

**А.И. ГРАБЧЕНКО**, д-р техн. наук,  
**В.Л. ДОБРОСКОК**, д-р техн. наук,  
**Я.Н. ГАРАЩЕНКО**, канд. техн. наук, Харьков, Украина,  
**А.Н. ШПИЛЬКА**, Полтава, Украина

## **ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ РАБОЧЕЙ ПОВЕРХНОСТИ АБРАЗИВНЫХ ИНСТРУМЕНТОВ**

Розглянуто питання моделювання робочої поверхні абразивних інструментів на базі статистичної параметризації законів розподілу розмірів зерен. Статистична параметризація забезпечується модифікацією параметрів масштабовуваних законів розподілу, із приведенням їх до трьох: характеристичного розміру абразивних зерен, коефіцієнту зсуву математичного очікування щодо характеристичного розміру й коефіцієнту варіації. Отримано розрахункові залежності для визначення характеристик розподілу зерен на робочій поверхні абразивних інструментів.

Рассмотрены вопросы моделирования рабочей поверхности абразивных инструментов на базе статистической параметризации законов распределения размеров зерен. Статистическая параметризация обеспечивается модификацией параметров масштабируемых законов распределения с приведением их к трем: характеристическому размеру абразивных зерен, коэффициенту смещения математического ожидания относительно характеристического размера и коэффициенту вариации. Получены расчетные зависимости для определения характеристик распределения зерен на рабочей поверхности абразивных инструментов.

Questions of modelling of a working surface of abrasive tools on the basis of statistical parametrization of distribution laws of grains sizes are considered. Statistical parametrization is provided with modification of parameters of scaled laws of distribution with their reduction three: to a characteristic size of abrasive grains, factor of displacement of a expectancy concerning the characteristic size and to coefficient of variation. Functional relations for definition of characteristics of distribution of grains on a working surface of abrasive tools are received.

Современный абразивный инструмент обладает широким спектром технологических возможностей по видам, типам, размерам, характеристикам и соответственно своим режущим свойствам. Его многообразие адекватно отображает необходимость выполнения технологических требований различных процессов абразивной обработки

по скорости резания, производительности, термодинамическим нагрузкам, точности и качеству обработанных деталей.

Моделирование абразивно-алмазных инструментов является определяющим этапом при разработке теоретических основ процесса шлифования. Теоретические работы в этой области, как правило, направлены на создание модельных представлений о шлифовальном круге как объекте и получение на их основе аналитических зависимостей, связывающих исходные параметры с характеристиками расположения элементов зерен на его рабочей поверхности [1, 2, 3, 7] и др.

Сложность получения реалистической модели рабочей поверхности абразивного инструмента связана со стохастической природой исходного объекта. Среди всех режущих инструментов абразивные являются единственными, у которых регламентируются не геометрические параметры режущих элементов, а зерновой состав исходной навески зерен. Это затрудняет исследование рельефа инструмента, требует применения методов теории вероятности и математической статистики при моделировании и описании результатов экспериментальных исследований.

Можно выделить четыре основных элемента на базе которых строятся статические модели рабочей поверхности абразивно-алмазного инструмента: форма и закон распределения размеров зерен, закон распределения центров зерен в абразивном пространстве, пространство абразивного слоя и поверхность связки определенным образом расположенная в абразивном пространстве, распределение вершин зерен относительно поверхности связки.

При теоретических расчетах и моделировании сложная геометрическая форма реальных алмазных и абразивных зерен исследователями в зависимости от решаемой задачи заменяется упрощенным эквивалентом на базе трехосного эллипсоида: шаром [2, 7] или эллипсоидом вращения с постоянным соотношением осей [1, 9]. Проведенные специальные исследования по анализу метрической формы плоского сечения зерен из сверхтвердых материалов [6] показали, что сечением, наиболее близким к реальной форме зерна, является эллипс. Эти данные хорошо согласуются с работами по определению коэффициента заполнения пространственной формы зерен в виде эллипсоида вращения.

