ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 11 Март 1971 Апрель № 2

УДК 518 : 519.3 : 62-50

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ФАЗОВЫЕ КООРДИНАТЫ

Ф. П. ВАСИЛЬЕВ, Р. П. ИВАНОВ

(Москва)

Рассматривается задача быстродействия для линейных управляемых систем с элементами из банахова пространства и с управлениями из заданного множества топологического линейного пространства: за минимальное время перевести систему из одного множества на другое множество, соблюдая фазовые ограничения весьма общего вида. Предлагается и обосновывается итерационный метод и одна его модификация для приближенного решения этой задачи. Показывается, что этот метод может быть применен для приближенного решения многих практически важных задач быстродействия, связанных с различными уравнениями математической физики. Доказывается существование регуляризирующего алгоритма, тесно связанного с рассматриваемым итерационным методом.

§ 1. Постановка задачи

Пусть U — заданное подмножество топологического линейного пространства $\bar{U}$, элементы $u \in U$ будем называть управлением. Пусть t — время, а t_0 — известный начальный момент времени. Пусть при каждом $t \geqslant t_0$ задано множество $\Omega[t_0, t]$ функций $x(\tau)$, определенных на отрезке $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$ и принимающих свои значения из заданного банахова пространства B, причем если $x(\tau) \in \Omega[t_0, t]$, то $x(\tau) \in \Omega[t_0, t']$ при любом $t_0 \leqslant t' \leqslant t$. Функцию $x(\tau) \in \Omega[t_0, t]$ назовем возможной траекторией. Пусть при всех $t \geqslant t_0$ задано отображение, ставящее каждому $u \in U$ в соответствие возможную траекторию $x(\tau, u) \in \Omega[t_0, t]$. Далее, пусть $G(t)$, $t \geqslant t_0$,— заданные множества из B, а $J_\alpha(x(\tau), u, t)$ $(\alpha \in A$ — известное множество индексов) — функционалы, определенные на топологическом произведении $\Omega[t_0, t] \times U \times [t_0 \leqslant t < +\infty]$. Примем, что траектория $x(\tau, u) \in \Omega[t_0, t]$ удовлетворяет фазовым ограничениям, если $x(\tau, u) \in G(\tau)$ при $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$ и $J_\alpha(x(\tau, u), u, t) \leqslant 0$ $(\alpha \in A)$, и такую траекторию назовем допустимой на $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$. Подмножество всех тех $u \in U$, для которых соответствующая траектория $x(\tau, u)$ допустима на $[t_0, t]$, обозначим через $U(t)$. Наконец, пусть $Y(t)$, $t \geqslant t_0$, — заданные множества из B.

Задача быстродействия заключается в отыскании таких T^* и $u^* \in U(T^*)$, что $x(T^*, u^*) \in Y(T^*)$, причем для других T и $u \in U(T)$, для которых $x(T, u) \in Y(T)$, справедливо неравенство $T \geqslant T^*$. Такой момент T^* и управление $u^* \in U(T^*)$ назовем оптимальными.

Задачу быстродействия мы будем рассматривать при следующих условиях.

Условия А. 1. Множество U выпукло и бикомпактно в топологии пространства $\bar{U}$.

2. $x(\tau, \alpha u + (1-\alpha)v) = \alpha x(\tau, u) + (1-\alpha)x(\tau, v)$ при всех $t_0 \leqslant \tau \leqslant \leqslant t$, $u, v \in U$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $t \geqslant t_0$.

3. Для любой сети $\{u_\lambda\} \subset U$ ([1], стр. 29), сходящейся к $u \in U$ в топологии $\bar{U}$, соответствующая сеть $\{x(\tau, u_\lambda)\} \subset B$ сходится к $x(\tau, u)$ в слабой топологии B при всех $\tau \geqslant t_0$.

4. Множества $G(t)$ выпуклы и замкнуты в B при всех $t \geqslant t_0$.

5. Функционалы $J_\alpha(x(\tau), u, t)$, $\alpha \in A$, выпуклы по совокупности $(x(\tau), u) \in \Omega[t_0, t] \times U$, $J_\alpha(x(\tau, u), u, t)$ полунепрерывны снизу по $u \in U$.

