ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 4 Ноябрь 1964 Декабрь № 6

УДК 518:51:62-50

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Р. П. ФЕДОРЕНКО

(Москва)

Возникающие в настоящее время в приложениях вариационные задачи имеют существенно неклассический характер из-за необходимости учитывать некоторые ограничения на область изменения фазовых переменных и искомых управляющих функций. Теоретические основы таких задач разработаны Л. С. Понтрягиным и его учениками. Хотя использовать сформулированный Понтрягиным «принцип максимума» непосредственно для нахождения оптимального управления пока удается только в самых простых случаях, тем не менее то геометрически очень наглядное доказательство «принципа», которое приведено в [1], подсказало автору способ приближенного решения задач оптимального управления. Настоящая работа посвящена в основном описанию численного метода и иллюстрации его эффективности на задачах, возникающих в приложениях, однако в ходе практической работы оказалось полезным несколько изменить формализм, развитый в [1], с тем, чтобы охватить возникшие задачи. Эти изменения носят в основном формальный характер и касаются вопросов, перечисленных ниже.

1. Мы рассматриваем задачу с общим дифференциальным оператором (а не с оператором, соответствующим задаче Коши, как в [1]). Это обобщение было сделано для задачи о нахождении оптимальных композиций защит от излучения.

В этом случае оператор L_0 является дифференциальным выражением, в котором x имеет более 30 компонент, u — три компоненты. «Краевые» условия, обеспечивающие существование L_0^{-1}, задаются как при t_0, так и при t_1, а также в некоторой средней точке интервала (t_0, t_1). Дополнительные условия на решение сформулированы с использованием значений x в разных точках интервала.

Некоторые свойства оператора L_0 в этой задаче иллюстрируются примером в § 1.

2. Так как «принцип максимума» используется лишь как критерий, отличающий оптимальное управление от улучшаемого, то нас удовлетворяет формулировка его в форме неравенства.

3. Мы ограничились бесконечно малыми вариациями управления: именно на этой основе строились вычисления.

4. В наших вычислениях очень полезным оказался введенный в [1] конус достижимости; в связи с этим во всех формулировках фигурирует

не одно решение сопряженного уравнения, а матрица, составленная из таких решений; эта матрица дает возможность вычислять векторы, из которых строится конус достижимости. Легко видеть, что такая матрица автоматически учитывает условия трансверсальности.

Из работ, посвященных численному решению задач оптимального управления, отметим [2], где предлагается неклассическую вариационную задачу свести к классической (без ограничений), добавляя к исходному минимизируемому функционалу члены, учитывающие невыполнение условий на правом конце траектории, а также члены, учитывающие степень нарушения ограничений на управление и фазовые траектории. (Это, разумеется, уже другая задача, с другим решением; отличие от решения исходной задачи определяется тем, как введен новый функционал.)

В настоящей работе сделана попытка решать задачу, сохраняя ее неклассический характер. В связи с этим приходится прибегать к идеям линейного программирования.

§ 1. Постановка задачи

Рассматриваются следующие задачи оптимального управления. Пусть $\mathbf{x}(t) = \{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$ — вектор-функция, определенная на отрезке (t_0, t_1); вектор $\mathbf{u}(t) = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ определен на том же отрезке; $\mathbf{u}(t)$ — искомое управление; на область его значений наложено условие

$$\mathbf{u}(t) \in U, \tag{1}$$

где U — некоторая замкнутая область. Ищется решение уравнения

$$L_0(\mathbf{u})\mathbf{x} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{2}$$

где $L_0(\mathbf{u})$ — некоторое дифференциальное выражение, имеющее смысл при любом заданном управлении (1). На $\mathbf{x}(t)$ наложены определенные условия вида

$$F_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{3}$$

(m никак не связано, вообще говоря, с n).

Мы будем рассматривать функционалы F_i вида

$$F_i(\mathbf{x}) = F_i[\mathbf{x}(t_i'), \mathbf{x}(t_i''), \ldots]; \qquad t_0 \leqslant t_i', t_i'', \ldots \leqslant t_1, \tag{4}$$

т. е. F_i — функция от значений $\mathbf{x}$ в точках $t_i', t_i'', \ldots$, которую мы будем предполагать дифференцируемой.