Использование модели в виде трехосного эллипсоида еще более точно соответствует эквивалентной форме зерен. Вероятностный закон распределения размеров зерен по каждой из осей задается одномерным, непрерывным, одинаковым и независимым. Тогда каждое отдельное зерно

будет представлять собой трехосный эллипсоид с различным соотношением осей. Для достаточно большой выборки таких зерен их средняя форма будет асимптотически приближаться к шару с диаметром равным математическому ожиданию закона распределения размеров.

Целью работы является построение параметрической вероятностной модели для определения характеристик распределения зерен на рабочей поверхности абразивных инструментов.

Абразивные зерна и порошки из синтетических алмазов и других сверхтвердых материалов представляют собой совокупность зерен различной величины и формы: монокристаллы, осколки, сростки и поликристаллы. При производстве и контроле порошок подразделяют на фракции.

Основной фракцией называется совокупность зерен определенного размера, преобладающих в составе данного порошка по массе в шлифпорошках и по числу зерен в микропорошках. Получить абразивный порошок, состоящий только из зерен одного размера, не представляется возможным, поэтому, кроме основной фракции, в составе порошков содержатся побочные фракции, которые крупнее или мельче основной.

Для описания всего разнообразия диапазонов с учетом вероятностной природы размеров зерен необходимо выполнить их статистическую параметризацию [3].

Статистическая параметризация обеспечивается модификацией параметров масштабируемых законов распределения с приведением их к трем: характеристическому размеру абразивных зерен  $a_0$  (масштабный коэффициент, мкм), коэффициенту смещения математического ожидания относительно характеристического размера  $k_m$  (коэффициент относительного расположения) и коэффициенту вариации  $k_v$  (коэффициент формы).

Характеристический размер  $a_0$  - максимальный размер зерен основной фракции в мкм, тогда в зависимости от обозначения зернистости и типов абразивных порошков его значения определяются следующим образом:

- абразивное шлифзерно и шлифпорошки (ГОСТ 3647-80)  $\Rightarrow a_0 = 12,6 Z$ , где  $Z$  - номер зернистости ( $Z = 200 \dots 4$ );
- абразивные микропорошки (ГОСТ 3647-80)  $\Rightarrow a_0$  - соответствует числу после буквы М (М63...М5);
- порошки и микропорошки из синтетического алмаза и КНБ (ДСТУ 3292-95, ранее был ГОСТ 9206-80)  $\Rightarrow a_0$  - соответствует первому числу (числителю дроби).

Коэффициент относительного расположения  $k_m$  - отношение математического ожидания  $E(d_{mean})$  закона распределения размеров зерен к характеристическому размеру:  $k_m = E / a_0$  ( $d_{mean} = a_0 k_m$ ).

Коэффициент вариации  $k_v$  - отношение среднеквадратического отклонения  $s$  закона распределения размеров зерен к математическому ожиданию:  $k_v = s / E$  ( $s = d_{mean} k_v = a_0 k_m k_v$ ).

Интервал возможных значений размеров зерен соответствует  $0 < d < d_{max}$ . В общем случае максимально возможный размер зерен определяется по зависимости (значения коэффициентов приведены в табл. 1):

$$d_{max} = a_0 k_{max} = a_0 k_{lim} k_{form}, \quad (1)$$

где  $k_{lim}$  - коэффициент предельной фракции, зависящий от знаменателя геометрической прогрессии интервала размеров фракций;  $k_{form}$  - коэффициент формы зерен характеризует их возможность проходить через ячейки предельного сита наименьшим сечением  $k_{form} = 1 \dots 1.3$  (для ориентировочных расчетов  $k_{form} \approx 1,15$ ), для микропорошков контролируемых микроскопическим методом  $k_{form} = 1$ .