6. Множества $Y(t)$ выпуклы и замкнуты в B при всех $t \geqslant t_0$.

При описании и исследовании сходимости приводимого ниже метода решения задачи быстродействия нам понадобятся более жесткие условия.

Условия Б. 1. Выполнены все условия А.

2. $\sup\limits_{u \in U} \|x(\tau, u) - x(t, u)\|_B \to 0$ при $\tau \to t$.

3. Если последовательность $\{x_k\}$ сходится к x по норме B, $x_k \in G(t_k)$, $t_k \leqslant t$, $t_k \to t$, $k \to \infty$, то $x \in G(t)$.

4. Если $J_\alpha(x, (\tau, u), u, t) \leqslant 0$, то $J_\alpha(x(\tau, u), u, t') \leqslant 0$ при любых t', $t_0 \leqslant t' \leqslant t$, а также

$$\varliminf_{t \to t'-0} J_\alpha(x(\tau, u), u, \tau) \geqslant J_\alpha(x(\tau, u), u, t'), \quad \alpha \in A.$$

5. $\lim\limits_{\tau \to t} \sup\limits_{a \in Y(t)} \min\limits_{y \in Y(\tau)} \|a - y\|_B = 0$, $\lim\limits_{\tau \to t-0} \sup\limits_{a \in Y(t)} \min\limits_{y \in Y(\tau)} \|a - y\|_B = 0$,

множества $Y(t)$ слабо бикомпактны, $t \geqslant t_0$.

§ 2. Вспомогательный аппарат. Критерий управляемости и оптимальности

Обозначим через $X(t)$ множество правых концов всевозможных допустимых на отрезке $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$ траекторий $x(\tau, u)$, т. е. $x \in X(t)$, если существует управление $u \in U(t)$ такое, что $x(t, u) = x$.

Лемма 1. *Если выполнены условия А, то множество $X(t)$ при всех $t \geqslant t_0$ выпукло, слабо бикомпактно в B.*

Доказательство. Выпуклость $X(t)$ непосредственно следует из выпуклости множеств $G(\tau)$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$, функционалов $J_\alpha(x(\tau), u, t)$ $(\alpha \in A)$ и условия А, 2. Для доказательства слабой бикомпактности $X(t)$ возьмем произвольную сеть $\{x_\lambda\} \subset X(t)$. Тогда существует $u_\lambda \in U(t)$ такое, что $x_\lambda = x(t, u_\lambda)$. В силу бикомпактности U найдется подсеть $\{u_\mu\}$ сети $\{u_\lambda\}$, сходящаяся к некоторому $u \in U$. А тогда, согласно условию А, 3,

$x(\tau, u_\mu) \underset{\mu}{\to} x(\tau, u)$ слабо в B при всех $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$. Из условия А,4 следует слабая замкнутость $G(\tau)$ в B, поэтому $x(\tau, u) \in G(\tau)$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$, а из А,5 имеем

$$0 \geqslant \varliminf_{\mu} J_\alpha(x(\tau, u_\mu), u_\mu, t) \geqslant J_\alpha(x(\tau, u), u, t).$$

Следовательно, $u \in U(t)$, $\{x_\mu\} \to x(t, u) \in X(t)$. Лемма доказана. Попутно установлены выпуклость и бикомпактность $U(t)$ в $\tilde{U}$ при любом $t \geqslant t_0$.

Из леммы 1 и условия А следует выпуклость и слабая замкнутость множества $Z(t) \equiv X(t) - Y(t)$. Определим функционал

$$M(c, t) = \inf_{z \in Z(t)} \langle c, z\rangle = \inf_{y \in Y(t)} \min_{x \in X(t)} \langle c, x - y\rangle = \min_{x \in X(t)} \langle c, x\rangle - \sup_{y \in Y(t)} \langle c, y\rangle,$$

где c принадлежит пространству B^*, сопряженному к B, а $\langle c, z\rangle$ — значение функционала $c \in B^*$ на элементе $z \in B$. При условии Б,5 существование элемента $z_{c,t} = x_{c,t} - y_{c,t} \in Z(t)$, $x_{c,t} \in X(t)$, $y_{c,t} \in Y(t)$, такого, что $M(c, t) = \langle c, x_{c,t} - y_{c,t}\rangle$, следует из слабой непрерывности $\langle c, z\rangle$ по z и слабой бикомпактности $Z(t)$.