Ставится задача о нахождении управления $\mathbf{u}(t) \in U$, для которого $\mathbf{x}(t)$, удовлетворяющий (2) и условиям (3), давал бы минимальное значение функционалу $F_0(\mathbf{x})$ вида (4). Ниже предлагается метод численного решения подобных задач. Этот метод применим и к задачам, в которых нужно минимизировать

$$\max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} F_0[\mathbf{x}(t)], \tag{5}$$

а на область значений $\mathbf{x}(t)$ наложено условие

$$Q[\mathbf{x}(t)] \leqslant 0 \quad \text{при } t \in (t_0, t_1). \tag{6}$$

Среди условий (3) выделим некоторую группу условий

$$F_{i_1} = F_{i_2} = \cdots = 0 \tag{7}$$

таким образом, чтобы дифференциальный оператор, определяемый выражением (2) и «краевыми» условиями (7), имел обратный при любом $\mathbf{u} \in U$. Формально такое выделение неоднозначно. Однако требование иметь в своем распоряжении эффективную и корректную процедуру реализации L_0^{-1} существенно сужает этот произвол.

Пример:

$$L_0(u)\,\mathbf{x} \equiv \begin{pmatrix} d/dt & \sigma_1(u) \\ \sigma_2(u) & d/dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = 0;$$

$$\sigma_1(u), \sigma_2(u) \sim +30, +40; \qquad t_0 = 0; \qquad t_1 = 1.$$

Условия: а) $x'(0) - X_1 = 0$; б) $x^1(1) - X_1' = 0$; в) $x^2(0) - X_2 = 0$.

Формально можно, следуя [1], включить а) и в) в оператор $L_0(\mathbf{u})$ и реализовать L_0^{-1} процедурой Рунге — Кутта, например, а условие б) рассматривать как дополнительное условие на решение. Однако это привело бы нас в дальнейшем к вычислительно некорректным задачам. Правильным является определение оператора L_0 с помощью условий а) и б); условие же в) становится дополнительным; L_0^{-1} корректно реализуется методом прогонки. В дальнейшем мы будем предполагать, что такое выделение проделано; под $L_0(\mathbf{u})$ будем подразумевать оператор, имеющий при заданном $\mathbf{u}(t)$ корректно и эффективно реализуемый обратный $L_0^{-1}(\mathbf{u})$, а условия (3) — оставшиеся дополнительные условия на решение. Относительно L_0 предположим также, что для него справедлива теория малых возмущений. Отметим еще, что иногда полезно часть условий, необходимых для существования L_0^{-1}, считать элементами управления (сосредоточенными параметрами) и проводить по ним процесс варьирования, хотя формально можно было бы получить существование L_0^{-1} с помощью части дополнительных условий (3).

Суть метода состоит в построении перехода от $\mathbf{u}(t)$ к близкому к нему $\mathbf{u}^*(t)$. При этом переходе всегда выполнено (1), условия (3) выполнены с необходимой точностью, а значение F_0 понижается (если $\mathbf{u}(t)$ не оптимальное управление). Для построения такого процесса нам необходимо знать связь между произвольной вариацией управления $\delta\mathbf{u}(t)$ и вариациями функционалов F_i, $i = 0, 1, \ldots, m$.

Проварьировав (2), получим

$$L(\mathbf{u}, \mathbf{x})\,\delta\mathbf{x} = M(\mathbf{x}, \mathbf{u})\,\delta\mathbf{u}. \tag{8}$$

Здесь $L(\mathbf{u}, \mathbf{x})$ — линейный дифференциальный оператор, определенный на невозмущенной «траектории»; M — аналогичная матрица, действующая из пространства векторов $\mathbf{u}$ в пространство векторов $\mathbf{x}$.

Варьируя (4), получим

$$\delta F = \mathbf{f}'\delta\mathbf{x}(t') + \mathbf{f}''\delta\mathbf{x}(t'') + \cdots. \tag{9}$$

Определим L^* формулой *)

$$\int_{t_0}^{t_1} (\psi L\delta\mathbf{x} - \delta\mathbf{x} L^*\psi)\, dt = 0. \tag{10}$$

*) Подобным способом удобно рассматривать и некоторые задачи с операторами в частных производных ($\partial / \partial t - \partial^2 / \partial x^2$; $\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$; и т. д.).

