

Розглянуто задачі кінематичного й динамічного аналізу маніпулятора. Визначено особливості складання математичних моделей при використанні пакета прикладних програм Mathcad. Розглянуто приклад розв'язання прямих і зворотних задач кінематики й динаміки для трьохланкового маніпулятора, який працює в циліндричній системі координат

Ключові слова: кінематичний і динамічний аналіз маніпулятора, перетворення координат, закон руху, траєкторія руху

Рассмотрены задачи кинематического и динамического анализа манипулятора промышленного робота. Определены особенности составления математических моделей при использовании пакета прикладных программ Mathcad. Рассмотрен пример решения прямых и обратных задач кинематики и динамики для трёхзвенного манипулятора, работающего в цилиндрической системе координат

Ключевые слова: кинематический и динамический анализ манипулятора, преобразование координат, закон движения, траектория движения

УДК 629.7.615.3

DOI: 10.15587/1729-4061.2015.51105

МЕТОД КИНЕМАТИЧЕСКОГО И ДИНАМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА МАНИПУЛЯТОРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ MATHCAD

Н. С. Ащепкова

Кандидат технических наук, доцент

Кафедра механотроники

Днепропетровский национальный

университет им. О. Гончара,

пр. Гагарина, 72, г. Днепропетровск, Украина, 49010

E-mail: ashhepkova_natalja@rambler.ru

1. Введение

В настоящее время для обучения и научно-исследовательских проектов студентов, обучающихся по специальностям робототехника и механотроника, широко используются роботы Lego Mindstorms NXT [1–3]. Ежегодно проводятся региональные олимпиады и международные соревнования по робототехнике. Широкий ассортимент конструкторских элементов и датчиков позволяет создать модели с разными типами шасси, манипуляторов и схватов; реализовать различные алгоритмы управления и законы движения [4–7].

Стандартная методика кинематического и динамического анализа манипулятора состоит из следующих этапов:

- 1) составление математической модели манипулятора;
- 2) разработка программного обеспечения;
- 3) определение начальных условий;
- 4) математическое моделирование движения манипулятора;
- 5) анализ и обработка полученных результатов.

При курсовом и дипломном проектировании студентам специальности «Роботомеханические системы и комплексы» необходимо выполнить кинематический и динамический анализ манипулятора модели промышленного робота (МПР). На основе полученных данных и требуемого закона движения нагрузки проводится синтез и расчет параметров траектории схвата манипулятора. При решении задач кинематического и динамического анализа с помощью ЭВМ требуются программы численного решения трансцендентных уравнений и дифференциальных уравнений, коэффициенты которых являются функциями времени. Разработка соответствующего программного обеспечения

накладывает требования к квалификации исполнителя. У большинства студентов создание алгоритмов решения трансцендентных и дифференциальных уравнений, синтез и отладка программы, корректное задание начальных условий вызывает трудности.

Возникла необходимость создания метода для решения подзадач кинематического и динамического анализа манипулятора, с использованием стандартного пакета прикладных программ, обеспечивающего эффективное проектирование МПР.

2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

Манипулятор МПР обычно представляет собой открытую кинематическую цепь, жесткие звенья которой соединены кинематическими парами пятого класса [8]. Если кинематическая цепь не содержит внутренних замкнутых контуров, то число кинематических пар p определяет число степеней подвижности манипулятора [9, 10]. Положение кинематической цепи манипулятора определяют с помощью обобщенных координат $q_i(t)$, ($i=1, 2, \dots, n$) характеризующих относительные перемещения в кинематических парах [9–11].

Рассматривают следующие задачи кинематического анализа манипулятора: первая задача кинематики (прямая задача о положении манипуляторов), вторая задача кинематики (обратная задача о положении манипуляторов); и задачи динамического анализа манипулятора: прямая и обратная задачи динамики [8–12]. Решение обратной задачи о положении манипулятора проводится как на этапе проектирования, так и на этапе синтеза управляющих воздействий [9, 10, 13]. Сле-

дует учесть, что для манипуляторов с большим числом степеней подвижности возможно несколько наборов обобщенных координат, обеспечивающих заданное положение особой точки [10–14]. Выбор оптимального решения проводится исходя из дополнительных ограничений или критериев качества [9, 10].

Математическая модель манипулятора составляется методом Лагранжа-Эйлера или Ньютона-Эйлера, с представлением систем координат в разомкнутых кинематических цепях методом Денавита-Хартенберга [9, 10, 13].

Порядок системы дифференциальных уравнений для математической модели, составленной методом Лагранжа-Эйлера, соответствует числу обобщенных координат манипулятора [13], что может вызвать определённые трудности у студентов. В математической модели, составленной методом Ньютона-Эйлера, всего два уравнения: второй закон Ньютона и уравнение Эйлера для углового движения [13]. Однако метод Лагранжа-Эйлера является более универсальным и чаще используется при моделировании движений МПР на ЭВМ [14].

В задачах дипломного проектирования рассматривается перемещение манипулятором МПР нагрузки (заготовки, инструмента, контрольно-измерительных приборов) по заданному закону движения [15]. В зависимости от назначения манипулятора на разных участках траектории МПР могут изменяться параметры нагрузки: геометрические размеры, форма, распределение масс [12, 14]. Эти особенности следует учесть на этапе составления математической модели, поскольку коэффициенты дифференциальных уравнений являются функциями обобщенных координат манипулятора и зависят от закона движения и параметров нагрузки.

Для решения данной задачи на ЭВМ можно использовать языки программирования (Fortran Pascal, C) или математические пакеты (Matlab, Mathcad). Численные методы решения инженерных задач реализуются в среде прикладных программ Mathcad [15, 16], которая характеризуется возможностью решения линейных и нелинейных алгебраических, дифференциальных уравнений и систем уравнений; выполнением операций с векторами, матрицами и полиномами [15, 16].

Пакет прикладных программ Mathcad позволяет выполнить:

- кинематический и динамический анализ, т. е. рассчитать координаты, скорость и ускорение звеньев [14, 16];
- вычислить силы и моменты, действующие на звенья; определить траекторию схвата манипулятора [16].

Однако обобщенной формализованной методики решения задач кинематического и динамического анализа манипуляторов с использованием Mathcad нет.

3. Цель и задачи исследования

Цель исследования – разработка формализованного метода кинематического и динамического анализа манипулятора МПР в среде Mathcad.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Для кинематического анализа:

- составление матриц преобразования координат методом Денавита-Хартенберга;

- представление перемещения особой точки Р манипулятора как последовательности движений по каждой обобщенной координате;

- определение положения особой точки Р манипулятора в системе координат связанной с основанием МПР;

- определение линейной скорости и ускорения особой точки Р манипулятора в системе координат связанной с основанием МПР;

- вычисление наборов обобщенных координат $q_i(t_m), i = 1, 2, \dots, n$, соответствующих заданному положению особой точки Р манипулятора.

2. Для динамического анализа:

- по закону изменения обобщенных координат $q_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ определение обобщенных сил, обеспечивающих это движение;

- определение законов движения $q_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ по заданным обобщенным силам Q_i .