Отметим следующие свойства функционала $M(c, t)$: 1) $M(\alpha c, t) = \alpha M(c, t)$ при любых $c \in B^*$, $t \geqslant t_0$, $\alpha > 0$; 2) $M(c, t)$ полунепрерывна сверху по c в B-топологии B^*. В самом деле, если сеть $\{c_\lambda\} \to c$, то из

$$M(c_\lambda, t) \leqslant \inf_{y \in Y(t)} \langle c_\lambda, x_{c,t} - y\rangle$$

и [1], стр. 28, следует, что

$$\varlimsup_{\lambda} M(c_\lambda, t) \leqslant \inf_{y \in Y(t)} \langle c, x_{c,t} - y\rangle = M(c, t).$$

Введем функцию

$$\rho(t) = \max_{\|c\| \leqslant 1} M(c, t) = \max_{\|c\| \leqslant 1} \inf_{z \in Z(t)} \langle c, z\rangle.$$

Существование такого c_t, $\|c_t\| \leqslant 1$, что $\rho(t) = M(c_t, t)$, следует из полунепрерывности сверху $M(c, t)$ по c и бикомпактности шара $S = \{c\colon c \in B^*, \|c\| \leqslant 1\}$ в B-топологии пространства B (см. [2], стр. 459). Пусть

$$\rho(X, Y) = \inf_X \inf_Y \|x - y\|$$

есть расстояние между множествами $X \subset B$ и $Y \subset B$.

Лемма 2. *Если выполнены условия* А, *то*

$$\rho(t) = \rho(X(t), Y(t)) = \min_{X(t)} \inf_{Y(t)} \|x - y\|.$$

Доказательство. Так как функционал $\langle c, z\rangle$ непрерывен по c в B-топологии B^*, а шар S бикомпактен в той же топологии, то существует $\max\limits_{\|c\| \leqslant 1} \langle c, z\rangle = g(z)$. Имеет смысл говорить также и о $\max\limits_{\|c\| \leqslant 1} \inf\limits_{Z(t)} \langle c, z\rangle$, ибо $\inf\limits_{Z(t)} \langle c, z\rangle$ полунепрерывен сверху по c в B-топологии пространства B^* ([1], стр. 28). Справедливо равенство [3]

$$(2.1)\qquad \max_{\|c\|\leqslant 1}\inf_{z\in Z(t)}\langle c,z\rangle=\inf_{z\in Z(t)}\max_{\|c\|\leqslant 1}\langle c,z\rangle,$$

из которого сразу же следует утверждение леммы, ибо $\max\limits_{\|c\|\leqslant 1}\langle c,z\rangle=\|z\|$.

Приведем более простое доказательство равенства (2.1), считая, что множества $Y(t)$ слабо бикомпактны в B, $t\geqslant t_0$ (ср. с [3]). Если $0\in Z(t)$, то (2.1) вытекает из неравенств

$$0\leqslant\max_{\|c\|\leqslant 1}\min_{z\in Z(t)}\langle c,z\rangle\leqslant\min_{z\in Z(t)}\max_{\|c\|\leqslant 1}\langle c,z\rangle\leqslant 0.$$

Пусть $0\notin Z(t)$. Тогда

$$\min_{z\in Z(t)}\|z\|=\|z_0\|>0,\qquad z_0\in Z(t).$$

В силу теоремы 8 из [2], стр. 452, существует функционал $c_0\in B^*$, $\|c_0\|=1$, разделяющий множества $Z(t)$ и $K=\{z\colon z\in B,\ \|z\|\leqslant\|z_0\|\}$, т. е.

$$\sup_{z\in K}\langle c_0,z\rangle=\min_{z\in Z(t)}\langle c_0,z\rangle.$$

Так как

$$\|z_0\|=\sup_{z\in K}\|z\|=\sup_{z\in K}\langle c_0,z\rangle\leqslant\min_{z\in Z(t)}\langle c_0,z\rangle=\|z_0\|,$$

