu,-\lambda-n-2m}.$$

Для этого преобразования ведущие множители – это многочлен(!) a^m и $a_\pm^{-\lambda-1-m-n/2}$. Следовательно, для $\mathrm{Re}\,\lambda < -2k-1-n/2$ и $m = 0, 1, \ldots, k$ разложение преобразования $P^{(m)}_{\lambda,\nu}$ есть

$$\big(P^{(m)}_{\lambda,\nu}\varphi\big)(s) = (-1)^\nu 2^{(\lambda+n+2m)/2}\ a^m\ \sum_{r=0}^{\infty}\big(C_{-\lambda-n-2m,r}\varphi\big)(s)\ a^r + o(a^k).$$

Напомним, что $C_{\sigma,0} = A_{2-n-\sigma}$. Следовательно, мы можем применить к $P^{(m)}_{\lambda,\nu}\varphi$ граничные операторы $b_{\lambda,m}$, $0\leqslant m\leqslant k$.

Теорема 8.1 *Пусть $k\in\mathbb{N}$. Пусть $\mathrm{Re}\,\lambda < -2k-1-n/2$. Тогда для $m\leqslant k$ мы имеем*

$$b_{\lambda,m}\big(P^{(m)}_{\lambda,\nu}\varphi\big) = (-1)^\nu\ 2^{(\lambda+n+2m)/2} A_{\lambda+2+2m}\varphi,$$

и для $r, m\leqslant k$, $\neq m$, имеем

$$b_{\lambda,r}\big(P^{(m)}_{\lambda,\nu}\varphi\big) = 0.$$

При тех же условиях, что и в теореме 8.1, мы можем применить обобщенные функции из $\Sigma_k^{(\nu)}(\Omega)$ к образам преобразований Пуассона, участвующим в теореме 8.1. Используя соотношение дуальности (7.2), получим

Теорема 8.2 *Пусть $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\operatorname{Re}\lambda < -2k-1-n/2$. Пусть $r, m \leqslant k$. Тогда имеют место следующие "соотношения ортогональности":*

$$\begin{aligned}\langle \xi^{(\nu)}_{-\lambda-n,m}(\psi), P^{(m)}_{\bar\lambda,\nu}\varphi\rangle_\Omega &= (-1)^{\nu+m}\, 2^{(\lambda+n+2m)/2}\, m!\, \langle A_{\lambda+2+2m}\psi, \varphi\rangle_S,\\ \langle \xi^{(\nu)}_{-\lambda-n,r}(\psi), P^{(m)}_{\bar\lambda,\nu}\varphi\rangle_\Omega &= 0, \quad r\neq m.\end{aligned}$$

Это позволяет (снова используем (7.2)) распространить преобразование Фурье

$$F^{(m)}_{\lambda,\nu} = F^{+}_{\lambda,\nu,\lambda-2m} + (-1)^m F^{-}_{\lambda,\nu,\lambda-2m}$$

на обобщенные функции $\zeta\in\Sigma_k^{(\nu)}(\Omega)$, $m\leqslant k$. Именно, для $\operatorname{Re}\lambda > 2k+1-n/2$ (мы заменяем λ на $-\lambda-n$) мы полагаем:

$$\langle F^{(m)}_{\lambda,\nu}\zeta, \varphi\rangle_S = \langle \zeta, P^{(m)}_{-\bar\lambda-n,\nu}\varphi\rangle_\Omega.$$

Тогда теорема 8.2 влечет

Теорема 8.3 *Пусть $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\operatorname{Re}\lambda > 2k+1-n/2$. Пусть $r, m \leqslant k$. Преобразования Фурье $F^{(m)}_{\lambda,\nu}$ являются "обратными" отображениями к $\xi_{\lambda,m}$ с точностью до оператора A_σ, а именно, имеют место следующие соотношения*

$$\begin{aligned}F^{(m)}_{\lambda,\nu}\xi^{(\nu)}_{\lambda,m}(\psi) &= (-1)^{\nu+m}\, m!\, 2^{(2-n-\lambda+2m)/2}\, A_{2-n-\lambda+2m}\, \psi,\\ F^{(m)}_{\lambda,\nu}\xi^{(\nu)}_{\lambda,r}(\psi) &= 0, \quad r\neq m.\end{aligned}$$

Эти формулы показывают, что отображения $F^{(m)}_{\lambda,\nu}$, определенные первоначально как отображения $\Sigma_k^{(\nu)}(\Omega) \to \mathcal{D}'(S)$, на самом деле – отображения $\Sigma_k^{(\nu)}(\Omega) \to \mathcal{D}(S)$.

Преобразования $P^{(m)}_{\lambda,\nu}$ появляются также при взаимодействии оператора $\xi^{(\nu)}_{\lambda,m}$ и преобразования Березина.

