8B

УДК 004.896

И.А. Васильев, А.М. Ляшин
ГНУ ЦНИИ РТК, г. Санкт-Петербург, vas@ok.ru, lyashin@rtc.ru

Классификация и аналитическое решение обратной кинематической задачи шестизвенных манипуляторов

В данной работе рассматриваются шестизвенные манипуляторы со всеми вращательными степенями свободы (шарнирами). Предлагается метод аналитического нахождения решений обратной кинематической задачи.

Главная задача, возникающая при управлении манипуляторами, заключается в построении траекторий движения манипулятора. Траектории могут задаваться либо в координатах сочленений (шарниров), либо в параметрах положения и ориентации рабочего органа (захватного устройства). Если используется второй способ, то для расчета управляющих сигналов для приводов параметры ориентации и положения рабочего органа должны быть преобразованы в параметры систем координат сочленений. Для манипуляторов со всеми вращательными степенями подвижности эти координаты сочленений являются углами в шарнирах.

По причине существенной нелинейности получаемых уравнений, которые связывают требуемые координаты захватного устройства и искомые углы в шарнирах, эту задачу решают численно. Есть два основных метода численного решения задачи. Первый метод применим лишь для простых кинематических схем, для которых можно манипулятор, условно говоря, разделить на части и для каждой из частей построить геометрическую схему. В этом случае приходится рассмотреть некоторое количество конфигураций и для каждой найти решение. Этот метод не гарантирует нахождение всех решений, так как каждую конфигурацию требуется рассматривать отдельно и некоторые конфигурации можно не учесть.

Другой численный метод более универсален. Он основан на малых перемещениях рабочего органа и построении матрицы Якоби. Далее, полученные уравнения решаются, например, с помощью метода Ньютона. Так как метод приближенный, то, соответственно, применяется итеративная процедура последовательного приближения, что требует значительного времени на вычисления. Здесь требуется учитывать все особенности сходимости численного метода и погрешности определения решений. Также нет гарантии нахождения всех решений.

Используя формализм Денавита – Хартенберга, производится построение матричного уравнения, связывающего углы в шарнирах с требуемыми координатами рабочего органа:

$$A_1A_2A_3A_4A_5A_6 = P, \tag{1}$$

где A_i – матрица (4x4) перехода от i+1-ой системы координат к i-той, под 7 системой координат понимаем систему координат, связанную с захватным устройством; P – матрица перехода из целевого положения в базовую систему координат.

Если составить систему уравнений, производя поэлементное приравнивание матриц слева и справа, то полученная система будет переопределенной. Для устранения этого недостатка необходимо провести параметризацию матриц, содержащую шесть параметров по количеству неизвестных углов.

Для начала заметим, что уравнения, полученные путем приравнивания трех верхних элементов самого правого столбца, являются независимыми. Также заметим, что матрицы 3x3, полученные вычеркиванием правого столбца и нижней строки из матриц A_i, входящих в уравнение (1), являются ортогональными. Мы можем предложить три подхода, позволяющие записать три независимых уравнения, получающихся из условия равенства двух ортогональных матриц.

Первый заключается в параметризации обеих матриц с помощью углов Эйлера и приравнивания их. Приведем соотношения для углов Эйлера произвольной ортогональной матрицы:

$$\vartheta = \arccos(P_{33});$$
$$\varphi = \begin{cases} \arccos\left(\dfrac{P_{32}}{\sin(\vartheta)}\right), & если \quad \dfrac{P_{31}}{\sin(\vartheta)} \ge 0, \\ 2\pi - \arccos\left(\dfrac{P_{32}}{\sin(\vartheta)}\right), & иначе; \end{cases}$$
$$\psi = \begin{cases} \arccos\left(-\dfrac{P_{23}}{\sin(\vartheta)}\right), & если \quad \dfrac{P_{31}}{\sin(\vartheta)} \ge 0, \\ 2\pi - \arccos\left(-\dfrac{P_{23}}{\sin(\vartheta)}\right), & иначе, \end{cases} \tag{2}$$

где P_{ij} – элемент матрицы с номерами i и j.

Заметим, что в случае неизвестных коэффициентов преобразования (2) выглядят довольно громоздкими.