то

$$\|z_0\|=\min_{z\in Z(t)}\langle c_0,z\rangle.$$

Из неравенств

$$\max_{\|c\|\leqslant 1}\min_{z\in Z(t)}\langle c,z\rangle\leqslant\min_{z\in Z(t)}\max_{\|c\|\leqslant 1}\langle c,z\rangle=\|z_0\|=\min_{z\in Z(t)}\langle c_0,z\rangle\leqslant\max_{\|c\|\leqslant 1}\min_{z\in Z(t)}\langle c,z\rangle$$

следует (2.1). Попутно получили, что в равенстве $\rho(t)=M(c_t,t)=\langle c_t,z_t\rangle$ при $0\in Z(t)$ можно положить $c_t=0$, $z_t=0$, а при $0\notin Z(t)$ здесь $c_t=c_0$, $z_t=z_0$.

Из леммы 2 и определений $\rho(t)$, $M(c,t)$ непосредственно вытекает

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* А. *Тогда для того, чтобы T^* было оптимальным временем, необходимо и достаточно, чтобы $\rho(T^*)=0$ и $\rho(t)>0$ при $t_0\leqslant t<T^*$, или, в эквивалентной форме, T^* есть наименьший момент времени T, при котором выполняется неравенство*

$$(2.2)\qquad M(c,T)\leqslant 0\quad\text{или}\quad\min_{x\in X(t)}\langle c,x\rangle\leqslant\sup_{y\in Y(t)}\langle c,y\rangle$$

для всех $c\in B^*$.

С помощью леммы 2 нетрудно сформулировать также и критерии управляемости системы $\{x(\tau,u),\ u\in U\}$.

Определение. Систему $\{x(\tau,u),\ u\in U\}$ назовем $U(T)$-управляемой, если существует управление $u\in U(T)$ такое, что соответствующая траектория $x(\tau,u)$, $t_0\leqslant\tau\leqslant T$, удовлетворяет условию $x(T,u)\in Y(T)$, т. е. $X(T)\cap Y(T)\neq\varnothing$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* А. *Тогда система $\{x(\tau,u),\ u\in U\}$ будет $U(T)$-управляема тогда и только тогда, когда $\rho(T)=0$ или неравенство* (2.2) *выполняется при всех $c\in B^*$.*

Аналогичные условия управляемости при других предположениях были получены в [4].

Предполагая выполненными условия Б, исследуем свойства $M(c, t)$, $\rho(t)$ по переменной t.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* Б. *Тогда множество* $Z(t) = X(t) - Y(t)$ *обладает следующими свойствами*: а) *для любой последовательности* $\{t_k\} \to t$ *и любых* $z_k \in Z(t_k)$ *последовательность* $\{z_k\}$ *имеет хотя бы одну слабую предельную точку* $z \in Z(t)$, $t \geqslant t_0$; б) *для любого* $z \in Z(t)$, $t \geqslant t_0$, *и любой последовательности* $\{t_k\} \to t$, $t_k \leqslant t$, $k = 1, 2, \ldots$, *существуют* $z_k \in Z(t_k)$ *такие, что* $\|z_k - z\| \to 0$ *при* $k \to \infty$.

Доказательство. Покажем, что каждое из множеств $X(t)$ и $Y(t)$ обладает свойствами а) и б). Начнем с $Y(t)$. Возьмем произвольные t_k, $t_k \to t$, и $y_k \in Y(t_k)$. Пусть $\min\limits_{y \in Y(t)} \|y_k - y\| = \|y_k - y_k(t)\|$. Так как $Y(t)$ слабо бикомпактно, то последовательность $\{y_k(t)\}$ имеет подсеть $\{y_\lambda(t)\}$, слабо сходящуюся к некоторому $y \in Y(t)$. Тогда с учетом условия Б,5 для любого $c \in B^*$ имеем

$$\lim_\lambda |\langle c, y - y_\lambda\rangle| \leqslant \lim_\lambda |\langle c, y - y_\lambda(t)\rangle| + \lim_\lambda \|c\| \|y_\lambda(t) - y_\lambda\| =$$

$$= \lim_\lambda \|c\| \min_{y \in Y(t)} \|y - y_\lambda\| = \|c\| \lim_\lambda \sup_{a \in Y(t_\lambda)} \min_{y \in Y(t)} \|a - y\| = 0.$$