Теорема 8.4 *Имеют место следующие формулы*

$$Q_{\lambda,\nu}\, \xi^{(\nu)}_{\lambda,m}\varphi = K^{(\nu)}_{\lambda,m}\, P^{(m)}_{-\lambda-n,\nu}\,\varphi, \tag{8.1}$$

$$Q_{\lambda,\nu}\, P^{(m)}_{\lambda,\nu}\,\varphi = L^{(\nu)}_{\lambda,m}\,\xi^{(\nu)}_{-\lambda-n,m}(\varphi), \tag{8.2}$$

множители $K^{(\nu)}_{\lambda,m}$ и $L^{(\nu)}_{\lambda,m}$ даются формулами:

$$\begin{aligned}K^{(\nu)}_{\lambda,m} &= 2^{(\lambda+2-n-2m)/2}\, \pi^{(2-n)/2}\, \frac{\Gamma(-\lambda+2m)\,\Gamma\big(-\lambda+m+1-n/2\big)}{\Gamma\big(-\lambda+2m+1-n/2\big)} \times\\ &\times \Big\{\Gamma\big(\frac{-\lambda-\nu+1}{2}\big)\,\Gamma\big(\frac{-\lambda-n+\nu+1}{2}\big)\Big\}^{-1},\\ L^{(\nu)}_{\lambda,m} &= 2^{(\lambda/2)+n+m-1}\, \pi^{(n-2)/2}\, \frac{\Gamma(\lambda+2m+1+n/2)}{\Gamma(\lambda+n+2m)\,\Gamma(\lambda+m+1+n/2)} \times\\ &\times \Gamma\Big(\frac{\lambda+n-\nu+1}{2}\Big)\,\Gamma\Big(\frac{\lambda+\nu+1}{2}\Big).\end{aligned}$$

Доказательство. Возьмем вычет в точке $\sigma=\lambda-2m$ для любой из двух формул (6.1) и (6.2), мы получим (8.1). Коэффициент $K^{(\nu)}_{\lambda,m}$ равен (в обоих случаях получаем одно и то же):

$$\begin{aligned}&\big\{2^{(\lambda+n-2m)/2}(\mp 1)^m\,(-1)^\nu\,\frac{1}{m!}\,j^\pm(\lambda-2m,\nu)\big\}^{-1}\cdot\mathrm{Res}_{\sigma=\lambda-2m}\Lambda^{\pm,+}=\\&=2^{(-\lambda-n+2m)/2}(-1)^{m+1}\,m!\big\{\sin\lambda\pi\cdot J(\lambda-2m)\big\}^{-1}\cdot\widehat{\Lambda}_m(\lambda,\nu),\end{aligned}$$

где $\widehat{\Lambda}_m(\lambda,\nu)$ дается формулой (6.11). Подставляя сюда (2.2) и (6.11), получим коэффициент K.

Применим к (8.1) оператор $Q_{-\lambda-n,\nu}$. В силу (4.4) получим (8.2) с заменой λ на $-\lambda-n$. Множитель $L^{(\nu)}_{\lambda,m}$ равен $\{K^{(\nu)}_{-\lambda-n,m}\}^{-1}$. $\square$

§ 9. Разложение канонических представлений

Для прозрачности изложения мы ограничимся общим случаем: λ лежит в полосах

$$I_k:\quad \frac{-n-2}{2}+2k<\mathrm{Re}\,\lambda<\frac{2-n}{2}+2k,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Случай (A): $\lambda\in I_0$

Мы рассуждаем аналогично [5]. Пусть $f\in\mathcal{D}_{-\lambda-n,\nu}(\mathbb{R}^n)$, $h\in\mathcal{D}_{\overline{\lambda},\nu}(\mathbb{R}^n)$. Тогда, ограничивая f и h на $\mathcal{Y}^+$, получаем f и h из $L^2(\mathcal{Y}^+,dy)$, а каноническое представление становится представлением $U_{\mathcal{Y}^+}$. Используя формулу Планшереля для $\mathcal{Y}^+$, см. § 2, получим следующее разложение ограничения функций f и h на Ω:

$$\langle f,h\rangle_\Omega=\int_{-\infty}^{\infty}\omega(\sigma)\,\langle F^-_{\lambda,\nu,\sigma}f,F^-_{-\overline{\lambda}-n,\nu,2-n-\overline{\sigma}}h\rangle_S\,d\rho.$$

Здесь и дальше все интегралы с σ берутся при $\sigma=(2-n)/+i\rho$, $\rho\in\mathbb{R}$.