Беря в качестве $\psi(t)$ решение (операторного) уравнения *)

$$L^*\psi_i = \mathbf{f}_i'\,\delta(t - t_i') + \mathbf{f}_i''\,\delta(t - t_i'') + \cdots \tag{11}$$

(здесь $\delta(t - t')$ есть δ-функция с полюсом в t'), из (8)—(11) получаем

$$\delta F_i = \int_{t_0}^{t_1} \psi_i M \delta\mathbf{u}\, dt. \tag{12}$$

Решив $(m+1)$ раз уравнение (11) для $i = 0, 1, \ldots, m$, получим матрицу $\Psi(t)$. Рассмотрим $(m+1)$-мерное пространство R_{m+1} функционалов. Тогда следствием перехода от $\mathbf{u}$ к $\mathbf{u}^* = \mathbf{u} + \delta\mathbf{u}$ будет смещение точки $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ в точку

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}^*) = \mathbf{F}(\mathbf{u}) + \int_{t_0}^{t_1} \Psi M \delta\mathbf{u}\, dt$$

(так как $\mathbf{u}(t)$ определяет $\mathbf{x}(t)$ однозначно, то формально можно считать F_i функционалами от $\mathbf{u}$; в дальнейшем члены порядка $(\delta\mathbf{u})^2$ опущены).

Матрица $\Psi(t)$ дает возможность эффективно строить конус достижимости. Принцип максимума можно сформулировать, потребовав для оптимальной траектории существования вектора $\mathbf{r} \in R_{m+1}$ (точнее, R^*_{m+1}) такого, что $\mathbf{r}\Psi M\delta\mathbf{u} \leqslant 0$ для всех t и $\delta\mathbf{u}$, совместимых с (1), и $r_0 < 0$.

Предполагая решать задачи с минимизацией (5) и с условиями (6), заметим, что точки t_i', t_i'', ... не должны обязательно задаваться заранее; они могут определяться некоторым свойством траектории, например как точки максимума функции $F_0[\mathbf{x}(t)]$. Если F_0 достигает максимума в нескольких изолированных точках t_0', t_0'', ..., то каждой из них соответствует своя строка матрицы $\Psi(t)$, а в формулировке «принципа» придется потребовать выполнение условий $r_0' < 0$; $r_0'' < 0$, ... (Размерность R соответственно возрастает.) Если траектория касается поверхности $Q = 0$ в нескольких точках, то каждой такой точке соответствует своя строка Ψ, а на соответствующие компоненты $\mathbf{r}$ накладывается условие неотрицательности. Однако практически важен тот случай, когда F_0 достигает максимума на интервале и когда на некотором интервале $Q = 0$. Исходя из сказанного, разберем случай, когда $Q[\mathbf{x}(t)] = 0$ на отрезке (t_α, t_ω).

Пусть $\mathbf{n}(t')$ — нормаль к $Q = 0$ в точке t'. В качестве последней строки Ψ возьмем функцию $\psi(t, t')$, определенную на $(t_0, t_1) \times (t_\alpha, t_\omega)$ и являющуюся решением уравнения $L^*\psi(t, t') = \mathbf{n}(t')\delta(t - t')$, $t' \in (t_\alpha, t_\omega)$. Тогда возмущение управления $\delta\mathbf{u}(t)$ приведет к возмущению «условий»

$$\mathbf{h}(t') = \int_{t_0}^{t_1} \Psi(t, t')\, M(t)\, \delta\mathbf{u}(t)\, dt, \quad t' \in (t_\alpha, t_\omega).$$

От t' зависит только последняя компонента $\mathbf{h}$, имеющая смысл проекции смещения $\delta\mathbf{x}(t')$ на $\mathbf{n}(t')$. Полагая, что положительное направление на $\mathbf{n}$ есть направление внутрь разрешенной для траектории области, критерий

*) Граничные условия для L получаются вариацией условий для L^0; L^{-1} и $(L^*)^{-1}$ существуют.

оптимальности можно получить, потребовав существования вектора

$$\mathbf{r} = \{r_0, r_1, \ldots, r_m, r(t')\}; \qquad r_0 < 0; \qquad r(t') \geqslant 0;$$
$$(\mathbf{r}, \Psi(t,t') M(t) \delta \mathbf{u}(t)) \leqslant 0, \tag{13}$$

где

$$(\mathbf{r}, \mathbf{h}) = \sum_{i=0}^{m} r_i h^i + \int_{t_\alpha}^{t_\omega} r(t') h(t')\, dt'$$

для всех t и $\delta\mathbf{u}$, совместимых с (1).