Таким образом, $y \in Y(t)$ — слабая предельная точка последовательности $\{y_k\}$. Покажем, что $Y(t)$ обладает также и свойством б). Возьмем произвольный $y \in Y(t)$ и произвольную последовательность $\{t_k\} \to t$, $t_k \leqslant t$ $(k \to \infty)$. Пусть $\min\limits_{a \in Y(t_k)} \|a - y\| = \|y_k - y\|$. Последовательность $\{y_k\}$, $y_k \in Y(t_k)$, искомая, так как

$$\|y_k - y\| = \min_{a \in Y(t_k)} \|a - y\| \leqslant \sup_{y \in Y(t)} \min_{a \in Y(t_k)} \|a - y\| \to 0,$$

$k \to \infty$, в силу условия Б,5.

Рассмотрим множество $X(t)$. Пусть сначала $\tau \to t + 0$. Возьмем произвольное $x = x(\tau, u_\tau) \in X(\tau)$. Так как $\tau \geqslant t$, то из $u_\tau \in U(\tau)$ следует $u_\tau \in U(t)$. Поэтому $x(t, u_\tau) \in X(t)$. Тогда в силу Б,2.

$$\sup_{a \in X(\tau)} \min_{x \in X(t)} \|x - a\| \leqslant \sup_{u_\tau \in U(\tau)} \|x(t, u_\tau) - x(\tau, u_\tau)\| \to 0$$

при $\tau \to t + 0$. Отсюда свойство а) при $\tau \to t + 0$ для $X(t)$ выводится так же, как и для $Y(t)$.

Пусть теперь $\tau \to t - 0$. Возьмем произвольные $t_k \leqslant t$, $\{t_k\} \to t$, и $x_k = x(t_k, u_k) \in X(t_k)$. В силу бикомпактности U последовательность $\{u_k\}$, $u_k \in U(t_k)$, имеет подсеть $\{u_\lambda\}$, сходящуюся к некоторому $u \in U$. В силу условия А, 3, $\{x(\tau, u_\lambda)\}$ при всех τ, $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$, слабо сходится к $x(\tau, u)$. Так как при любом γ, $t_0 \leqslant \gamma < t$, $u_k \in U(\gamma)$ для всех достаточно больших k, то $u \in U(\gamma)$ при всех γ, $t_0 \leqslant \gamma < t$. Из условия Б, 2 вытекает $\|x(\tau, u) - x(t, u)\| \to 0$ при $\tau \to t - 0$, а тогда, в силу Б, 3, $x(t, u) \in G(t)$. Из Б, 4 имеем

$$J_a(x(\tau,u),u,t)\leqslant\varliminf_{\gamma\to t-0}J_a(x(\tau,u),u,\gamma)\leqslant 0,\quad a\in A.$$

Следовательно, $u\in U(t)$, $x(t, u)\in X(t)$. Тогда из неравенства $|\langle c, x(t, u)-x(t_\lambda, u_\lambda)\rangle|\leqslant|\langle c, x(t, u)-x(t, u_\lambda)\rangle|+\|c\|\|x(t, u_\lambda)-x(t_\lambda, u_\lambda)\|$, где $c\in B^*$, и условий А, 3 и Б, 2 вытекает слабая сходимость сети $\{x(t_\lambda, u_\lambda)\}$ к $x(t, u)\in X(t)$. Следовательно, $X(t)$ обладает свойством а). Свойство б) для $X(t)$ очевидно: для любого $x=x(t, u)\in X(t)$ и любых $t_k\leqslant t$, $t_k\to t$, $k\to\infty$, в качестве искомых x_k можно взять $x_k=x(t_k, u)\in X(t_k)$. Впрочем, здесь нетрудно показать, что

$$\sup_{x\in X(t)}\min_{a\in X(\tau)}\|a-x\|\to 0\quad\text{при}\quad\tau\to t-0.$$