Таблица 1 – Значения коэффициентов, определяющих  $d_{max} = a_0 k_{max}$

Наименование	$k_{lim}$	$k_{form}$	$k_{max}$
Абразивное шлифзерно и шлифпорошки	$\varphi = 1,26$	1,15	1,45
Шлифпорошки из СТМ узкого диапазона зернистости	$\varphi^2 = 1,59$	1,15	1,83
Шлифпорошки из СТМ широкого диапазона зернист.	$\varphi^4 = 2,54$	1,15	2,92
Микропорошки из СТМ узкого диапазона зернист.	$\varphi^2 = 1,59$	1	1,59

### *Распределение размеров абразивных зерен*

Рассмотрим основные свойства нормального закона распределения и (производного от него) логарифмически-нормального, наиболее часто используемых при описании распределения параметров рабочей поверхности абразивного инструмента и исходных характеристик шлифпорошков [1, 8].

Плотность вероятности распределения размеров зерен  $d \equiv x$  по нормальному закону имеет вид:

$$f_N(x; \mu_N, \sigma_N) = \frac{1}{\sigma_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu_N}{\sigma_N} \right)^2 \right], \quad 0 < x < d_{\max}, \quad (2)$$

где  $\mu_N, \sigma_N$  - параметры закона распределения, зависящие от характеристик порошка ( $\mu_N = a_0 k_m, \sigma_N = a_0 k_m k_v$ ) и соответствующие математическому ожиданию  $E(d_{mean})$  и среднеквадратическому отклонению  $s$ ;  $d_{\max} = a_0 k_{\max}$ .

Случайная величина  $x$  называется логарифмически-нормально распределенной, если ее логарифм ( $\ln x$ ) подчинен нормальному закону распределения. Плотность вероятности для логарифмически-нормального распределения размеров зерен  $d \equiv x$ :

$$f_{LN}(x; \mu_{LN}, \sigma_{LN}) = \frac{1}{x \sigma_{LN} \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln x - \mu_{LN}}{\sigma_{LN}} \right)^2 \right], \quad 0 < x < d_{\max}, \quad (3)$$

где  $\mu_{LN}, \sigma_{LN}$  - параметры закона распределения, зависящие от характеристик порошка и определяемые по зависимостям [4]:

$$\mu_{LN} = \ln \left( \frac{a_0 k_m}{\sqrt{k_v^2 + 1}} \right); \quad \sigma_{LN} = \sqrt{\ln(k_v^2 + 1)}. \quad (4)$$

Переход к характеристическим параметрам  $(a_0, k_m, k_v)$  для логарифмически-нормального закона распределения производится решением системы нелинейных уравнений относительно параметров  $\mu_{LN}, \sigma_{LN}$ :

$$\begin{cases} a_0 k_m & = \exp(\mu_{LN} + \sigma_{LN}^2/2); \\ (a_0 k_m k_v)^2 & = \exp(2\mu_{LN} + \sigma_{LN}^2) [\exp(\sigma_{LN}^2) - 1], \end{cases} \quad (5)$$

где  $a_0 k_m = E$  - математическое ожидание;  $(a_0 k_m k_v)^2 = s^2 = D$  - дисперсия.

Таким образом, функции плотности вероятности нормального (2) и логарифмически-нормального (3) распределений зависят от характеристических (модифицированных) представительных параметров  $(a_0, k_m, k_v)$ . Значения параметров для практических расчетов [1, 3, 4] приведены в табл. 2 (примеры графиков плотностей распределения размеров представлены на рис. 1).

