УДК 621.671

М.А. Викулов, Н.П. Овчинников

РАСЧЕТ РОТОРА НАСОСА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Рассмотрен принцип разбиения ротора насоса конечным числом элементов.
Ключевые слова: ротор, балка, узловые перемещения, матрица.

Современные компьютеры позволяют проводить инженерный анализ машин и механизмов, имеющих сложную геометрическую конфигурацию, при помощи численных методов, а именно методом конечных элементов.

На рисунке представлена балка на опорах – упрощенная модель ротора насоса типа «Д», разбитая конечным числом элементов n, соединенных друг с другом в узлах, для каждого которого составляется общее уравнение матричного метода, представляющее собой закон Гука в обобщенном виде [1]:

$$P = k \cdot q \qquad (1)$$

где P – вектор сил; k – матрица жесткости, мм; q – вектор перемещений.

Данные уравнения для каждого отдельного элемента балки ($1 \ldots n$) объединяются в общую систему уравнений, решение которой дает вектор узловых перемещений системы (q).

Очевидно, узловые перемещения системы играют ключевую роль в определении внутренних усилий, напряжений, собственных частот и др.

Для расчета вышеуказанных параметров нам необходимо знать следующие компоненты [1]:

- Плотность металла p;
- Модуль упругости E (модуль Юнга);
- Вес модели G;
- Длина участка l балки;
- Площадь поперечного сечения F (для круглого сечения $F = \pi r^2$);
- Геометрический момент инерции J (для круглого сечения $J = \pi D^4/32$).

С учетом того, что балка представляет собой совокупность отдельных элементов, соединенных друг с другом узлами, то…

Площади сечений балки F равны:

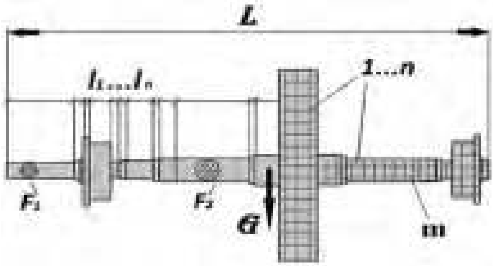
$$F = F_{m_1} + F_{m_2} \ldots F_{m_n}, \qquad (2)$$

а длины l ее участков:

$$l = l_{m_1} + l_{m_2} \ldots l_{m_n}. \qquad (3)$$

где $F_{m_1} \ldots F_{m_n}$ и $l_{m_1} \ldots l_{m_n}$ – площади и длины конечных элементов балки.

Таким образом, массу представленной балки можно рассмотреть как:



Принципиальная схема ротора насоса типа «Д»: L – длина балки; $l_1 \ldots l_n$ – длины участков балки; F_1, $F_2 \ldots F_n$ – площади поперечных сечений участков; $1 \ldots n$ – число элементов; G – вес модели (балки); m – элемент

$$m^* = (\rho_{m_1} \cdot F_{m_1} \cdot l_{m_1})\ldots + (\rho_{m_n} \cdot F_{m_n} \cdot l_{m_n}). \quad (4)$$

Каждый отдельный элемент системы m должен быть достаточно простым, чтобы имелась возможность легко определить перемещения и усилия в любой части элемента по заданным перемещениям его узлов.

В качестве конечного элемента возьмем наиболее простой тип элемента – балочный (Beam), состоящий из трех узлов и имеющий шесть узловых перемещений (степеней свободы).

Взаимосвязь перемещений узлов конечного элемента и усилиями в них задается с помощью матрицы жесткости элемента [2]:

$$k^{(m)} = \begin{bmatrix} k_{1111} & k_{1211} & k_{1311} & \ldots & k_{1N} \\ k_{2111} & k_{2211} & k_{2311} & \ldots & k_{2N} \\ k_{3111} & k_{3211} & k_{3311} & \ldots & k_{3N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & \ldots & k_{nN} \\ k_{N1} & k_{N2} & k_{N3} & \ldots & k_{NN} \end{bmatrix} \quad (5)$$

где n – число элементов; N – число уравнений системы $(n \cdot q)$.

Под k понимается усилие, действующее на узел m элемента по направлению i от единичного перемещения узла этого же элемента по направлению j при условии, что перемещения всех остальных степеней свободы равны нулю [3].