4. Материалы и методы исследования решения задач кинематического и динамического анализа манипулятора

Математическая постановка задачи и начальные условия. Исходными данными являются [11]:

- кинематическая схема манипулятора;
- геометрические размеры и плотности звеньев манипулятора;
- требуемый закон движения схвата манипулятора;
- начальное положение звеньев;
- информация о нагрузке.

С каждым звеном манипулятора свяжем правую декартову систему координат $O_i X_i Y_i Z_i$. Начало отсчета O_i расположим в центре шарнира, одну координатную ось направим по оси шарнира, вторую координатную ось направим вдоль оси симметрии звена, третья координатная ось дополняет систему до правой [11]. Движение манипулятора МПР определяется изменением во времени обобщенных координат $q_i(t)$, которыми являются углы поворота – во вращательных, и перемещения – в поступательных кинематических парах.

Составим алгоритм решения задачи кинематического и динамического анализа манипулятора с использованием пакета прикладных программ Mathcad.

4. 1. Кинематический анализ

Первая задача кинематики: задана кинематическая схема манипулятора и законы движения (законы изменения обобщенных координат $q_i(t), i = 1, 2, \dots, n$) требуется определить положение особой точки Р (например, полюса схвата) в системе отсчета, связанной со стойкой [9, 10, 12, 13].

Алгоритм решения:

1) составим матрицы преобразования координат методом Денавита-Хартенберга [9];

- для поступательных кинематических пар:

$$A_v(\vec{i}, q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \pm q + x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_v(\vec{j}, q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & \pm q + y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_v(\vec{k}, q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & \pm q + z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

– для вращательных кинематических пар, считая направление вращения против часовой стрелки – направлением положительного приращения q :

$$A_w(\vec{i}, q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & \cos q & -\sin q & y \\ 0 & \sin q & \cos q & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_w(\vec{j}, q) = \begin{bmatrix} \cos q & 0 & -\sin q & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ \sin q & 0 & \cos q & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_w(\vec{k}, q) = \begin{bmatrix} \cos q & -\sin q & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \\ \sin q & \cos q & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где x, y, z – координаты начала отсчета O_{i+1} в системе координат $O_i X_i Y_i Z_i$.

Следует отметить, что в общем случае угол поворота $q \in [0, 2\pi]$, т. е. $-1 \leq \sin q \leq 1, -1 \leq \cos q \leq 1$.

Для составления матриц преобразования координат по приведенным шаблонам достаточно знать: тип кинематической пары (вращательная или поступательная), относительно какой оси происходит перемещение и какой обобщенной координатой оно характеризуется.

2) на основании кинематической схемы манипулятора представим перемещение особой точки P как последовательность движений по каждой обобщенной координате. Составим цепочку перемещений от 0 – го звена (основания манипулятора) до n – го звена, относительно которого особая точка неподвижна. Например:

$$0 \xrightarrow{A_w(\vec{k}, q_1)} 1 \xrightarrow{A_v(\vec{k}, q_2)} 2 \xrightarrow{A_v(\vec{j}, q_3)} 3 \dots n-1 \xrightarrow{A_v(\vec{i}, q_n)} n. \quad (1)$$

3) определим положение точки P манипулятора в системе координат, связанной с n -ым звеном $\vec{r}_p^n = (x_p \ y_p \ z_p \ 1)^T$ и в системе координат связанной с основанием МПР

$$\vec{r}_p^0 = f(q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)) = A_0^1 \cdot A_1^2 \cdot A_2^3 \cdot \dots \cdot A_{n-1}^n \cdot \vec{r}_p^n = T_n \cdot \vec{r}_p^n, \quad (2)$$

где $T_n = A_0^1 \cdot A_1^2 \cdot A_2^3 \cdot \dots \cdot A_{n-1}^n$ – общая матрица преобразования координат от n – го звена до 0 – го звена (основания манипулятора).

4) определим линейную скорость и ускорение особой точки в системе координат связанной с основанием МПР. Учитывая, что \vec{r}_p^n определяет положение точки P n – го звена в системе координат связанной с n -ым звеном, получим:

$$\vec{v}_p^0 = \dot{\vec{r}}_p^0 = \frac{d}{dt}(T_n \cdot \vec{r}_p^n) = \frac{d}{dt} T_n \cdot \vec{r}_p^n,$$

$$\vec{r}_p^{''0} = \ddot{\vec{a}}_p^0 = \frac{d^2}{dt^2}(T_n \cdot \vec{r}_p^n) = \frac{d^2}{dt^2} T_n \cdot \vec{r}_p^n.$$

Согласно [9]:

$$\frac{d}{dt} T_i = \sum_{k=1}^i \frac{\partial T_i}{\partial q_k} \cdot \dot{q}_k = \begin{cases} U_{ik}, & k \leq i, \\ 0, & k > i; \end{cases}$$

$$U_{ik} = A_0^1 \cdot A_1^2 \cdot \dots \cdot \frac{d A_{k-1}^k}{dq_k} \cdot \dots \cdot A_{n-1}^n = A_0^1 \cdot A_1^2 \cdot \dots \cdot \Omega_i \cdot A_{i-1}^i \cdot \dots \cdot A_{n-1}^n;$$

$$\frac{d^2}{dt^2} T_i = \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i V_{ijk} \cdot \dot{q}_j \cdot \dot{q}_k + \sum_{j=1}^i U_{ij} \cdot \ddot{q}_j; \quad V_{ijk} = \frac{d U_{ij}}{dq_k} = V_{ikj};$$

$$V_{ijk} = \begin{cases} A_0^1 \cdot A_1^2 \cdot \dots \cdot A_{i-2}^{i-1} \cdot \frac{d A_{i-1}^i}{dq_i} \cdot \dots \cdot A_{k-2}^{k-1} \cdot \frac{d A_{k-1}^k}{dq_k} \cdot \dots \cdot A_{n-1}^n, & j > k, \\ A_0^1 \cdot A_1^2 \cdot \dots \cdot A_{k-2}^{k-1} \cdot \frac{d A_{k-1}^k}{dq_k} \cdot \dots \cdot A_{i-2}^{i-1} \cdot \frac{d A_{i-1}^i}{dq_i} \cdot \dots \cdot A_{n-1}^n, & j < k, \\ A_0^1 \cdot A_1^2 \cdot \dots \cdot A_{j-2}^{j-1} \cdot \frac{d^2 A_{j-1}^j}{dq_j^2} \cdot \dots \cdot A_{n-1}^n, & j = k. \end{cases}$$

Вычислим производные матриц преобразования координат:

– для поступательных кинематических пар:

$$\frac{d A_v(\vec{i}, q)}{dq} = \Omega_v(\vec{i}, q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{d A_v(\vec{j}, q)}{dq} = \Omega_v(\vec{j}, q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{d A_v(\vec{k}, q)}{dq} = \Omega_v(\vec{k}, q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{d^2 A_{v_{j-1}^j}}{dq_j^2} = \Omega_v^2 = 0;$$