Таким образом, множества $X(t)$, $Y(t)$ обладают свойствами а) и б), следовательно, ими обладает также и $Z(t)$, $t\geqslant t_0$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия* Б. *Тогда функции* $M(c, t)$, $\rho(t)$ *полунепрерывны снизу и непрерывны слева по* t, *т. е.*

$$\varliminf_{\tau\to t}M(c,\tau)\geqslant M(c,t),\quad \varliminf_{\tau\to t}\rho(\tau)\geqslant\rho(t),\quad t\geqslant t_0,\tag{2.3}$$

$$\lim_{\tau\to t-0}M(c,\tau)=M(c,t),\quad \lim_{\tau\to t-0}\rho(\tau)=\rho(t),\quad t\geqslant t_0.\tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть

$$\varliminf_{\tau\to t}M(c,\tau)=\lim_{k\to\infty}M(c,t_k)=\lim_{k\to\infty}\langle c, z_{c,t_k}\rangle,\ z_{c,t_k}\in Z(t_k),\ t_k\to t.$$

В силу свойства а) множества $Z(t)$ (см. лемму 3) последовательность $\{z_{c,t_k}\}$ имеет хотя бы одну слабую предельную точку $z\in Z(t)$. Поэтому

$$\varliminf_{\tau\to t}M(c,\tau)=(\langle c,z\rangle)\geqslant\min_{z\in Z(t)}\langle c,z\rangle=M(c,t).$$

Отсюда и из $\rho(\tau)=M(c_\tau,\tau)\geqslant M(c_t,\tau)$ имеем

$$\varliminf_{\tau\to t}\rho(\tau)\geqslant\varliminf_{\tau\to t}M(c_t,\tau)\geqslant M(c_t,t)=\rho(t).$$

Соотношения (2.3) доказаны. Далее, пусть

$$\varlimsup_{\tau\to t-0}M(c,\tau)=\lim_{k\to\infty}M(c,t_k)=\lim_{k\to\infty}\langle c,z_{c,t_k}\rangle,$$

$$z_{c,t_k}\in Z(t_k),\quad t_k\leqslant t,\quad t_k\to t,\quad k\to\infty.$$

В силу свойства б) множества $Z(t)$ (см. лемму 3) существует $z_k\in Z(t_k)$, $\|z_k-z_{c,t}\|\to 0$, $k\to\infty$. Так как

$$[\langle c, z_{c,t_k}\rangle]\leqslant[\langle c, z_k\rangle],$$

то

$$\varlimsup_{\tau\to t-0}M(c,\tau)=\lim_{k\to\infty}M(c,t_k)\leqslant\lim_{k\to\infty}\langle c,z_k\rangle=\langle c,z_{c,t}\rangle=M(c,t).$$

Отсюда и из (2.3) имеем

$$\lim_{\tau\to t-0}M(c,\tau)=M(c,t),\quad t\geqslant t_0.$$

Наконец, пусть $\rho(\tau)=\|z_\tau\|$, $z_\tau\in Z(\tau)$ (см. лемму 2), и

$$\overline{\lim_{\tau\to t-0}}\,\rho(\tau)=\lim_{k\to\infty}\rho(t_k)=\lim_{k\to\infty}\|z_{t_k}\|,\qquad z_{t_k}\in Z(t_k),$$

$$t_k\leqslant t,\quad t_k\to t,\quad k\to\infty.$$

В силу свойства б) множества $Z(t)$ существует $z_k\in Z(t_k)$, $\|z_k-z_t\|\to 0$, $k\to\infty$. Так как $\|z_{t_k}\|\leqslant\|z_k\|$, то

$$\overline{\lim_{\tau\to t-0}}\,\rho(\tau)=\lim_{k\to\infty}\|z_{t_k}\|\leqslant\lim_{k\to\infty}\|z_k\|=\|z_t\|=\rho(t).$$

Отсюда и из (2.3) следует $\lim\limits_{\tau\to t-0}\rho(\tau)=\rho(t)$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть система $\{x(\tau, u),\ u\in U\}$ будет $U(T)$-управляемой, выполнены условия* Б, *и пусть $M(c, s)>0$ при некотором s, $t_0\leqslant s<T$. Тогда существует такое t, $s<t\leqslant T$, что $M(c, t)=0$, $M(c, \tau)>0$ при $s\leqslant\tau<t$.*