Таблица 2 – Значения параметров законов распределения размеров зерен

Наименование	Закон распределения размеров зерен			
	нормальный		лог-нормальный	
	$k_m$	$k_v$	$k_m$	$k_v$
Абразивное шлифзерно и шлифпорошки с индексом П	0,85÷0,88	0,22÷0,23	0,85÷0,87	0,19÷0,20
Абразивное шлифзерно и шлифпорошки с индексом Н	0,79÷0,83	0,25÷0,29	0,81÷0,85	0,20÷0,22
Абразивное шлифзерно с индексом Д	0,81÷0,82	0,34÷0,36	0,84÷0,85	0,27÷0,28
Шлифпорошки из СТМ узкого диапазона зернистости.	0,91÷0,93	0,11÷0,19	0,92÷0,94	0,11÷0,19
Шлифпорошки из СТМ широкого диапазона зернистости	0,79÷0,83	0,29÷0,35	0,78÷0,82	0,28÷0,30
Микропорошки из СТМ узкого диапазона зернистости	0,40÷0,73	0,26÷0,97	0,52÷0,73	0,23÷0,52
Микропорошки из СТМ широкого диапазона зернистости	0,30÷0,65	0,32÷1,46	0,44÷0,58	0,35÷0,58

Для примера рассмотрим нормальный закон распределения размеров зерен с параметрами, имеющими совпадающие значения по табл. 2 (абразивное шлифзерно и шлифпорошки с индексом Н и шлифпорошки из СТМ широкого диапазона зернистости): коэффициент относительного расположения математического ожидания  $k_m = 0,82$ ; коэффициент вариации  $k_v = 0,27$ . Характеристический размер зерен примем  $a_0 = 200$  мкм, что одновременно соответствует зернистости:  $Z = a_0 / 12,6 = 15,9 \approx 16$  (абразивное шлифзерно и шлифпорошки) и 200/125 (шлифпорошки из СТМ широкого диапазона зернистости). Тогда средний размер зерен  $d_{mean} = a_0 k_m = 200 \cdot 0,82 = 164$  мкм.

*Количество зерен в единице объема абразивного инструмента*

Рассмотрим исходный абразивный слой (абразивное пространство X-Y-Z), который для простоты дальнейших рассуждений представим как куб со сторонами A, мкм. Центры зерен равновероятно (по закону равной вероятности) распределены в пространстве абразивного слоя. Математическое ожидание (средний размер) зерен имеющих форму шара равно  $d_{mean} = a_0 k_m$ . Зерна занимают только часть объема куба:  $V_3 = A^3 K_v$ ,

где  $K_v < 1$  - коэффициент относительного объема занимаемого зернами. Тогда количество зерен  $Z_v$  в выделенном объеме  $A^3$  будет равно отношению их объема  $V_3$  к объему  $\pi (d_{mean})^3 / 6$  среднего единичного зерна ( $A, d_{mean}, a_0$  – величины одной размерности):