Второй подход заключается в преобразовании Кэли для матриц, выражающем левую и правую части системы (1) по формуле

$$U = [1-T][1+T]^{-1}, \tag{3}$$

где T – одна из преобразуемых матриц. Преобразование (3) переводит ортогональную матрицу T в кососимметрическую и является обратимым. Заметим, что кососимметрическая матрица уже обладает тремя очевидными параметрами, а именно элементами U_{12}, U_{13}, U_{23}. Поэтому необходимые три уравнения можно получить приравниванием соответствующих трех элементов слева и справа. Однако заметим, что в случае, если спектр матрицы T содержит точку -1, (3) становится неопределенным. Это обстоятельство привело нас к третьему способу сведения 9 уравнений к трем.

Для этого запишем условие равенства двух ортогональных матриц T_1 и T_2 в виде

$$T_1 T_2^{-1} = I, \tag{4}$$

где I – единичная матрица 3x3. Матрица $T = T_1 T_2^{-1}$ также является ортогональной. Теперь обратим внимание на то, что условие (4) можно записать как равенство единице любых двух диагональных элементов T при условии det T=1, чего всегда можно добиться путем соответствующего введения матриц A_i из (1). Докажем это. Без ограничения общности считаем, что это элементы T_{11} и T_{22}. Из соотношений

$$T_{11}^2 + T_{12}^2 + T_{13}^2 = 1$$
$$T_{21}^2 + T_{22}^2 + T_{23}^2 = 1$$

имеем $T_{12}=T_{13}=T_{21}=T_{23}=0$. Теперь из этих условий и соотношений

$$T_{11}^2 + T_{21}^2 + T_{31}^2 = 1$$
$$T_{12}^2 + T_{22}^2 + T_{32}^2 = 1$$
$$T_{13}^2 + T_{23}^2 + T_{33}^2 = 1$$

получим $T_{31}=T_{32}=0,\ T_{33}=1$. Последнее следует из det T=1. Для удобства мы также ввели углы Эйлера для известной правой части уравнения (1).

Таким образом, задача свелась к решению 5 уравнений. Первые три из них получены путем приравнивания правых столбцов исходных матриц. А оставшиеся два – путем приравнивания единице любых двух диагональных элементов матрицы 3x3, которая получена путем умножения верхнего левого минора матрицы, содержащей неизвестные углы, и такого же минора правой части (1), параметризованной углами Эйлера.

В процессе решения обратной задачи было замечено, что во многих уравнениях (довольно громоздких) есть конструкции, представляющие собой квадратный корень из неположительного числа. Так как удовлетворяющие нас решения должны быть только вещественными, то, приравнивая подкоренное выражение нулю, получаем более простые соотношения.

Для вычислений применялась стандартная замена синусов и косинусов на тангенсы половинных углов, переводящая тригонометрические уравнения в алгебраические:

$$\cos x = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}};$$

$$\sin x = \frac{2tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}.$$

Для удобства будем обозначать тангенсы половинных углов буквой t с индексом соответствующего угла. Для повышения точности решений можно после превышения тангенсом некоторого значения (скажем, 1 – то есть для 45 градусов) применять функцию, обратную тангенсу, т.е. котангенс, с аналогичным преобразованием.

При выводе уравнений было замечено, что при соответствующих заменах эти уравнения часто в результате преобразуются в систему уравнений, которая относительно легко разрешается. Эта система выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} Sin(q_2) + a_2 Sin(q_{2,3}) = c2 \\ Cos(q_2) + a_2 Cos(q_{2,3}) = c3 \end{cases}, \qquad (5)$$

где a_2, c_2, c_3 – константы.

В этой системе важно, что коэффициенты у вторых слагаемых обоих уравнений одинаковые.

Данный подход был проверен для двух кинематических схем. Приведем пример для кинематической схемы манипулятора «Lair». Матрица направляющих косинусов левой части уравнения после выполнения преобразований и упрощений выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} C_5C_6S_1 + C_1(C_{234}S_6 - S_{234}C_6S_5) & C_1(C_{234}C_6 + S_{234}S_5S_6) - C_5S_1S_6 & S_{234}C_1C_5 + S_1S_5 \\ C_{234}S_1S_6 - C_6(C_1C_5 + S_{234}S_1S_5) & S_6(C_1C_5 + S_{234}S_1S_5) + C_{234}C_6S & S_{234}C_5S_1 - C_1S_5 \\ -C_{234}C_6S_5 - S_{234}S_4 & -S_{234}C_6 + C_{234}S_5S_6 & C_{234}C_5 \end{pmatrix},$$

где $C_i = \cos(q_i)$, $S_i = \sin(q_i)$, C_{234}, S_{234} – синус и косинус, соответственно, суммы 2, 3 и 4-го углов.