– для вращательных кинематических пар:

$$\frac{d A_w(\vec{i}, q)}{dq} = \Omega_w(\vec{i}, q) \cdot A_w(\vec{i}, q) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & \cos q & -\sin q & y \\ 0 & \sin q & \cos q & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\frac{dA_w(\vec{j},q)}{da} = \Omega_w(\vec{j},q) \cdot A_w(\vec{j},q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos q & 0 & -\sin q & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ \sin q & 0 & \cos q & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\frac{dA_w(\vec{k},q)}{dq} = \Omega_w(\vec{k},q) \cdot A_w(\vec{k},q) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos q & -\sin q & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \\ \sin q & \cos q & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\frac{d^2 A_w(\vec{i},q)}{dq^2} = \Omega_w^2(\vec{i},q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{d^2 A_w(\vec{j},q)}{dq^2} = \Omega_w^2(\vec{j},q) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{d^2 A_w(\vec{k},q)}{dq^2} = \Omega_w^2(\vec{k},q) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Угловые и линейные скорости особых точек звеньев манипулятора можно определить по рекурсивным формулам [13] для вращательной кинематической пары

$$\vec{\omega}_i = \vec{\omega}_{i-1} + l_{i-1} \cdot \dot{\vec{q}}_i, \quad \vec{V}_i = \vec{\omega}_i \times \vec{P}_i + \vec{V}_{i+1}, \quad (3)$$

– для поступательной кинематической пары

$$\vec{\omega}_i = \vec{\omega}_{i+1}, \quad \vec{V}_i = \vec{l}_{i+1}^T \cdot \vec{q}_i + \vec{\omega}_i \times \vec{P}_i + \vec{V}_{i+1}, \quad (4)$$

где $\vec{\omega}_i, \vec{\omega}_{i+1}$ – векторы угловых скоростей i -го и $i+1$ -го звеньев манипулятора; \vec{V}_i, \vec{V}_{i+1} – векторы линейных скоростей i -го и $i+1$ -го звеньев манипулятора; $\vec{q}_i, \dot{\vec{q}}_i$ – матрицы столбцы обобщенной координаты и обобщенной скорости; \vec{l}_{i+1} – радиус-вектор от оси вращения угловой обобщенной координаты q_i до особой точки $i+1$ -го звена манипулятора; \vec{P}_i – радиус-вектор особой точки i -го звена манипулятора в системе координат $O_i X_i Y_i Z_i$.

На этом алгоритм решения прямой задачи кинематики завершен.

Вторая задача кинематики (обратная задача о положении манипуляторов): задана кинематическая схема манипулятора, известны положение и ориентация схвата для момента времени t_m в системе координат, связанной с основанием МПР. Требуется определить значения обобщенных координат $q_i(t_m), i = 1, 2, \dots, n$, обусловленных заданным положением схвата \vec{r}_p^0 . Согласно [9–11], задать положение схвата, как и любого твердого

тела, можно с помощью трёх линейных $x(t), y(t), z(t)$ и трёх угловых координат $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$.

Алгоритм решения: шаги 1)–4) повторяют соответствующие шаги алгоритма решения первой задачи кинематики.

5) на основании (2) вычислим $q_i(t_m), i = 1, 2, \dots, n$ по формуле:

$$\vec{r}_p^n = (T_n)^{-1} \cdot \vec{r}_p^0, \quad (5)$$

– для момента времени t_m можно записать:

$$\vec{r}_p^n = f(t_m, x(t_m), y(t_m), z(t_m), \alpha(t_m), \beta(t_m), \gamma(t_m)),$$

$$T_n = F(t_m, q_1(t_m), q_2(t_m), \dots, q_i(t_m), \dots, q_n(t_m)),$$

т. е. уравнение (5) в общем случае представляет собой систему шести нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} x(t_m) &= F_1(t_m, q_1(t_m), q_2(t_m), \dots, q_i(t_m), \dots, q_n(t_m)), \\ y(t_m) &= F_2(t_m, q_1(t_m), q_2(t_m), \dots, q_i(t_m), \dots, q_n(t_m)), \\ z(t_m) &= F_3(t_m, q_1(t_m), q_2(t_m), \dots, q_i(t_m), \dots, q_n(t_m)), \\ \alpha(t_m) &= F_4(t_m, q_1(t_m), q_2(t_m), \dots, q_i(t_m), \dots, q_n(t_m)), \\ \beta(t_m) &= F_5(t_m, q_1(t_m), q_2(t_m), \dots, q_i(t_m), \dots, q_n(t_m)), \\ \gamma(t_m) &= F_6(t_m, q_1(t_m), q_2(t_m), \dots, q_i(t_m), \dots, q_n(t_m)). \end{aligned} \quad (6)$$

Метод решения (6) зависит от количества обобщенных координат манипулятора. Если $n=6$, система имеет единственное решение; при $n>6$ одному и тому же положению схвата могут соответствовать различные наборы значений обобщенных координат. Если $n<6$, то решение существует для ограниченного множества положений схвата, т. е. рабочая зона манипулятора имеет ограничения. Системы уравнений вида (5), (6), дополненные ограничениями, эффективно решаются в среде Mathcad.

Проведение кинематического анализа по представленному алгоритму позволяет формализовать процесс вычислений, уменьшить затраты учебного времени и сократить количество ошибок.

Использование уравнений Лагранжа позволило разработать эффективные алгоритмы автоматизированного анализа манипуляторов на ЭВМ [9]. Кинетическую энергию манипулятора определим по формуле [9, 10, 13]:

$$Ek = 0.5 \cdot \sum_{i=1}^n \text{tr} \left(\frac{d}{dt} T_i \cdot H_i \cdot \left(\frac{d}{dt} T_n \right)^T \right),$$

$$H_i = \begin{bmatrix} J_{xx}^{(i)} & J_{xy}^{(i)} & J_{xz}^{(i)} & m_i \cdot x_i \\ J_{yx}^{(i)} & J_{yy}^{(i)} & J_{yz}^{(i)} & m_i \cdot y_i \\ J_{zx}^{(i)} & J_{zy}^{(i)} & J_{zz}^{(i)} & m_i \cdot z_i \\ m_i \cdot x_i & m_i \cdot y_i & m_i \cdot z_i & m_i \end{bmatrix},$$

где H_i – матрица, характеризующая инерцию i -го звена; m_i – масса i -го звена; x_i, y_i, z_i – координаты центра тяжести i -го звена в системе координат связанной с i -ым звеном; $J_{xx}^{(i)}, J_{xy}^{(i)}, \dots, J_{zz}^{(i)}$ – элементы тензора инерции, вычисляемые для i -го звена в системе координат связанной с i -ым звеном.

Потенциальную энергию манипулятора вычислим по формуле [9, 10, 13]:

$$E_p = -\sum_{i=1}^n m_i \cdot G^T \cdot T_i \cdot \vec{P}_i, \quad G^T = [0 \quad 0 \quad -g \quad 0],$$

где g – ускорение свободного падения.

Уравнение Лагранжа II-го рода имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = Q_i, \tag{7}$$

где Q_i – обобщенные непотенциальные силы, т. е. проекции на оси кинематических пар моментов (если пары вращательные) и сил (если пары поступательные).