Несложные выкладки показывают, что если на некоторой траектории имеет место (13), то она стационарна. Т. е. для всех $\delta\mathbf{u}(t)$, совместимых с (1) и не приводящих (в первом порядке) к нарушению (3) и (6), должно быть $\delta F_0 \geqslant 0$.

Действительно, пусть $\delta\mathbf{u}(t)$ и есть такая вариация. Т. е. последствия ее таковы, что $\delta F_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$,

$$\mathbf{n}(t') \delta\mathbf{x}(t') \geqslant 0, \qquad t' \in (t_\alpha, t_\omega).$$

Интегрируя (13), получим

$$0 \leqslant \int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{r}, \Psi(t,t') M \delta\mathbf{u})\, dt = (\mathbf{r}, \int_{t_0}^{t_1} \Psi(t,t') M \delta\mathbf{u}\, dt) =$$
$$= \sum_{i=0}^{m} r_i \delta F_i + \int_{t_\alpha}^{t_\omega} r(t')\, dt' \int_{t_0}^{t_1} \psi(t, t') M \delta\mathbf{u}\, dt = r_0 \delta F_0 + \int_{t_\alpha}^{t_\omega} r(t') \mathbf{n}(t') \delta\mathbf{x}(t')\, dt'.$$

При этом было использовано то, что по определению $\psi(t,t')$

$$\int_{t_0}^{t_1} \psi(t,t') M(t) \delta\mathbf{u}(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \psi(t,t') L \delta\mathbf{x}\, dt =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} \delta\mathbf{x}(t) L^* \psi(t,t')\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta\mathbf{x}(t) \mathbf{n}(t') \delta(t - t')\, dt = \delta\mathbf{x}(t') \mathbf{n}(t').$$

Так как по предположению $r(t') \geqslant 0$, $\delta\mathbf{x}\mathbf{n} \geqslant 0$ и $r_0 < 0$, то

$$\delta F_0 \geqslant -\frac{1}{r_0} \int_{t_\alpha}^{t_\omega} r(t') \delta\mathbf{x}(t') \mathbf{n}(t')\, dt' \geqslant 0.$$

Желая сблизить (13) с соответствующим результатом из [1], проделаем следующие выкладки: $(\mathbf{r}, \Psi(t,t') M \delta\mathbf{u})' = (\Psi^* \mathbf{r}, M \delta\mathbf{u})$. Но

$$\Psi^* \mathbf{r}(t') = \sum_{i=0}^{m} r_i \psi_i(t) + \int_{t_\alpha}^{t_\omega} \psi(t,t') r(t')\, dt'. \tag{14}$$

Применяя L^* к (14), получим, что $\psi(t) = \Psi^* \mathbf{r}(t')$ на (t_α, t_ω) удовлетворяет уравнению

$$L^* \psi = r(t) \mathbf{n}(t), \qquad r(t) \geqslant 0$$

(ради простоты полагаем, что все t_i', t_i'', ... лежат вне (t_α, t_ω)). Опираясь на вышеизложенное, можно предложить следующий способ учета (6): интервал (t_α, t_ω) разбивается на конечное (не очень большое) число частей, причем каждой части соответствует своя строка матрицы Ψ, «ответственная» за выполнение (6) на своем «участке». Подробнее об этом ниже. Аналогичный подход используется и в задаче с минимизацией (5).

§ 2. Расчетная схема

Разобьем (t_0, t_1) на I интервалов точками

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_I = t_1$$

и в дальнейшем будем рассматривать кусочно-постоянные $u(t)$, т. е.

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_j, \quad t \in (\tau_{j-1}, \tau_j) \tag{15}$$

(обычно в наших расчетах $I \sim 100$).

Возьмем некоторое управление $\mathbf{u}$ вида (15) и решим уравнение (2), не учитывая пока дополнительных условий (3).

Для каждого интервала (τ_{j-1}, τ_j) вычислим k векторов $\mathbf{h}_{q,j} \in R_{m+1}$:

$$\mathbf{h}_{q,j} = \Psi(\tau_j) M(\tau_j) \mathbf{e}_q \Delta t_j \qquad (q = 1, 2, \ldots, k), \quad \Delta t_j = (\tau_j - \tau_{j-1}), \tag{16}$$

где $\mathbf{e}_q$ есть q-й орт в пространстве векторов $\mathbf{u}$.

Для реализации этих вычислений нужно $m + 1$ раз решить уравнение (11) (практически вычисление векторов h происходит раздельно по компонентам).