Теперь, используя сопряженность из § 7, перебросим преобразование Фурье с h на f как преобразование Пуассона. Получим:

$$\langle f,h\rangle_\Omega=\int_{-\infty}^{\infty}\omega(\sigma)\,\langle P^-_{\lambda,\nu,2-n-\sigma}\,F^-_{\lambda,\nu,\sigma}f,h\rangle_\Omega\,d\rho.$$

Эта формула дает разложение функции f как обобщенной функции из $\mathcal{D}'_\nu(\Omega)$:

$$f(u)=\int_{-\infty}^{\infty}\omega(\sigma)\,\big(P^-_{\lambda,\nu,2-n-\sigma}\,F^-_{\lambda,\nu,\sigma}f\big)(u)\,d\rho,\quad u\in\Omega_-.\tag{9.1}$$

Аналогично, используя ограничение функций f,h на $\mathcal{X}$, получим следующее разложение:

$$\begin{aligned}f(u)&=\int_{-\infty}^{\infty}\omega(\sigma)\,\big(P^+_{\lambda,\nu,2-n-\sigma}\,F^+_{\lambda,\nu,\sigma}f\big)(u)\,d\rho+\\&+\sum\omega^{(d)}_r\,\big(\widetilde{P}^+_{\lambda,\nu,2-n-r}\,\widetilde{F}^+_{\lambda,\nu,r}f\big)(u),\quad u\in\Omega_+,\end{aligned}\tag{9.2}$$

где суммирование берется по целым $r > (2-n)/2$ таким, что $r{\equiv}\nu+1$, волна над P и F означает, что эти преобразования соответствуют нормализованному H-инварианту

$$\widetilde{\theta}_{\sigma,\nu} = \Gamma\Big(\frac{\sigma+\nu+1}{2}\Big)^{-1}\,\theta_{\sigma,\nu}.$$

Объединяя формулы (9.1) и (9.2), получим разложение функции $f(u)$ на всей сфере Ω:

$$\begin{aligned} f \;&=\; \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\sigma)\,\big\{P^-_{\lambda,\nu,2-n-\sigma}\,F^-_{\lambda,\nu,\sigma}f + P^+_{\lambda,\nu,2-n-\sigma}\,F^+_{\lambda,\nu,\sigma}f\big\}\,d\rho\,+ \\ &+\; \sum \omega_r^{(d)}\,\widetilde{P}^+_{\lambda,\nu,2-n-r}\,\widetilde{F}^+_{\lambda,\nu,r}f. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Теперь разложим форму Березина

$$\mathcal{B}_{\lambda,\nu}(f,h) = \langle Q_{\lambda,\nu}f,h\rangle_\Omega = \langle f, Q_{\overline{\lambda},\nu}h\rangle_\Omega.$$

Пусть $f{\in}\mathcal{D}_{-\lambda-n,\nu}(\mathbb{R}^n)$, $h{\in}\mathcal{D}_{-\overline{\lambda}-n,\nu}(\mathbb{R}^n)$. Тогда ограничения функций f, h на $\mathcal{Y}^+$ и $\mathcal{X}$ принадлежит $L^2(\mathcal{Y}^+,dy)$ и $L^2(\mathcal{X},dx)$, соответственно. Используя формулу (10.3) и формулы для композиции QP, см. § 6, получим разложение для $f,h\in\mathcal{D}_\nu(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\lambda,\nu}(f,h) \;&=\; \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\sigma)\sum_{\alpha,\beta}\Lambda^{\alpha,\beta}(\lambda,\nu,2-n-\sigma)\,\langle F^\alpha_{\lambda,\nu,\sigma}f,\; F^\beta_{\overline{\lambda},\nu,2-n-\overline{\sigma}}h\rangle_S\,d\rho\,+ \\ &+\; \sum \omega_r^{(d)}\,\Lambda^{++}(\lambda,\nu,2-n-r)\,\langle \widetilde{F}^+_{\lambda,\nu,r}f,\; \widetilde{F}^+_{\overline{\lambda},\nu,2-n-r}h\rangle_S, \end{aligned} \tag{9.4}$$

где $\alpha,\beta\in\{-,+\}$. Заметим, что $\Lambda^{-+}(\lambda,\nu,2-n-r)$ обращается в нуль при $r{\equiv}\nu{+}1$.

Таким образом, в случае (A) имеем

Теорема 9.1 *Пусть $\lambda\in I_0$. Тогда каноническое представление $R_{\lambda,\nu}$ разлагается в прямой интеграл представлений T_σ непрерывной серии с кратностью 2 и представлений расширенной дискретной серии $T_r^{(d)}$, $r{\in}\mathbb{N}$ и T_r, $(2{-}n)/2 < r < 0$, $r{\in}\mathbb{Z}$, с $r{\equiv}\nu{+}1$, с кратностью 1. А именно, сопоставим функции $f{\in}\mathcal{D}_\nu(\Omega)$ совокупность ее компонент Фурье $F^\pm_{\lambda,\nu,\sigma}f$, $\sigma=(2{-}n)/2{+}i\rho$; $F^+_{\lambda,\nu,r}f$, $(2{-}n)/2 < r < 0$, $r\in\mathbb{Z}$; $\widetilde{F}^+_{\lambda,\nu,r}f$, $r{\in}\mathbb{N}$, $r{\equiv}\nu{+}1$. Это соответствие G-эквивариантно. Имеет место формула обращения (9.3) и "формула Планшереля" (9.4) для формы Березина.*