После преобразований (7), запишем уравнение Лагранжа II-го рода в матричном виде [9]:

$$\sum_{i=j}^n \sum_{k=1}^i \text{tr}(U_{ij} \cdot H_i \cdot U_{ik}^T) \cdot \ddot{q}_k + \sum_{i=j}^n \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^i \text{tr}(U_{ij} \cdot H_i \cdot U_{ikl}^T) \cdot \dot{q}_k \cdot \dot{q}_l - \sum_{i=j}^n m_i \cdot G^T \cdot U_{ij} \cdot \vec{P}_i = Q_i. \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned} G^T &= [0 \quad 0 \quad -g \quad 0]; \\ U_{ij} &= \frac{d}{dq_j} (A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \dots A_{j-1} \cdot A_j \dots A_{i-1} \cdot A_i) = \\ &= A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \dots A_{j-1} \cdot \frac{d}{dq_j} A_j \dots A_{i-1} \cdot A_i = \\ &= A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \dots A_{j-1} \cdot \Omega_j \cdot A_j \dots A_{i-1} \cdot A_i; \end{aligned}$$

где U_{ij} – матрица частных производных радиус-вектора центра масс i -го звена по обобщенной координате q_j ; A_i – матрица преобразования координат i -го звена; Ω_i – вспомогательная матрица для вычисления производных; H_i – матрица, характеризующая инерцию i -го звена; q_i, \dot{q}_i – обобщенная координата и скорость i -го звена; m_i – масса i -го звена; g – ускорение свободного падения; \vec{P}_i – радиус-вектора центра масс i -го звена; Q_i – обобщенные непотенциальные силы, т. е. проекции на оси кинематических пар моментов (если пары вращательные) и сил (если пары поступательные).

4. 2. Динамический анализ манипулятора

Прямая задача динамики: по заданному закону движения (закону изменения обобщенных координат $q_i(t), i=1,2,\dots,n$) требуется определить обобщенные силы, обеспечивающие это движение. Дифференцируя $q_i(t)$, получим $\dot{q}_i(t), \ddot{q}_i(t)$ и вычислим величины, входящие в левую часть уравнения (8). Следовательно, обобщенные силы Q_i будут однозначно определены. На этом алгоритм решения прямой задачи динамики завершен.

Обратная задача динамики состоит в определении закона движения по заданным обобщенным силам Q_i . Считая известными значения обобщенных координат $q_i(t_0)$ и скоростей $\dot{q}_i(t_0)$ в начальный момент времени t_0 , уравнение (8) можно преобразовать к виду:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}(t_0) \cdot \dot{q}_i(t_0) = b_j(t_0), \quad j=1,2,\dots,n, \tag{9}$$

где $a_{ij}(t_0), b_j(t_0)$ – коэффициенты, определенные для момента времени t_0 , зависящие от $q_i(t_0), \dot{q}_i(t_0), Q_i(t_0)$.

Решение системы уравнений (9) будем искать по формуле:

$$\ddot{q}_i(t_0) = (a_{ij}(t_0))^T \cdot b_i(t_0), \quad i=1,2,\dots,n.$$

Придавая бесконечно малые приращения Δt можно восстановить зависимость $\ddot{q}_i(t_0)$, и вычислить

$$q_i(t) = \iint \ddot{q}_i(t) dt^2. \tag{10}$$

На этом алгоритм решения обратной задачи динамики завершен.

При наличии определенных навыков составление матричного уравнения Лагранжа (8) сводится к выполнению формальных процедур преобразования известных матриц. Задачи такого класса решаются в Mathcad с использованием встроенных функций, что уменьшает число ошибок при матричных вычислениях.

Моделирование движения манипулятора проводим по такому алгоритму:

- 1) определим границы участков траектории точки P , в рамках которых параметры нагрузки постоянны S_0, S_1, \dots, S_m ;
- 2) выполним последовательно кинематический анализ для участков траектории $S_0S_1, S_1S_2, S_2S_3, \dots, S_{m-1}S_m$. Определим значения обобщенных координат, скоростей и ускорений соответствующие точкам $S_v, v=1, m$ траектории полюса схвата манипулятора. В граничных точках траектории должны стыковаться по координате, скорости и ускорению;
- 3) определим инерционные характеристики звеньев манипулятора;
- 4) определим силы и моменты сопротивления движению полюса схвата;
- 5) определим движущие силы и моменты в кинематических парах;
- 6) составим математическую модель динамики манипулятора с нагрузкой;
- 7) выполним динамический анализ для участков траектории $S_0S_1, S_1S_2, S_2S_3, \dots, S_{m-1}S_m$.

5. Результаты исследований кинематики и динамики манипулятора по представленной методике

Проиллюстрируем применение данного метода. Кинематическая схема манипулятора МПР представлена на рис. 1. Предположим, что известны законы изменения обобщенных координат $q_1(t) = 0.1t^2 + 0.01t$, $q_2(t) = 0.025t + 0.1$, $q_3(t) = 0.03t + 0.15$; начальные положения звеньев манипулятора $q_1(t_0) = 0$, $q_2(t_0) = 0.1$, $q_3(t_0) = 0.15$; в системе $X_2Y_2Z_2$ координаты полюса схвата в начальный момент времени $P(0; 0.3; 0)$.

Требуется определить: координаты, скорости и ускорения полюса схвата при реализации заданных законов изменения обобщенных координат; вычислить значения обобщенных координат соответствующие заданным координатам полюса $P(x_k; y_k; z_k)$; оценить значения обобщенных сил необходимые для реализации заданного закона движения.

В каждой кинематической паре введём правые системы координат $X_iY_iZ_i$. Для рассматриваемого примера на основании (1) получим

$$A_0^1 = A_w(\vec{k}, q_1), A_1^2 = A_v(\vec{k}, q_2),$$

$$A_2^3 = A_v(\vec{j}, q_3), \dots, A_{n-1}^n = A_v(\vec{i}, q_n).$$

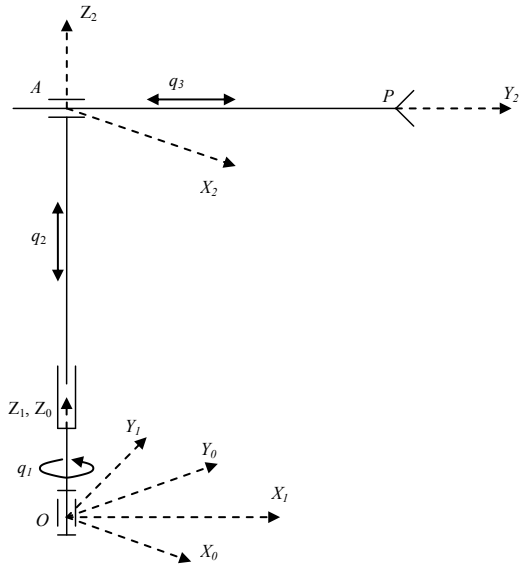


Рис. 1. Кинематическая схема манипулятора

Составим цепочку перемещений от 0 – го звена (основания манипулятора) до 3 – го звена, относительно которого особая точка неподвижна:

$$0 \xrightarrow{A_w(\vec{k}, q_1)} 1 \xrightarrow{A_v(\vec{k}, q_2)} 2 \xrightarrow{A_v(\vec{j}, q_3)} 3.$$

Составим матрицы преобразования координат Денавита-Хартенберга [9, 10, 13] для:

$$A_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q_3(t) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_2(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_0^1 = \begin{pmatrix} \cos q_1(t) & -\sin q_1(t) & 0 & 0 \\ \sin q_1(t) & \cos q_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На рис. 2 представлено решение прямой задачи о положении манипулятора с использованием пакета прикладных программ Mathcad.