Смысл $\mathbf{h}_{q,j}$ следующий. Если на j-м интервале перейти от $\mathbf{u}_j$ к $\mathbf{u}_j^* = \mathbf{u}_j + s\mathbf{e}_q$, то следствием этого будет смещение «функционалов»

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}^*) = \mathbf{F}(\mathbf{u}) + s\mathbf{h}_{q,j}.$$

Совокупность векторов $\mathbf{h}_{q,j}$ является основной информацией, используя которую можно строить разумный процесс варьирования $\mathbf{u}$. Из дальнейшего будет видно, что к $\mathbf{h}$ будет очень частое обращение; поэтому желательно, чтобы все $\mathbf{h}$ разместились в оперативной памяти машины. Таким образом, для хорошей реализации предлагаемого метода желательно иметь возможность одновременно иметь в оперативной памяти $[I(m+1)k + 2kI]$ чисел ($2kI$ чисел носят служебный характер).

Для того чтобы следить за условием (1), будем считать, что $\mathbf{e}_q$ не орты, но некоторая система линейно-независимых векторов, обладающая следующим свойством: можно выбрать пару чисел $s_{q,j}^- \leqslant 0 \leqslant s_{q,j}^+$ таких, что переход от $\mathbf{u}_j$ к

$$\mathbf{u}_j^* = \mathbf{u}_j + \sum_{q=1}^{k} s_{q,j}\,\mathbf{e}_q, \quad \text{где } s_{q,j}^- \leqslant s_{q,j} \leqslant s_{q,j}^+,$$

всегда совместим с (1), и при этом любое $\mathbf{u}_j^* \in U$, близкое к $\mathbf{u}_j$, может быть таким образом получено. Такой набор «псевдоортов» может быть своим для каждого интервала. Необходимый пересчет $\mathbf{h}_{q,j}$ тривиален.

Пусть теперь для исходного $\mathbf{u}(t)$ выполнены условия (3). Естественно поставить следующую задачу A:

найти такие числа $s_{q,j}$, чтобы минимизировать форму

$$H = \sum_{q,j} s_{q,j} h^0_{q,j} \tag{A$_1$}$$

при условиях

$$\sum_{q,j} s_{q,j} h^i_{q,j} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{A$_2$}$$

$$s^-_{q,j} \leqslant s_{q,j} \leqslant s^+_{q,j}. \tag{A$_3$}$$

Это типичная задача линейного программирования. Ниже предлагается итерационное ее решение.

Замечание. Величины чисел $s^{+,-}_{q,j}$ определяются не столько расстояниями до границ U, сколько пределами применимости линейного приближения. Судить о «правильности» величин $s^{+,-}$ можно следующим образом. Решив задачу A и перейдя к управлению

$$\mathbf{u}^*_j = \mathbf{u}_j + \sum_q s_{q,j} \mathbf{e}_{q,j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, I),$$

мы можем предсказать на основе теории возмущений вариации функционалов

$$\delta\mathbf{F} \simeq \sum_q \sum_j s_{q,j} \mathbf{h}_{q,j}. \tag{17}$$

Далее весь описанный выше цикл повторяется, отправляясь уже от $\mathbf{u}^*$. Сравнение (17) с фактическими $\delta\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{u}^*) - \mathbf{F}(\mathbf{u})$ покажет, следует ли уменьшить $s^{+,-}$, или можно их увеличить (что, разумеется, желательно).

При решении задачи с функционалом (5) использовался следующий прием. После решения (2) находилось несколько точек t', t'',... с наибольшими значениями $F_0(t)$ (t', t'',... — «контрольные» точки); вместо H получаем формы вида

$$H' = F_0(t') + \sum s_{q,j} (h^0_{q,j})';$$

требовалось минимизировать

$$H = \max(H', H'', \ldots). \tag{A_1'}$$

При этом, естественно, не контролируется поведение F^0 в других точках, поэтому на следующей итерации «контрольные» точки соответственно переместятся. Опыт показал, что две «контрольные» точки при достаточном числе итераций (30—40) с успехом «следят» за 20—30 интервалами Δt_j. Аналогично реализуется решение задач с условием вида (6).

Случай, когда некоторые из условий (3) имеют вид неравенств, сводится к рассматриваемому стандартным приемом линейного программирования.