Далее, выполняя некоторые преобразования для выражения углов друг через друга, получаем следующую формулу:

$$t_{234} = -\frac{-S_\vartheta(2C_\psi t_1 + S_\psi(t_1^2 - 1))(t_5^2 - 1) + \sqrt{-(-2(t_1^2+1)t_5 + S_\vartheta(C_\psi + 2S_\psi t_1 - C_\psi t_1^2)(t_5^2+1))^2}}{-(1 + C_\vartheta)(t_1^2+1) + 2S_\vartheta(C_\psi + 2S_\psi t_1 - C_\psi t_1^2)t_5 + (C_\vartheta - 1)(t_1^2+1)t_5^2}, \qquad (6)$$

где $t_i = tg(q_i/2)$, C_ψ, C_θ, S_ψ, S_θ – синусы и косинусы соответствующих углов Эйлера целевого положения.

Эта формула показывает зависимость суммы углов 2, 3 и 4 от углов 1 и 5. Здесь видно, что под знаком радикала стоит неположительное число. Так как значения углов могут быть только вещественными, то подкоренное выражение должно быть нулем. Следовательно, приравнивая его нулю, сразу получаем зависимость пятого угла от первого:

$$t_5 = \frac{2 + 2t_1^2 \pm \sqrt{(2+2t_1^2)^2 - 4(C_\psi S_\vartheta + 2S_\vartheta S_\psi t_1 - C_\psi S_\vartheta t_1^2)}}{2(C_\psi S_\vartheta + 2S_\vartheta S_\psi t_1 - C_\psi S_\vartheta t_1^2)}. \qquad (7)$$

Приравнивая вектор-столбец декартовых координат левой части уравнения ему соответствующему вектору-столбцу целевого положения и поставляя в него полученную зависимость (7), получаем результат для первого угла:

$$t_1 = \frac{-p1 + S_\vartheta S_\psi d_6 \pm \sqrt{p1^2 + p2^2 - (d_2 + d_3)^2 + S_\vartheta d_6(2p2C_\psi - 2p1S_\psi + S_\vartheta d_6)}}{p2 + d_2 + d_3 + C_\psi S_\vartheta d_6},$$

где p1, p2 – абсцисса и ордината целевого положения захватного устройства; d_i – длина i-го звена.

Далее, воспользуемся описанной выше особенностью (5), получаем решения для углов 2 и суммы 2 и 3-го:

$$t_2 = \frac{8f_2a_2^2 \pm \sqrt{8(1+4f_2^2+f_3^2)a_2^2a_3^2 - 4a_3^4 - 4(4f_2^2+f_3^2-1)^2}}{2(4f_2^2+(1+f_3)^2)a_2^2 - 2a_3^2};$$

$$t_{23} = \frac{8f_2a_2a_3 \pm \sqrt{8(1+4f_2^2+f_3^2)a_2^2a_3^2 - 4a_3^4 - 4(4f_2^2+f_3^2-1)^2}}{2(4f_2^2+f_3^2-1)a_2^2 + 2f_3a_2a_3},$$

где f_i, a_i – константы, полученные при вычислениях.

Затем, приравнивая диагональный элемент единице, получаем решение для шестого шарнира, являющегося степенью чистого вращения кисти:

$$t_6 = \frac{C_\vartheta S_\varphi Sin(\psi - q_1)C_{234} + S_\vartheta S_\varphi S_{234} - C_\varphi Cos(\psi - q_1)C_{234}}{C_\vartheta Cos(\psi - q_1)S_\varphi C_5 + C_\varphi Sin(\psi - q_1)C_5 + S_\vartheta S_\varphi C_{234}S_5 + C_\varphi Cos(\psi - q_1)S_5S_{234} - C_\vartheta S_\varphi Sin(\psi - q_1)S_5S_{234}}.$$

Данный подход решения обратных кинематических задач применялся для двух разных кинематических схем. Было замечено, что как для первой, так и для второй методы и приемы очень сходны. То есть в обоих случаях возникали конструкции типа «неположительное число под радикалом», которые сильно упрощали вычисления, и соотношения типа (5). Возникает предположение о том, что данные особенности имеют место для большинства кинематических схем, допускающих аналитическое решение. Однако это требует дополнительного исследования.

І.А. Васильєв, А.М. Ляшин

Класифікація й аналітичне розв'язання зворотної кінематичної задачі шестиланкових маніпуляторів

У даній роботі розглядаються шестиланкові маніпулятори зі всіма обертальними ступенями свободи (шарнірами). Пропонується метод аналітичного знаходження розв'язань зворотної кінематичної задачі.

Статья поступила в редакцию 15.08.2004.