Общая система уравнений (1.1) имеет следующий вид:

$i \downarrow; j \rightarrow$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \ldots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \ldots & k_{2N} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & \ldots & k_{3N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & \ldots & k_{nN} \\ k_{N1} & k_{N2} & k_{N3} & \ldots & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_n \\ q_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_n \\ P_N \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

где i – столбец матрицы; j – строка матрицы; 1… 3 – узлы в балочном элементе (Beam).

В случае, когда $q_i = 0$ (опора находится в неподвижном состоянии), необходимо выполнить следующую операцию. Например, $q_2 = 0$. Тогда:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & 0 & k_{13} & \ldots & k_{1N} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ k_{31} & 0 & k_{33} & \ldots & k_{3N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{n1} & 0 & k_{n3} & \ldots & k_{nN} \\ k_{N1} & 0 & k_{N3} & \ldots & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ 0 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_n \\ q_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ 0 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_n \\ P_N \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

В выражении (6) значения k (или $E \cdot F/l \ldots 12E \cdot J/l^3$) в строках j и столбцах i, содержащие q_2, заменяют нулями, а диагональный член (в нашем случае k_{22}) единицей. Сила P_2 тоже приравнивается к нулю соответственно. В выражении (7) перемещения опоры q_2 равняются нулю, т.е. граничные условия соблюдены [2, 3].

Представим, что балка (рисунок) была разбита на 210 элементов. Исходя из вышеприведенного анализа, рассматриваемая деталь в матричной форме принимает следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \left[k^{(1)}\right] & [0] & \ldots & [0] \\ [0] & \left[k^{(2)}\right] & .. & [0] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [0] & [0] & \ldots & \left[k^{(210)}\right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \left\{q^{(1)}\right\} \\ \left\{q^{(2)}\right\} \\ \vdots \\ \left\{q^{(210)}\right\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left\{P^{(1)}\right\} \\ \left\{P^{(2)}\right\} \\ \vdots \\ \left\{P^{(210)}\right\} \end{Bmatrix}. \tag{8}$$

Приведенная математическая модель в матричном в виде соответствует принципиальной схеме ротора насоса (рисунок), тем самым доказывая, что метод конечных элементов является основным инструментом при проведении инженерного анализа машин и механизмов, имеющих сложную геометрию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Макаров Е.Г.* Инженерные расчеты в Mathcad. Учебный курс. – СПб.: Питер, 2005. – 448 с.

2. *Замрий А.А.* Проектирование и расчет методом конечных элементов трехмерных конструкций в среде APM Structure3D. – М.: Изд-во АПМ, 2006. – 288 с.

3. *Нори Д., Сегерлинд Л.* Введение в методы конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 155 с. ГИАБ

КОРОТКО ОБ АВТОРАХ

Викулов Михаил Александрович – профессор, зав. кафедрой, e-mail: Gormashygu@mail.ru,
Овчинников Николай Петрович – ассистент кафедры, e-mail: Ovchinnlar1986@mail.ru,
Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова.

UDC 621.671

CALCULATION OF THE PUMP ROTOR BY THE FINITE ELEMENT

Vikulov M.A., Professor, Head of Chair, e-mail: Gormashygu@mail.ru,
Ovchinnikov N.P., Assistant of Chair, e-mail: Ovchinnlar1986@mail.ru,
Ammosov North-East Federal University.

This article discusses the principle of decomposition of the pump rotor finite element.

Key words: rotor, beam, nodal displacements, matrix.

REFERENCES

1. Makarov E.G. *Inzhenernye raschety v Mathcad. Uchebnyi kurs* (Engineering calculations in Mathcad. Training course), Saint-Petersburg, Piter, 2005, 448 p.

2. Zamrii A.A. *Proektirovanie i raschet metodom konechnykh elementov trekhmernykh konstruktsii v srede APM Structure3D* (3D structure planning and calculation by the finite element method in APMStructure3D environment), Moscow, Izd-vo APM, 2006, 288 p.

3. Nori D., Segerlind L. *Vvedenie v metody konechnykh elementov* (Introduction in the finite element method), Moscow, Mir, 1979, 155 p.