Случай (B): $\lambda\in I_{k+1},\quad k\in\mathbb{N}$

Продолжим разложение (9.3) аналитически по λ из I_0 в I_{k+1}, $k\in\mathbb{N}$. Некоторые полюсы по σ подинтегрального выражения пересекают линию интегрирования – прямую $\mathrm{Re}\,\sigma=(2-n)/2$. Это – полюсы $\sigma=\lambda-2m$ и $\sigma=2-n-\lambda+2m$, $m=0,1,...,k$, преобразований Пуассона $P^\pm_{\lambda,\nu,2-n-\sigma}$. Они дают дополнительные слагаемые в правой части. Пары полюсов $(\lambda{-}2m, 2{-}n{-}\lambda{+}2m)$ дает дополнительный член, равный умноженному на 4π вычету подинтегральной функции в точке $\sigma=\lambda-2m$. После продолжения получим:

$$f=\int_{-\infty}^{\infty}+\sum_r+\sum_{m=0}^{k}\pi_{\lambda,\nu,m}(f), \tag{9.5}$$

где интеграл и ряд означают то же, что и в (9.3), и

$$\pi_{\lambda,\nu,m}(f)=-4\pi\ \omega(\lambda-2m)\ \big\{\widehat{P}^{-}_{\lambda,\nu,2-n-\lambda+2m}F^{-}_{\lambda,\nu,\lambda-2m}f+\widehat{P}^{+}_{\lambda,\nu,2-n-\lambda+2m}F^{+}_{\lambda,\nu,\lambda-2m}f\big\}.$$

Используя формулы для вычетов преобразований Пуассона, получим

$$\begin{aligned}\pi_{\lambda,\nu,m}(f) &= 4\pi\ \omega(\lambda-2m)\ (-1)^{\nu+m}\frac{1}{m!}\ 2^{(\lambda+n-2m)/2}\times\\ &\times\ \xi^{(\nu)}_{\lambda,m}\Big(A_{\lambda-2m}\big(F^{(m)}_{\lambda,\nu}f\big)\Big)\end{aligned}$$

Образ оператора $\pi_{\lambda,\nu,m}$ совпадает с образом $V^{(\nu)}_{\lambda,m}$ оператора $\xi^{(\nu)}_{\lambda,m}$.

Продолжим теперь (9.4) в I_{k+1}. Сейчас полюсы $\sigma=\lambda-2m$ и $\sigma=2-n-\lambda+2m$, $m=0,1,...,k$, подинтегральной функции – это полюсы множителей $\Lambda^{\alpha,\beta}(\lambda,\nu,\sigma)$. После продолжения получим:

$$\mathcal{B}_{\lambda,\nu}(f,h)=\int_{-\infty}^{\infty}+\sum_r+\sum_{m=0}^{k}\sum_{\alpha,\beta}T^{\alpha,\beta}_m(\lambda,\nu)\langle A_{\lambda-2m}F^{\alpha}_{\lambda,\nu,\lambda-2m}f,\ F^{\beta}_{\bar\lambda,\nu,\bar\lambda-m}h\rangle_S, \tag{9.6}$$

где интеграл и ряд означают то же, что и в (9.4),

$$T^{\alpha,\beta}_m(\lambda,\nu)=\frac{4\pi\ \omega(\lambda-2m)}{j^{\beta}(\lambda-2m,\nu)}\ \mathrm{Res}_{\sigma=\lambda-2m}\Lambda^{\alpha\beta}(\lambda,\nu,2-n-\sigma)$$

Вспоминая выражения (6.12), (6.13) и подставляя их в (9.6), получим

$$\mathcal{B}_{\lambda,\nu}(f,h)=\int_{-\infty}^{\infty}+\sum_r+\sum_{m=0}^{k}T(\lambda,\nu,m)\langle A_{\lambda-2m}F^{(m)}_{\lambda,\nu}f,\ F^{(m)}_{\bar\lambda,\nu}h\rangle_S, \tag{9.7}$$

где интеграл и ряд означают то же, что и в (9.4),

$$\begin{aligned}T(\lambda,\nu,m) &= 4\pi\ \omega(\lambda-2m)(-1)^{\nu+1}\frac{\widehat{\Lambda}_m(\lambda,\nu)}{\sin\lambda\pi\cdot J(\lambda-2m)}=\\ &= 4\pi\ \omega(\lambda-2m)(-1)^{\nu+m}\cdot 2^{\lambda-2m+1}\cdot\pi^{(2-n)/2}\times\\ &\times\ \frac{\Gamma(-\lambda+2m)\ \Gamma\big(-\lambda+m+1-n/2\big)}{\Gamma\big(-\lambda+2m+1-n/2\big)\ \Gamma\big(\frac{-\lambda-\nu+1}{2}\big)\ \Gamma\big(\frac{-\lambda-n+\nu+1}{2}\big)}.\end{aligned}$$

Заметим, что эта "мера Планшереля" $T(\lambda,\nu,m)$ только множителем отличается от $\omega(\lambda-2m)K^{(\nu)}_{\lambda,m}$.