Определим скорость и ускорение движения точки P схвата манипулятора, выполняя операцию символьного дифференцирования вектора координат $\vec{r}_p' = \dot{\vec{v}}_p$, $\vec{r}_p'' = \ddot{\vec{a}}_p$ (рис. 3).

Решение обратной задачи о положении манипулятора с использованием встроенной функции Given пакета прикладных программ Mathcad представлено на рис. 4.

Вычислим кинетическую и потенциальную энергию звеньев манипулятора, используя производные матриц преобразования координат (рис. 5, 6).

Составим матричное уравнение Лагранжа II рода по формуле (8), определим обобщенные силы необходимые для реализации заданного закона движения (рис. 7). Начальные условия: H1, H2, H3 – соответственно матрицы, характеризующие инерцию первого, второго и третьего звена относительно неподвижной системой координат связанной с основанием манипулятора; U_{ijk} – производные матриц преобразования координат, задаются по шаблону; Ω_{c_i2} , Ω_{c_j2} , Ω_{c_k2} – вспомогательные матрицы для вычисления производных при поступательном движении звена; Ω_{s_i2} , Ω_{s_j2} , Ω_{s_k2} – вспомогательные матрицы для вычисления производных при вращательном движении звена; $Q_{-i}(t)$ – обобщенные непотенциальные силы приложенные к i-ому звену; $i=1, 2, 3$.

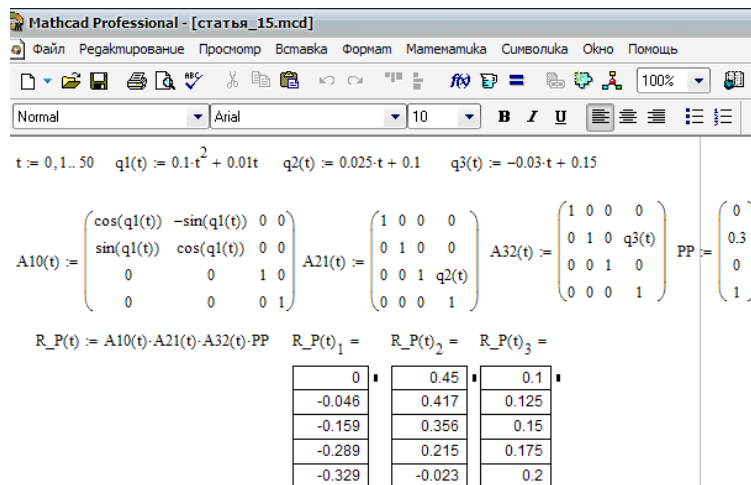


Рис. 2. Решение прямой задачи о положении манипулятора с использованием пакета прикладных программ Mathcad: t – время; $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$ – законы изменения обобщенных координат; $A_{10}(t)$, $A_{21}(t)$, $A_{32}(t)$ – матрицы преобразования координат; PP – координаты точки P схвата в системе координат связанной с третьим звеном манипулятора; $R_P(t)$ – закон изменения положения точки P схвата относительно неподвижной системы координат, связанной с основанием манипулятора; $R_P(t)_1$, $R_P(t)_2$, $R_P(t)_3$ – абсцисса, ордината и аппликата точки P схвата относительно неподвижной системы координат, связанной с основанием манипулятора

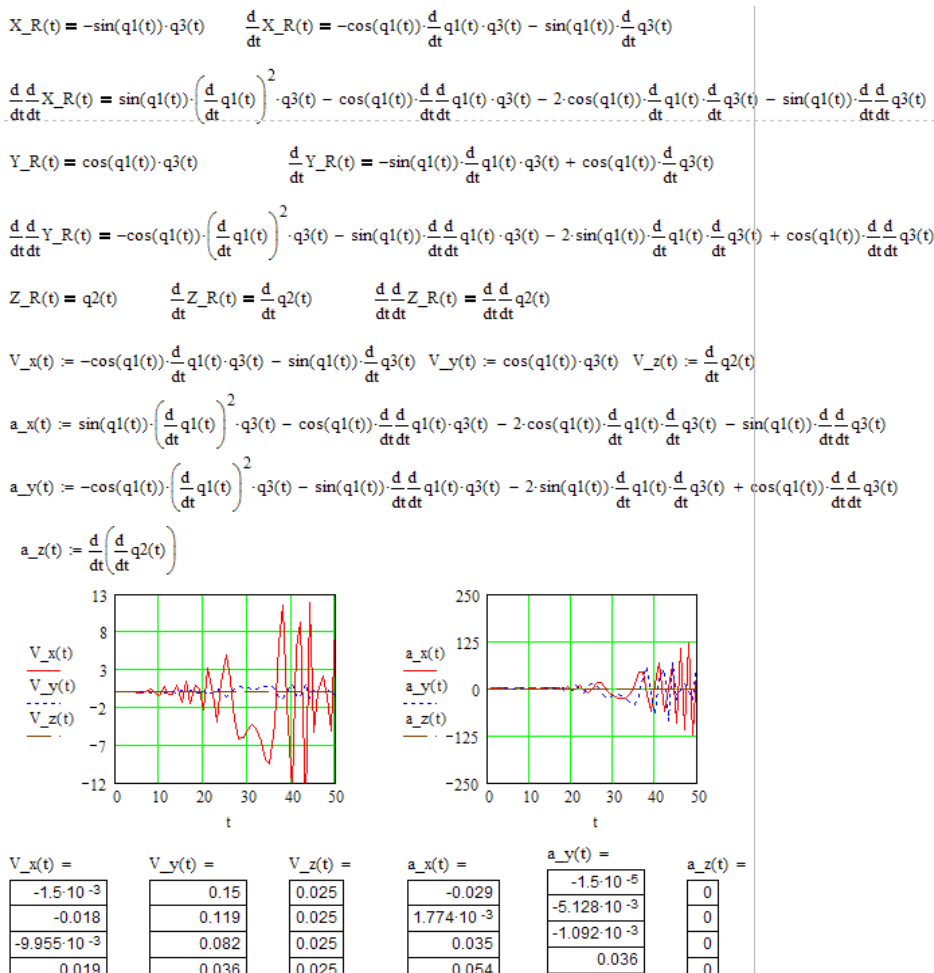


Рис. 3. Определение скорости и ускорения движения точки Р схвата манипулятора. Производные $\frac{d}{dt} X_{R}(t)$, $\frac{d}{dt} Y_{R}(t)$, $\frac{d}{dt} Z_{R}(t)$, $\frac{d}{dt} \frac{d}{dt} X_{R}(t)$, $\frac{d}{dt} \frac{d}{dt} Y_{R}(t)$, $\frac{d}{dt} \frac{d}{dt} Z_{R}(t)$ вычислены, выполняя операцию символьного дифференцирования компонент вектора координат, с использованием пакета прикладных программ Mathcad, $V_{x}(t)$, $V_{y}(t)$, $V_{z}(t)$ – проекции скорости движения точки Р схвата относительно неподвижной системы координат, связанной с основанием манипулятора; $a_{x}(t)$, $a_{y}(t)$, $a_{z}(t)$ – проекции ускорения движения точки Р схвата относительно неподвижной системы координат, связанной с основанием манипулятора