Доказательство. Рассмотрим множество $\Lambda=\{\lambda\colon M(c, \lambda)\leqslant 0,\ s\leqslant\lambda\}$. В силу $U(T)$-управляемости оно непусто и ограничено снизу числом s. Возьмем $t=\inf\Lambda$. Из полунепрерывности $M(c, t)$ снизу и $M(c, s)>0$ следует, что $t>s$. Так как $M(c, \tau)>0$ при $s\leqslant\tau<t$, то $\lim\limits_{\tau\to t-0}M(c, \tau)\geqslant 0$. С другой стороны, в силу определения t существует последовательность $\{t_k\}$, $t_k\geqslant t$, такая, что $M(c, t_k)\leqslant 0$. Следовательно, $\underline{\lim}_{\tau\to t+0}M(c,\tau)\leqslant 0$. С учетом (2.3), (2.4) имеем

$$0\leqslant\lim_{\tau\to t-0}M(c,\tau)=M(c, t)\leqslant\underline{\lim}_{\tau\to t+0}M(c,\tau)\leqslant 0,$$

т. е. $M(c, t)=0$.

Замечание. Если выполнены условия Б, множество $Y(t)$ непрерывно по t в смысле Хаусдорфа (т. е. наряду с Б, 5 еще $\sup\limits_{a\in Y(t)}\min\limits_{y\in Y(\tau)}\|y-a\|\to 0$ при $\tau\to t+0$) и фазовые ограничения отсутствуют (т. е. $G(t)\equiv B$, $A=\varnothing$), то функции $M(c, t)$, $\rho(t)$ непрерывны по t, $t\geqslant t_0$, множество $X(t)$ непрерывно по t в смысле Хаусдорфа. В этом случае лемма 5 является простым следствием непрерывности $M(c, t)$ по t.

§ 3. Описание метода. Сходимость

В этом параграфе всюду будем предполагать, что выполнены условия Б и система $\{x(\tau, u),\ u\in U\}$ при некотором T, $t_0<T<\infty$, $U(T)$-управляема. Опишем метод. В качестве начального приближения возьмем t_0, $u_0\in U(t_0)$, $x_0=x(t_0, u_0)\in X(t_0)$, $y_0\in Y(t_0)$, $c_0\in B^*$, $\|c_0\|\leqslant 1$, такие, что $\rho(t_0)=M(c_0, t_0)=\|x_0-y_0\|$. Естественно считать, что $\rho(t_0)>0$, ибо в противном случае t_0 — оптимальное время. Пусть известно $(k-1)$-е приближение $(k\geqslant 1)$: t_{k-1}, $u_{k-1}\in U(t_{k-1})$, $x_{k-1}=x(t_{k-1}, u_{k-1})\in X(t_{k-1})$, $y_{k-1}\in Y(t_{k-1})$, $c_{k-1}\in B^*$, $\|c_{k-1}\|\leqslant 1$, причем $\rho(t_{k-1})=M(c_{k-1}, t_{k-1})=\|x_{k-1}-y_{k-1}\|$, $\rho(t)>0$ при $t_0\leqslant t\leqslant t_{k-1}$, $t_0<t_1<\ldots<t_{k-1}<T$. Так как $M(c_{k-1}, t_{k-1})>0$, то в силу леммы 5 найдется такое t_k, $t_{k-1}<t\leqslant T$, что $M(c_{k-1}, t_k)=0$, $M(c_{k-1}, t)>0$ при $t_{k-1}\leqslant t<t_k$. Далее определяются

такие $u_k \in U(t_k)$, $x_k = x(t_k, u_k) \in X(t_k)$, $y_k \in Y(t_k)$, $c_k \in B^*$, что $\|c_k\| \leqslant 1$, $\rho(t_k) = M(c_k, t_k) = \|x_k - y_k\|$. Так как $\rho(t) > 0$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_{k-1}$ по предположению, а в силу выбора t_k будет $\rho(t) \geqslant M(c_{k-1}, t) > 0$ при $t_{k-1} \leqslant t \leqslant \geqslant t_k$, то $\rho(t) > 0$ при $t_0 \leqslant t < t_k$. Поэтому если $\rho(t_k) = 0$, то в силу теоремы 1 время t_k оптимально, и процесс на этом заканчивается. Если же $\rho(t_k) > 0$, то $t_k < T$, и процесс продолжается дальше.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* Б *и система* $\{x(\tau, u), u \in U\}$ *будет* $U(T)$*-управляемой. Тогда существует по крайней мере одно решение задачи быстродействия, причем это решение может быть получено как предел описанного выше итерационного процесса, т. е.*

1) $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = T^*$ *— оптимальное время;*

2) *любая предельная точка* u^* *последовательности* $\{u_k\}$ *является оптимальной и* $y^* = x(T^*, u^*)$ *— слабопредельная точка последовательности* $\{y_k\}$.