Пусть теперь (3) не выполнены по тем или иным причинам. Тогда простой итерационный процесс (см. ниже) позволяет найти числа $s_{q,j}$ такие, что

$$F_i(\mathbf{u}) + \sum_{q,j} s_{q,j} h^i_{q,j} \simeq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

После этого решаем задачу A, очевидным образом пересчитав $s^-_{q,j}$ $s^+_{q,j}$. (В начале расчета, когда нарушения (3) велики, на выполнение (3) приходится затратить несколько итераций.)

Задаче A можно придать следующий геометрический смысл: рассмотрим выпуклый многогранник P в R_{m+1} («область достижимости») — множество точек

$$\mathbf{y} = \sum_n s_n \mathbf{h}_n, \qquad s^-_n \leqslant s_n \leqslant s^+_n$$

(двойной индекс заменен одинарным) и его границу Γ.

Задача состоит в нахождении пересечения Γ с лучом $(-1, 0, 0, \ldots, 0)$.

Задача с H вида A_1' сводится к решению задачи A, в которой ищется пересечение Γ с лучом $-(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{l}, 0, \ldots, 0)$ и к совокупности векторов $\mathbf{h}_n$ добавлено l векторов вида $(1, 0, \ldots, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, ... с границами $-\infty \leqslant s \leqslant 0$ (l — число форм H', H'', ...).

В тех случаях, когда в задаче имеются некоторые варьируемые параметры (например, величина t_1, часть граничных значений $\mathbf{x}$, которые удобно задавать для возможно более простой реализации L_0^{-1}, и т. д.), их вариации порождают некоторые векторы $\mathbf{h}$, включающиеся в общую схему.

Рассматривая вопрос о точности приближенного решения, естественно выделить следующие источники ошибок.

1. Ошибка, связанная с переходом к управлению вида (15); она мала уже при не очень больших I.

2. Ошибка аппроксимации. Так как векторы $\mathbf{h}$ вычислены в (16) грубо, с точностью до $(\Delta t)^2$, то для управления, оптимального в классе (15), «конус достижимости», построенный по $\mathbf{h}$, будет содержать направление $(-1, 0, 0, \ldots, 0)$ и вычислительный процесс «уведет» решение от управления оптимального по F_0 к оптимальному в смысле численного аналога «принципа максимума». Естественно, ошибки такого рода особенно сильны в тех точках, где происходит резкое изменение величин (например, рвется $\mathbf{u}(t)$). При расчете с равномерным шагом Δt такие участки обычно выявляются. Затем можно уточнить расчет, взяв на этих участках более подробную сетку. С этой ошибкой связано, по-видимому, «размазывание» разрывов в $\mathbf{u}(t)$. Все это хорошо видно на примере решения задачи о подъеме ракеты.

3. Ошибка локальности. Чтобы не получить локальный экстремум, необходимо повторить расчет, отправляясь от других $\mathbf{u}(t)$.

4. Ошибка поиска. Стабилизация значения F_0 в ходе итераций обычно создает впечатление, что получено $\mathbf{u}$, достаточно близкое к оптимальному. Но это может быть следствием неэффективности метода. Поэтому важно уметь анализировать полученное решение. Совокупность векторов $\mathbf{h}$ содержит необходимую для этого информацию. Примеры такого анализа приведены ниже.

§ 3. Итерационное решение задачи A

Излагаемый ниже метод есть, по существу, поиск «опорной плоскости». В этом смысле нижеследующее близко к методу в [3], однако многогранники не обладают широко используемым в [3] свойством «строгой выпуклости».

Предварительно решим задачу B:

дана область P точек

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \Sigma s_n \mathbf{h}_n, \qquad s_n^- \leqslant s_n \leqslant s_n^+;$$

найти s_n, минимизирующее $\| \mathbf{x} \|$ в P.

Возьмем какой-либо вектор $\mathbf{h}_n$ и переходом из $\mathbf{x}_0$ в $\mathbf{x}_0 + s\mathbf{h}_n$ минимизируем $\| \mathbf{x} \|$.

Пусть $\tilde{s} = -(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0) / \| \mathbf{h} \|^2$; тогда

$$s_n = \begin{cases} \min\ (s_n^+, \tilde{s}) & \text{при } \tilde{s} \geqslant 0, \\ \max\ (s_n^-, \tilde{s}) & \text{при } \tilde{s} < 0. \end{cases}$$

Выберем то n, для которого минимальна $\| \mathbf{x}_0 + s_n \mathbf{h}_n \|$, и переместимся в точку $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + s_n \mathbf{h}_n$. В дальнейшем это n может быть снова