Оператор $\pi^{\pm}_{\lambda,\nu,m}$, $m\leqslant k$, можно распространить из $\mathcal{D}_\nu(\Omega)$ на пространство $\Sigma^{(\nu)}_k(\Omega)$, потому что преобразования Фурье, участвующие в этих операторах, уже распространено, см. § 8. Таким образом, операторы $\pi_{\lambda,\nu,m}$ с $m\leqslant k$ определены на пространстве

$$\mathcal{D}_{\nu,k}(\Omega)=\mathcal{D}_\nu(\Omega)+\Sigma^{(\nu)}_k(\Omega).$$

Теорема 9.2 *Операторы $\pi_{\lambda,\nu,m}$, $m \leqslant k$, действующие на пространстве $\mathcal{D}_\nu^k(\Omega)$, являются проекционными операторами, проектирующими на пространства $V_{\lambda,m}$, т.е. имеют место соотношения:*

$$\pi_{\lambda,\nu,m}\ \pi_{\lambda,\nu,m} = \pi_{\lambda,\nu,m},$$

$$\pi_{\lambda,\nu,m}\ \pi_{\lambda,\nu,r} = 0, \quad m{\neq}r.$$

Кроме того, на этом пространстве $\mathcal{D}_\nu^k(\Omega)$ определена форма Березина $\mathcal{B}_{\lambda,\nu}$, и имеют место "соотношения ортогональности":

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{\lambda,\nu}\big(\pi_{\lambda,\nu,m}(f), \pi_{\overline{\lambda},\nu,m}(h)\big) &= T(\lambda,\nu,m)\langle A_{\lambda-2m}F_{\lambda,\nu}^{(m)}f,\ F_{\overline{\lambda},\nu}^{(m)}h\rangle_S,\\ \mathcal{B}_{\lambda,\nu}\big(\pi_{\lambda,\nu,m}(f), \pi_{\overline{\lambda},\nu,r}(h)\big) &= 0, \quad m{\neq}r.\end{aligned}$$

Эта теорема вытекает из результатов § 8.

В частности, для обобщенной функции $f \in \Sigma_k^{(\nu)}(\Omega)$ получаем ее разложение по ее проекциям на пространства $V_{\lambda,m}$, $m{\leqslant}k$:

$$f = \sum_{m=0}^{k} \pi_{\lambda,\nu,m}(f).$$

Итак, в случае (В) имеем

Теорема 9.3 *Пусть $\lambda{\in}I_{k+1}$, $k{\in}\mathbb{N}$. Тогда пространство $\mathcal{D}_\nu(\Omega)$ нужно дополнить до пространства $\mathcal{D}_{\nu,k}(\Omega) = \mathcal{D}_\nu(\Omega){+}\sum_k^{(\nu)}(\Omega)$. В этом пространстве представление $R_{\lambda,\nu}$ раскладывается в сумму двух слагаемых: первое разлагается как $R_{\lambda,\nu}$ в случае (A), второе разлагается в сумму $k{+}1$ неприводимых представлений $T_{2-n-\lambda+2m}$, $m{=}0,1,...,k$. Имеет место формула обращения, см. (9.5), и "формула Планшереля" для формы Березина, см. (9.7).*

Как следует из соотношений ортогональности (теорема 9.2), формула (9.7) есть "теорема Пифагора" для (9.5).

Случай (С): $\lambda \in I_{-k-1}$, $k \in \mathbb{N}$

Продолжим разложение (9.3) аналитически по λ из I_0 в I_{-k-1}, $k \in \mathbb{N}$. Здесь полюсы $\sigma = \lambda + 2 + 2m$ и $\sigma = -\lambda - n - 2m$, $m = 0,1,...,k$, подинтегральной функции (это – полюсы преобразований Фурье $F_{\lambda,\nu,\sigma}^{\pm}$) дают добавочные слагаемые в правой части:

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} + \sum_r + \sum_{m=0}^{k} \Pi_{\lambda,\nu,m}(f), \tag{9.8}$$

где интеграл и ряд означают то же, что и в (9.3), и

$$\begin{aligned}\Pi_{\lambda,\nu,m}(f) &= (-1)^\nu\, 4\pi\ \omega(\lambda+2+2m)\ \cdot 2^{2-n-\lambda-2m)/2} \times\\ &\times\ P_{\lambda,\nu}^{(m)}(A_{-\lambda-n-2m}b_{\lambda,m}(f))\end{aligned} \tag{9.9}$$