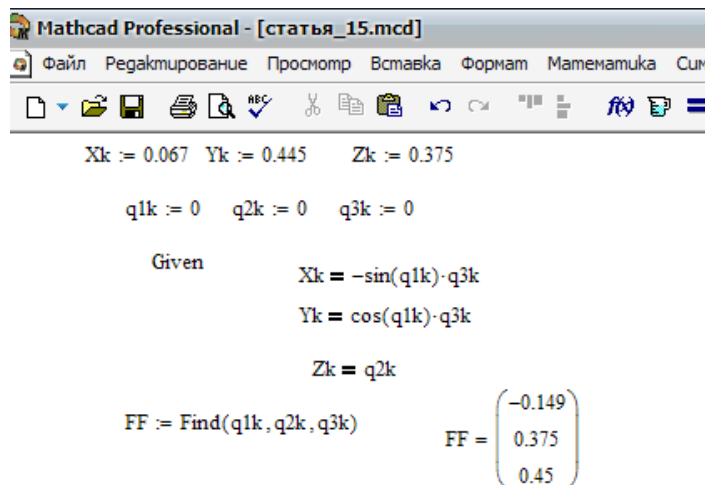


Рис. 4. Решение обратной задачи о положении манипулятора с использованием пакета прикладных программ Mathcad: X_k , Y_k , Z_k – координаты точки Р схвата относительно неподвижной системы координат, связанной с основанием манипулятора; FF – значения обобщенных координат q_{1k} , q_{2k} , q_{3k} обеспечивающие координаты X_k , Y_k , Z_k точки Р схвата

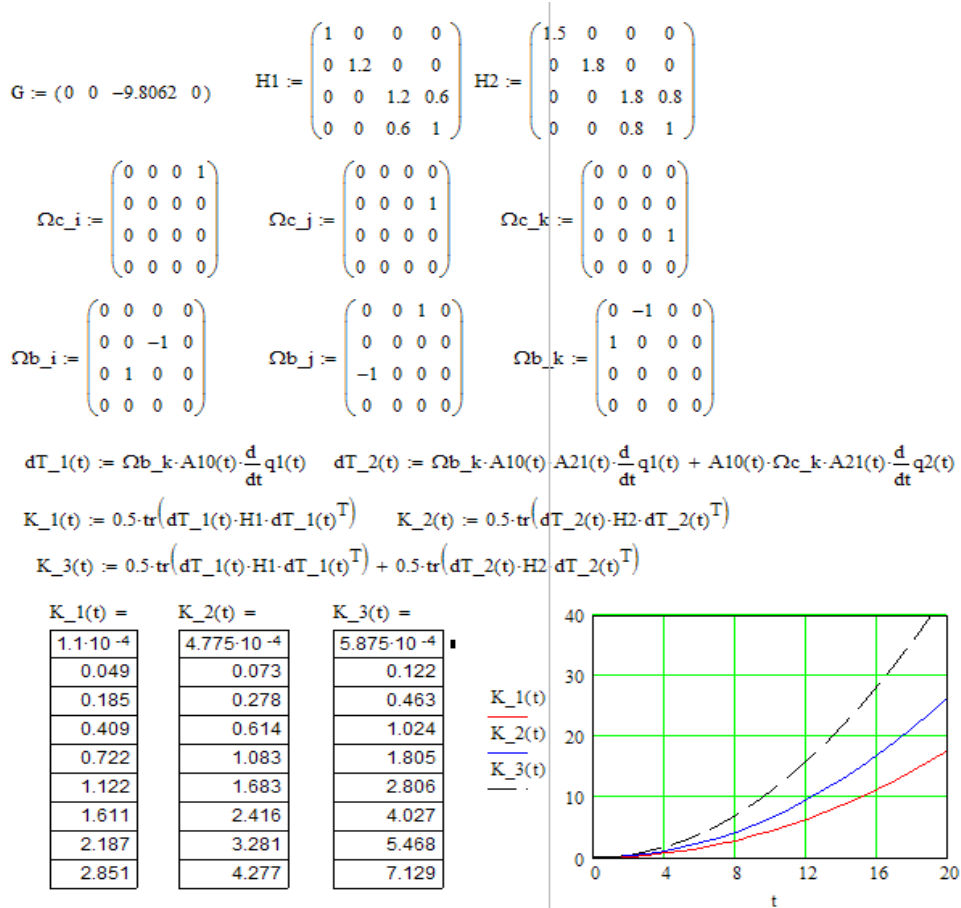


Рис. 5. Определение кинетической энергии манипулятора с использованием пакета прикладных программ Mathcad: H1, H2 – соответственно матрицы, характеризующие инерцию первого и второго звена манипулятора; K_1(t), K_2(t), K_3(t) – кинетическая энергия первого, второго и третьего звена относительно неподвижной системы координат, связанной с основанием манипулятора

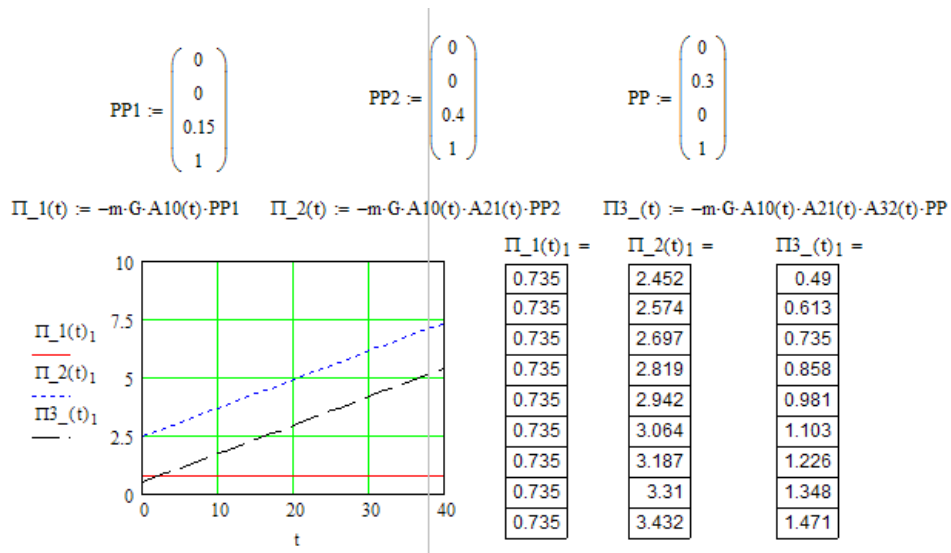


Рис. 6. Определение потенциальной энергии манипулятора с использованием пакета прикладных программ Mathcad: PP1, PP2, PP – соответственно координаты центров масс первого, второго и третьего звена относительно неподвижной системы координат, связанной с основанием манипулятора; Π_1(t), Π_2(t), Π_3(t) – соответственно потенциальная энергия первого, второго и третьего звена относительно неподвижной системы координат, связанной с основанием манипулятора

Следует отметить, что элементы матриц Ω_{c_i2} , Ω_{c_j2} , Ω_{c_k2} , Ω_{c_i2} , Ω_{c_j2} , Ω_{c_k2} – постоянные коэффициенты, не зависящие от начальных условий задачи.