Доказательство. Так как последовательность $\{t_k\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху величиной T, то существует $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = T^*$ (здесь мы, естественно, предполагаем, что процесс не заканчивается за конечное число шагов). Из (2.4) следует $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(t_k) = \rho(T^*)$. Покажем, что $\rho(T^*) = 0$. Пусть $M(c_k, t_{k+1}) = \langle c_k, x(t_{k+1}, \bar{u}_{k+1}) - \bar{y}_{k+1}\rangle$, $\bar{u}_{k+1} \in U(t_{k+1})$, $\bar{y}_{k+1} \in Y(t_{k+1})$. Заметим, что $x(t_k, \bar{u}_{k+1}) \in X(t_k)$ и $\|x(t_k, \bar{u}_{k+1}) - x(t_{k+1}, \bar{u}_{k+1})\| \to 0$, $k \to \infty$, в силу условия Б, 2. Кроме того из условия Б, 5 вытекает существование таких $\tilde{y}_k \in Y(t_k)$, что $\|\bar{y}_{k+1} - \tilde{y}_k\| \to 0$, $k \to \infty$. В самом деле, спачала выберем $a_k \in Y(T^*)$ из условия $\|\bar{y}_{k+1} - a_k\| = \min\limits_{a \in Y(T^*)} \|\bar{y}_{k+1} - a\|$, затем $\tilde{y}_k \in Y(t_k)$ из условия $\|\tilde{y}_k - a_k\| = \min\limits_{y \in Y(t_k)} \|y - a_k\|$. Так как

$$\|\bar{y}_{k-1} - a_k\| \leqslant \sup_{y \in Y(t_{k+1})} \min_{a \in Y(T^*)} \|a - y\| \to 0, \quad \|\tilde{y}_k - a_k\| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{a \in Y(T^*)} \min_{y \in Y(t_k)} \|y - a\| \to 0, \quad k \to \infty,$$

то $\|\bar{y}_{k+1} - \tilde{y}_k\| \to 0$, $k \to \infty$.

Поэтому с учетом равенства $M(c_k, t_{k+1}) = 0$ имеем $0 < \rho(t_k) = \langle c_k, x_k - y_k\rangle \leqslant \langle c_k, x(t_k, \bar{u}_{k+1}) - \tilde{y}_k\rangle - \langle c_k, x(t_{k+1}, \bar{u}_{k+1}) - \bar{y}_{k+1}\rangle \leqslant \|x(t_k, \bar{u}_{k+1}) - x(t_{k+1}, \bar{u}_{k+1})\| + \|\bar{y}_{k+1} - \tilde{y}_k\| \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно, $\rho(T^*) = 0$. Так как $\rho(t) > 0$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_k$, $k = 0, 1, \ldots$, то $\rho(t) > 0$ при $t_0 \leqslant t < T^*$. Таким образом, в силу теоремы 1, T^* — оптимальное время.

Пусть u^* — предельная точка последовательности $\{u_k\}$. Тогда $\{u_k\}$ имеет подсеть $\{u_\lambda\}$, сходящуюся к u^*. Как и при доказательстве леммы 3, можно установить, что $u^* \in U(T^*)$, $x(t_\lambda, u_\lambda) \xrightarrow[\lambda]{} x(T^*, u^*)$ слабо в B. Далее, $|\langle c, x_k - y_k\rangle| \leqslant \|c\| \|x_k - y_k\| \to 0$, $k \to \infty$, при любом $c \in B^*$, поэтому подсеть $\{y_\lambda\}$ слабо сходится также к $x(T^*, u^*) \in X(T^*)$. Однако в силу свойства а) множества $Y(t)$ (см. лемму 3) слабый предел y^* подсети $\{y_\lambda\}$ принадлежит $Y(T^*)$. Следовательно, $x(T^*, u^*) \in Y(T^*)$, т. е. u^* — оптимальное управление.