В самом деле, пара полюсов $(\lambda-2m, 2-n-\lambda+2m)$ при пересечении линии интегрирования дает дополнительный член, равный умноженному на -4π вычету подинтегральной функции в точке $\sigma=\lambda+2+2m$, а именно,

$$-4\pi\ \omega(\lambda+2+2m)\ \left\{P^-_{\lambda,\nu,-\lambda-n-2m}\widehat{F}^-_{\lambda,\nu,\lambda+2+2m}f+P^+_{\lambda,\nu,-\lambda-n-2m}\widehat{F}^+_{\lambda,\nu,\lambda+2+2m}f\right\}.$$

Подставляя сюда выражения для полюсов преобразований Фурье, получим (9.9).

Оператор $\Pi_{\lambda,\nu,m}$ сплетает $T_{\lambda+2+2m}\ R_{\lambda,\nu}$. Обозначим через $W_{\lambda,\nu,m}$ образ пространства $\mathcal{D}_\nu(\Omega)$ под действием преобразования $\Pi_{\lambda,\nu,m}$. Операторы $\Pi_{\lambda,m}$ с $m\leqslant k$ можно распространить на пространство $\mathcal{T}^k_\nu(\Omega)$, поскольку операторы $b_{\lambda,m}$ с $m\leqslant k$ определены на этом пространстве. В частности, можно применить $\Pi_{\lambda,m}$ к $W_{\lambda,\nu,r}$, $r\leqslant k$, и мы вправе рассматривать произведения $\Pi_{\lambda,\nu,m}\Pi_{\lambda,\nu,r}$, где $m,r\leqslant k$. Следующая теорема доказывается с помощью теорем § 8.

Теорема 9.4 *Операторы $\Pi_{\lambda,\nu,m}$, $m\leqslant k$, являются проекторами на $\mathcal{P}_{\lambda,m}$, а именно, имеют место соотношения:*

$$\begin{aligned}\Pi_{\lambda,\nu,m}\Pi_{\lambda,\nu,m} &= \Pi_{\lambda,\nu,m},\\ \Pi_{\lambda,\nu,m}\Pi_{\lambda,\nu,r} &= 0,\ r\neq m.\end{aligned}$$

Кроме того, имеют место "соотношения ортогональности":

$$\mathcal{B}_{\lambda,\nu}(\Pi_{\lambda,\nu,m}(f),\Pi_{\overline{\lambda},\nu,m}(h))=N(\lambda,\nu,m)\langle A_{-\lambda-n-2m}b_{\lambda,m}(f),b_{\overline{\lambda},m}(h)\rangle_S,$$
$$\mathcal{B}_{\lambda,\nu}(\Pi_{\lambda,\nu,m}(f),\Pi_{\overline{\lambda},\nu,r}(h))=0,\ r\neq m,$$

где

$$\begin{aligned}N(\lambda,\nu,m) &= (-1)^{\nu+m}\ 2^{2-n}\ \pi^{-n/2}\ m!\cdot\sin\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\pi\times\\ &\times\ \frac{\Gamma(\lambda+2m+2+n/2)\ \Gamma(-\lambda-2-2m)}{\Gamma(\lambda+m+1+n/2)}\times\\ &\times\ \Gamma\left(\frac{\lambda+n-\nu+1}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{\lambda+\nu+1}{2}\right).\end{aligned}\tag{9.10}$$

Теперь продолжим (9.4) из I_0 в I_{-k-1}.

Теорема 9.5 *Для $\lambda\in I_{-k-1}$, $k\in\mathbb{N}$, форма Березина раскладывается следующим образом*

$$\mathcal{B}_{\lambda,\nu}(f,h)=\int_{-\infty}^{\infty}+\sum_r+\sum_{m=0}^{k}N(\lambda,\nu,m)\langle A_{-\lambda-n-2m}b_{\lambda,m}(f),b_{\overline{\lambda},m}(h)\rangle_S,\tag{9.11}$$

где интеграл и ряд означают то же, что и в (9.4), $N(\lambda,\nu,m)$ дается формулой (9.10).

Доказательство. Здесь полюсы $\sigma=\lambda+2+2m$ и $\sigma=-\lambda-n-2m$, $m=0,1,...,k$, подинтегральной функции оказываются полюсами обоих преобразований Фурье, так что каждое из четырех слагаемых ($\alpha, \beta \in \{+,-\}$) имеет полюс второго порядка. К счастью, вся сумма этих четырех слагаемых имеет полюс только первого порядка (старшие лорановские коэффициенты взаимно уничтожаются) и вычет получается в обозримом виде. Покажем это.