Считая известными значения обобщенных координат $q_i(t_0)$ и скоростей $\dot{q}_i(t_0)$ в начальный момент времени t_0 , можно определить законы движения $q_i(t)$ по

заданным обобщенным силам $Q_i(t)$, $i=1, 2, 3$. Решение обратной задачи динамики манипулятора проводится на основании формул (8–10) с использованием встроенной функции Given пакета прикладных программ Mathcad.

Результаты математического моделирования движения манипулятора приведены на рис. 8.

The screenshot shows the Mathcad Professional interface with the following content:

Matrix definitions:

$$\Omega_{c_i2} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Omega_{c_j2} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Omega_{c_k2} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_{b_i2} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Omega_{b_j2} := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Omega_{b_k2} := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0.6 & 1 \end{pmatrix} \quad H2 := \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.8 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0.8 & 1 \end{pmatrix} \quad H3 := \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.8 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0.8 & 1 \end{pmatrix}$$

Coordinate transformation matrices:

$$U_{11}(t) := \Omega_{b_k} \cdot A10(t) \quad U_{12}(t) := 0 \quad U_{13}(t) := 0 \quad U_{111}(t) := (\Omega_{b_k2}) \cdot A10(t)$$

$$U_{21}(t) := \Omega_{b_k} \cdot A10(t) \cdot A21(t) \quad U_{22}(t) := A10(t) \cdot \Omega_{c_k} \cdot A21(t)$$

$$U_{211}(t) := (\Omega_{b_k2}) \cdot A10(t) \cdot A21(t) \quad U_{212}(t) := \Omega_{b_k} \cdot A10(t) \cdot \Omega_{c_k} \cdot A21(t) \quad U_{213}(t) := 0$$

$$U_{221}(t) := \Omega_{b_k} \cdot A10(t) \cdot \Omega_{c_k} \cdot A21(t) \quad U_{222}(t) := A10(t) \cdot (\Omega_{c_k2}) \cdot A21(t) \quad U_{223}(t) := 0$$

$$U_{31}(t) := \Omega_{b_k} \cdot A10(t) \cdot A21(t) \cdot A32(t) \quad U_{32}(t) := A10(t) \cdot \Omega_{c_k} \cdot A21(t) \cdot A32(t) \quad U_{33}(t) := A10(t) \cdot A21(t) \cdot \Omega_{c_j} \cdot A32(t)$$

$$U_{311}(t) := (\Omega_{b_k2}) \cdot A10(t) \cdot A21(t) \cdot A32(t) \quad U_{312}(t) := \Omega_{b_k} \cdot A10(t) \cdot \Omega_{c_k} \cdot A21(t) \cdot A32(t) \quad U_{313}(t) := \Omega_{b_k} \cdot A10(t) \cdot A21(t) \cdot \Omega_{c_j} \cdot A32(t)$$

$$U_{321}(t) := \Omega_{b_k} \cdot A10(t) \cdot \Omega_{c_k} \cdot A21(t) \cdot A32(t) \quad U_{322}(t) := A10(t) \cdot (\Omega_{c_k2}) \cdot A21(t) \cdot A32(t) \quad U_{323}(t) := A10(t) \cdot \Omega_{c_k} \cdot A21(t) \cdot \Omega_{c_j} \cdot A32(t)$$

$$U_{331}(t) := \Omega_{b_k} \cdot A10(t) \cdot A21(t) \cdot \Omega_{c_j} \cdot A32(t) \quad U_{332}(t) := A10(t) \cdot \Omega_{c_k} \cdot A21(t) \cdot \Omega_{c_j} \cdot A32(t) \quad U_{333}(t) := A10(t) \cdot A21(t) \cdot (\Omega_{c_j2}) \cdot A32(t)$$

Lagrangian equations:

$$Q_1(t) := (\text{tr}(U_{11}(t) \cdot H1 \cdot U_{11}(t)^T) + \text{tr}(U_{21}(t) \cdot H2 \cdot U_{21}(t)^T) + \text{tr}(U_{31}(t) \cdot H3 \cdot U_{31}(t)^T)) \cdot \frac{d^2}{dt^2} q1(t) +$$

$$+ (\text{tr}(U_{22}(t) \cdot H2 \cdot U_{22}(t)^T) + \text{tr}(U_{32}(t) \cdot H3 \cdot U_{32}(t)^T)) \cdot \frac{d^2}{dt^2} q2(t) + \text{tr}(U_{33}(t) \cdot H3 \cdot U_{33}(t)^T) \cdot \frac{d^2}{dt^2} q3(t);$$

$$Q_2(t) := (\text{tr}(U_{12}(t) \cdot H1 \cdot U_{111}(t)^T) + \text{tr}(U_{21}(t) \cdot H2 \cdot U_{211}(t)^T) + \text{tr}(U_{31}(t) \cdot H3 \cdot U_{311}(t)^T) +$$

$$+ \text{tr}(U_{31}(t) \cdot H1 \cdot U_{311}(t)^T) + \text{tr}(U_{12}(t) \cdot H2 \cdot U_{111}(t)^T)) \cdot \frac{d}{dt} q1(t) \cdot \frac{d}{dt} q2(t) +$$

$$+ (\text{tr}(U_{22}(t) \cdot H1 \cdot U_{221}(t)^T) + \text{tr}(U_{32}(t) \cdot H1 \cdot U_{321}(t)^T)) \cdot \frac{d}{dt} q2(t) \cdot \frac{d}{dt} q2(t) +$$

$$+ \text{tr}(U_{33}(t) \cdot H1 \cdot U_{331}(t)^T) \cdot \frac{d}{dt} q1(t) \cdot \frac{d}{dt} q3(t);$$

$$Q_3(t) := (\text{tr}(U_{13}(t) \cdot H1 \cdot U_{111}(t)^T) + \text{tr}(U_{21}(t) \cdot H2 \cdot U_{211}(t)^T) + \text{tr}(U_{31}(t) \cdot H3 \cdot U_{311}(t)^T)) \cdot \left(\frac{d}{dt} q1(t)\right)^2 +$$

$$+ (\text{tr}(U_{22}(t) \cdot H2 \cdot U_{221}(t)^T) + \text{tr}(U_{32}(t) \cdot H3 \cdot U_{321}(t)^T)) \cdot \left(\frac{d}{dt} q2(t)\right)^2 + \text{tr}(U_{33}(t) \cdot H3 \cdot U_{331}(t)^T) \cdot \left(\frac{d}{dt} q3(t)\right)^2.$$