Пара полюсов ($\lambda+2+2m, -\lambda-n-2m$) при пересечении линии интегрирования дает в правой части (9.4) дополнительное слагаемое D_m, равное умноженному на -4π вычету подинтегральной функции в точке $\sigma = \lambda + 2 + 2m$, а именно,

$$\begin{aligned} D_m &= -4\pi\, \omega(\lambda+2+2m) \mathrm{Res}_{\sigma=\lambda+2+2m} \sum_{\alpha,\beta} \Lambda^{\alpha,\beta}(\lambda,\nu,2-n-\sigma) \times \\ &\times \ \left\langle F^{\alpha}_{\lambda,\nu,2-n-\sigma} f, F^{\beta}_{\overline{\lambda},\nu,2-n-\overline{\sigma}} h \right\rangle_S \end{aligned} \tag{9.12}$$

Сумму $\sum\limits_{\alpha,\beta}$ в (9.12) в соответствии с (6.3) запишем так (для краткости не будем писать λ, ν в индексах):

$$\begin{aligned} &\frac{\Lambda(\lambda,\nu,\sigma)}{\cos\frac{\lambda-\nu}{2}\pi} \Big\{ \Big\langle \cos\frac{\lambda+\nu}{2}\pi \cdot F^-_\sigma f + \cos\frac{\sigma+\nu}{2}\pi \cdot F^+_\sigma f,\ F^-_{2-n-\overline{\sigma}} h \Big\rangle_S + \\ &+ \Big\langle -\cos\frac{\sigma+n-\nu}{2}\pi \cdot F^-_\sigma f - \cos\frac{\lambda+n-\nu}{2}\pi \cdot F^+_\sigma f,\ F^+_{2-n-\overline{\sigma}} h \Big\rangle_S \Big\}. \end{aligned} \tag{9.13}$$

Разложим в ряд Лорана преобразования Фурье $F^{\pm}_\sigma f$ и $F^{\pm}_{2-n-\sigma} \overline{h}$ в точке $\sigma = \lambda + 2 + 2m$ (см. § 7):

$$F^-_\sigma f = \frac{(-1)^{m+1}\ v}{\sigma-\lambda-2-2m} + d^- + \ldots, \tag{9.14}$$

$$F^+_\sigma f = \frac{-v}{\sigma-\lambda-2-2m} + d^+ + \ldots, \tag{9.15}$$

$$F^-_{2-n-\sigma} \overline{h} = \frac{w^-}{\sigma-\lambda-2-2m} + \ldots, \tag{9.16}$$

$$F^+_{2-n-\sigma} \overline{h} = \frac{w^+}{\sigma-\lambda-2-2m} + \ldots, \tag{9.17}$$

где

$$\begin{aligned} v &= (-1)^\nu 2^{(2-n-\lambda-2m)/2} A_{-\lambda-n-2m}(b_{\lambda,m} f), \\ w^- &= (-1)^{m+1} \mu^-(-\lambda-n-2m,\nu) \cdot w, && (9.18) \\ w^+ &= -\mu^+(-\lambda-n-2m,\nu) \cdot w, && (9.19) \\ w &= (-1)^\nu 2^{(2-n-\lambda-2m)/2} J(-\lambda-n-2m) \cdot b_{\lambda,m} \overline{h}, \end{aligned}$$

A priori, фигурная скобка в (9.13) имеет в точке $\sigma = \lambda + 2 + 2m$ полюс второго порядка:

$$\Big\{\quad\Big\} = \frac{c_{-2}}{(\sigma-\lambda-2-2m)^2} + \frac{c_{-1}}{\sigma-\lambda-2-2m} + \ldots$$

По (9.14)–(9.17) коэффициент c_{-2} равен

$$\begin{aligned} c_{-2} &= \left(\cos\frac{\lambda+\nu}{2}\pi\cdot(-1)^{m+1} - \cos\frac{\lambda+2+2m+\nu}{2}\pi\right)\left\langle v, \overline{w^-}\right\rangle_S + \\ &+ \left(-\cos\frac{\lambda+2+2m-\nu}{2}\pi\cdot(-1)^{m+1} + \cos\frac{\lambda+n-\nu}{2}\pi\right)\cdot\left\langle v, \overline{w^+}\right\rangle_S \\ &= 0, \end{aligned}$$

так что на самом деле полюс – первого порядка, а коэффициент c_{-1} равен

$$\begin{aligned} c_{-1} &= \left\langle \left[\cos\frac{\lambda+\nu}{2}\pi\cdot(d^- - (-1)^m d^+) - \frac{\pi}{2}\,(-1)^m \sin\frac{\lambda+\nu}{2}\pi\cdot v\right], \overline{w^-}\right\rangle_S \\ &+ \left\langle \left[\cos\frac{\lambda+n-\nu}{2}\pi\cdot((-1)^m d^- - d^+) + \frac{\pi}{2}\,\sin\frac{\lambda+n-\nu}{2}\pi\cdot v\right], \overline{w^+}\right\rangle_S \\ &= \left\langle d^- - (-1)^m d^+,\ \cos\frac{\overline{\lambda}+\nu}{2}\pi\cdot\overline{w^-} + (-1)^m\cos\frac{\overline{\lambda}+n-\nu}{2}\pi\cdot\overline{w^+}\right\rangle_S + \\ &+ \frac{\pi}{2}\left\langle\ v,\ (-1)^{m+1}\sin\frac{\overline{\lambda}+\nu}{2}\pi\cdot\overline{w^-} + \sin\frac{\overline{\lambda}+n-\nu}{2}\pi\cdot\overline{w^+}\right\rangle_S. \end{aligned} \qquad (9.20)$$

По (2.3), (2.4) имеем

$$\begin{aligned} \mu^-(-\lambda-n-2m,\nu) &= 2\sin\frac{\lambda+n-\nu}{2}\pi\cdot\cos\frac{\lambda+n+\nu}{2}\pi, \\ \mu^+(-\lambda-n-2m,\nu) &= -2\sin\frac{\lambda+n-\nu}{2}\pi\cdot\cos\frac{\lambda-\nu}{2}\pi. \end{aligned}$$

Вспоминая (9.18), (9.19), видим, что слагаемое в (9.20), содержащее $d^- - (-1)^m d^+$, равно нулю, так что

$$c_{-1} = (-1)^\nu\,\pi\ \sin\frac{\lambda+n-\nu}{2}\pi\cdot\sin\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)\pi\cdot\left\langle\ v,\ \overline{w}\right\rangle_S.$$

Следовательно, добавок D_m равен

$$D_m = -4\pi\,\omega(\lambda+2+2m)\cdot\frac{\Lambda(\lambda,\nu,\lambda+2+2m)}{\cos\frac{\lambda-\nu}{2}\pi}\cdot c_{-1}.$$

Подставляя сюда выражения для ω, Λ, c_{-1}, мы получим (9.11). $\square$

Следовательно, формула (9.11) есть "теорема Пифагора" для (9.8).

Таким образом, в случае (C) мы имеем

Теорема 9.6 *Пусть $\lambda\in I_{-k-1}$, $k\in\mathbb{N}$. Тогда представление $R_{\lambda,\nu}$, рассматриваемое на пространстве $\mathcal{T}_k^\nu(\Omega)$, распадается на сумму двух слагаемых. Первое действует на подпространстве функций, для которых их коэффициенты Тейлора $c_m(f)$ равны нулю для $m\leqslant k$, и разлагается как представление $R_{\lambda,\nu}$ в случае (A), второе разлагается в прямую сумму неприводимых представлений $T_{\lambda+2+2m}(\sim T_{-\lambda-n-2m})$, $m\leqslant k$, действующих на сумме пространств $W_{\lambda,\nu,m}$, $m\leqslant k$. Имеет место формула обращения, см. (9.8), и "формула Планшереля" для формы Березина, см. (9.11).*

Литература

1. А. А. Артемов. Преобразование Пуассона для однополостного гиперболоида. Матем. сб., 2004, том 195, № 5, 33–58.

2. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. М.: Наука, 1965.

3. Л. И. Грошева. Канонические и граничные представления на пространстве Лобачевского. Вестник Тамбовского ун-та. Серия: Естеств. и техн. науки, 2004, том 9, вып. 3, 306–311.

4. В. Ф. Молчанов. Канонические представления на двуполостных гиперболоидах. Записки научных семинаров ПОМИ, 2006, том 331, 91–124.

5. V. F. Molchanov. Canonical and boundary representations on a hyperboloid of one sheet. Acta Appl. Math., 2004, vol. 81, Nos. 1–3, 191–204.

6. V. F. Molchanov. Canonical representations on the two-sheeted hyperboloid. Indag. Math., 2005, vol. 16, Nos. 3–4, 609–630.

УДК 519.1

Преобразование Радона на плоскости над конечным кольцом [2]

© **Е. В. Водолажская**

Ключевые слова: преобразование Радона, конечные поля, кольца классов вычетов

Преобразование Радона R на плоскости над конечным кольцом K сопоставляет функции f на K суммы ее значений по прямым. Кольцо K есть либо конечное поле, либо кольцо классов вычетов по модулю p^k. Найдены формулы обращения. Дано описание образа преобразование R для поля и $k = 2$.

The Radon transform R on the plane over a finite ring K assigns to a function f on K sums of its values on lines. The ring K is either a finite field or the ring of cosets modulo p^k. Inversion formulas are found. A description of the image of R is given for a field and for $k = 2$.

[2]Работа поддержана грантами: РФФИ 08-07-97507 р_центр_а, Научной Программой "Развитие Научного Потенциала Высшей Школы" РНП.2.1.1.351 и Темпланом 1.5.07.