Рис. 7. Составление матричного уравнения Лагранжа II рода: с использованием пакета прикладных программ Mathcad: H1, H2, H3 – соответственно матрицы, характеризующие инерцию первого, второго и третьего звена манипулятора; U_{ijk} – производные матриц преобразования координат; Ω_{c_i2} , Ω_{c_j2} , Ω_{c_k2} – вспомогательные матрицы для вычисления производных при поступательном движении второго звена; Ω_{b_i2} , Ω_{b_j2} , Ω_{b_k2} – вспомогательные матрицы для вычисления производных при вращательном движении второго звена; $Q_i(t)$ – обобщенные непотенциальные силы приложенные к i-ому звену; $i=1, 2, \dots, n$

Данный метод может использоваться при решении прямой и обратной задач кинематики, позволяет определить пределы досягаемости схвата и выполнить математическое моделирование движения манипулятора. Для спроектированной траектории перемещения манипулятора определяются необходимые силы и моменты в кинематических парах.

6. Выводы

В статье решена научно-прикладная задача анализа кинематики и динамики манипуляторов с использованием пакета прикладных программ Mathcad. Основные результаты исследования:

Для кинематического анализа:

1) Обобщена процедура составления матриц преобразования координат (матриц Денавита-Хартенберга) по приведенным шаблонам для вращательных и поступательных кинематических пар.

2) Формализовано представление перемещения особой точки Р манипулятора как последовательности движений по каждой обобщенной координате.

3) Положение особой точки Р манипулятора в системе координат связанной с основанием МПР, определяется перемножением матриц по формуле (2) в соответствии с цепочкой перемещений (1). Преобразование матриц выполняется с помощью встроенных функций пакета прикладных программ Mathcad.

4) Линейная и угловая скорость особой точки Р манипулятора в системе координат связанной с основанием МПР вычисляются по формулам (3) и (4),

ускорения определяются дифференцированием (3) и (4). Преобразование матриц и дифференцирование выполняется с помощью встроенных функций и операторов пакета прикладных программ Mathcad.

5) Наборы обобщенных координат $q_i(t_m), i=1,2,\dots,n$, соответствующих заданному положению особой точки Р манипулятора, рассчитываются решением системы (6). Решение трансцендентных уравнений выполняется с помощью встроенной функции Given пакета прикладных программ Mathcad.

Для динамического анализа:

1) По закону изменения обобщенных координат $q_i(t), i=1,2,\dots,n$ вычислены обобщенные силы $Q_{-i}(t)$, обеспечивающие это движение. Определение $Q_{-i}(t)$ сводится к выполнению формальных процедур преобразования известных матриц с использованием встроенных функций Mathcad, что уменьшает число ошибок при матричных вычислениях.

2) Определены законы движения $q_i(t), i=1,2,\dots,n$ по заданным обобщенным силам $Q_{-i}(t)$. Решение обратной задачи динамики манипулятора проводится с использованием встроенной функции Given пакета прикладных программ Mathcad.

3) Процесс решения задач анализа кинематики и динамики манипуляторов разбивается на простые вычислительные процедуры. Использование предложенного метода не требует написания, отладки и тестирования программ.

4) Приведены расчетные примеры, подтверждающие целесообразность и эффективность использования пакета прикладных программ Mathcad для решения данного типа задач.

Литература

1. Печников, А. Л. Перспективы развития робототехнических учебных стендов для высшего специального образования в области робототехники, автоматизации и мехатроники [Электронный ресурс] / А. Л. Печников, В. А. Жмудь, В. Г. Трубин, А. Б. Колкер // Труды конференции Scientific World – Перспективные инновации в науке, образовании, производстве и транспорте. – Новосибирск: НГТУ, 2012. – Режим доступа: <http://www.sworld.com.ua/index.php/ru/technical-sciences-212/informatics-computer-science-and-automation-212/13341-212-831>
2. Дусеев, В. Р. Управление роботом Lego NXT посредством Bluetooth [Текст] / В. Р. Дусеев // Вестник науки Сибири. Серия: Информационные технологии и системы управления. – 2014. – № 2 (12). – С. 147–153.
3. Нефедов, Г. А. Реализация алгоритма управления четырёхколёсным роботом Lego Mindstorms, обеспечивающего движение вдоль заданного пути [Текст] / Г. А. Нефедов // Молодёжный научно-технический вестник. – 2014. – № 2. – Режим доступа: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/551896.html>
4. Lego Education [Electronic resource]. – Available at: <http://www.legoeducation.com>
5. Mindstorms Education NXT [Electronic resource]. – Available at: <https://education.lego.com/nl-nl/lesi/middle-school/mindstorms-education-nxt>
6. Lego Engineering [Electronic resource]. – Available at: <http://www.legoengineering.com>
7. Robotics Academy. [Electronic resource]. – Available at: <http://www.education.rec.ri.cmu.edu>
8. Юревич, Е. И. Основы робототехники [Текст] / Е. И. Юревич. – СПб.: Питер, 2005. – 252 с.
9. Воробьев, Е. И. Механика промышленных роботов. В 2 ч. Ч. 1. Кинематика и динамика [Текст]: учеб. пос. / Е. И. Воробьев, С. А. Попов, Г. И. Шевелёва. – К.: Вища школа, 1988. – 304 с.
10. Бурдаков, С. Ф. Проектирование манипуляторов промышленных роботов и роботизированных комплексов [Текст] / С. Ф. Бурдаков, В. А. Дьяченко, А. Н. Тимофеев. – М.: Высшая школа, 1986. – 264 с.
11. Сокол, Г. І. Теорія механізмів робототехнічних систем. Кінематика: [Текст]: навч. пос. / Г. І. Сокол. – Дніпропетровськ: РВВ ДНУ, 2002. – 92 с.
12. Шахинпур, М. Курс робототехники [Текст] / М. Шахинпур; пер. с англ. С. С. Дмитриевой. – М.: Мир, 1990. – 527 с.
13. Ащепкова, Н. С. Моделирование и кинематический анализ кривошипно-шатунного механизма [Текст] / Н. С. Ащепкова // Вісник НТУ «ХПИ». Серия: Інформатика та моделювання. – 2014. – № 62 (1104). – С. 4–12.
14. Эйзеншпис, А. А. MathCad 2000. Руководство пользователя [Текст] / А. А. Эйзеншпис. – М.: ДМК Пресс. – 2001. – 570 с.
15. Котлярский, Л. Н. MathCad. Решение инженерных и экономических задач [Текст] / Л. Н. Котлярский. – СПб.: Питер, 2005. – 388 с.
16. Кудрявцев, Е. М. MathCad 2000 Pro [Текст] / Е. М. Кудрявцев – М.: ДМК Пресс, 2001. – С. 530–540.