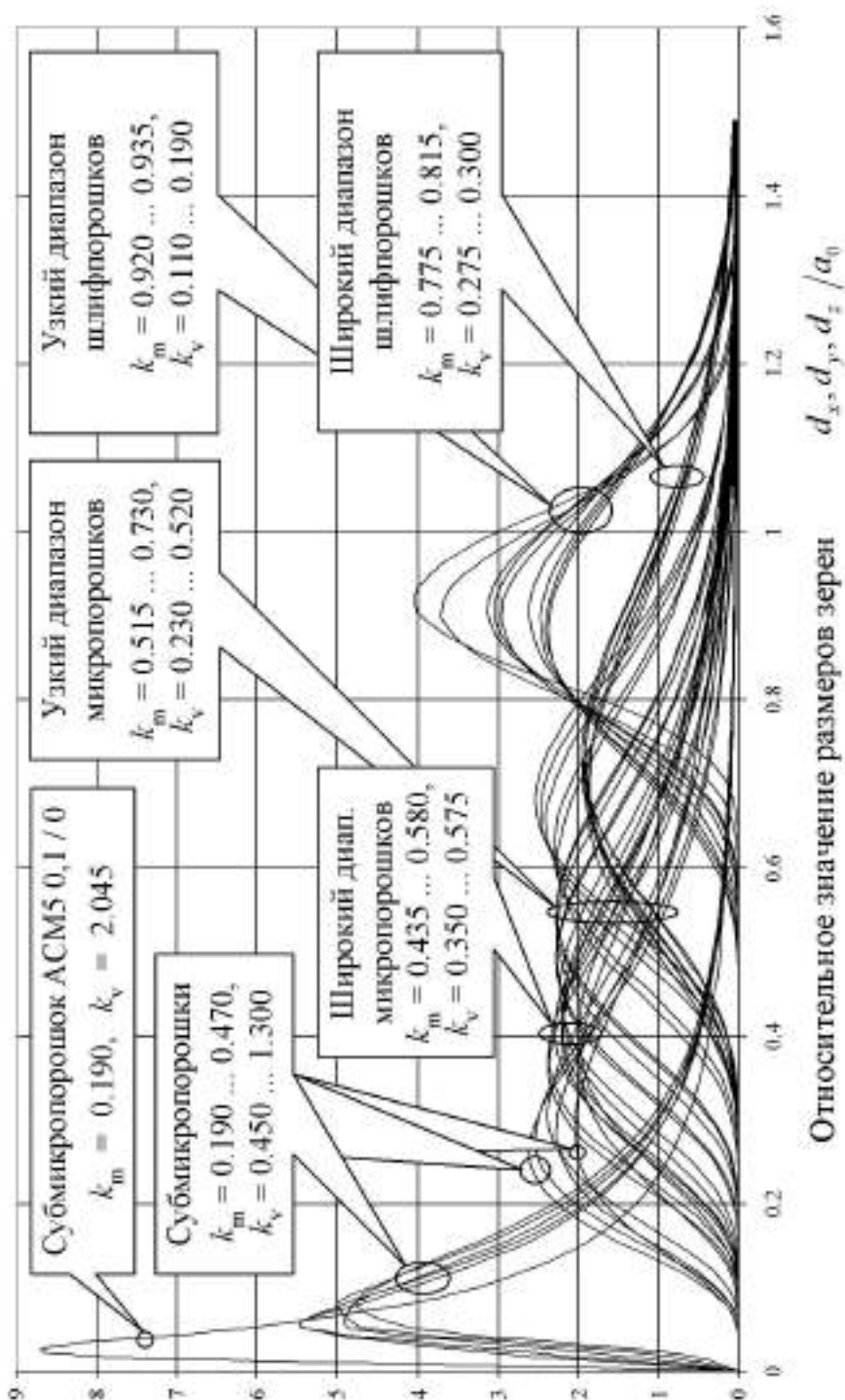


Рисунок 1 – Плотности логарифмически-нормального распределения размеров зерен в форме трехосного эллипсоида для алмазно-абразивных шлифпорошков, микропорошков и субмикродорошков по ДСТУ 3292-95

$$Z_v = \frac{6}{\pi} \left( \frac{A}{d_{mean}} \right)^3 K_v = \frac{6}{\pi} \left( \frac{A}{a_0 k_m} \right)^3 K_v \quad (6)$$

Коэффициент относительного объема определяется по зависимостям:

- для инструментов из абразивных материалов

$$K_v = (31 - N) / 50; \quad (7)$$

- для инструментов из синтетического алмаза и КНБ

$$K_v = K / 400, \quad (8)$$

где  $N$  - номер структуры (условный);  $K$  - концентрация (условная) сверхтвердого материала в абразивном слое, %.

Взаимосвязь между относительной объемной концентрацией зерен в абразивном слое  $K_v$  и характеристиками абразивных ( $N$ ) и абразивно-алмазных инструментов ( $K$ ) приведена на рис. 2. Для алмазного инструмента  $K_v = 0,0625 \dots 0,5$  ( $K = 25 \dots 200\%$ ), а для абразивного  $K_v = 0,38 \dots 0,6$  ( $N = 12 \dots 1$ ), т.е. алмазный инструмент имеет, как правило, существенно меньшую объемную концентрацию.

Для примеров выберем совпадающее значение  $K_v = 0,5$  ( $N = 6$ ,  $K = 200\%$ ).

Пример:  $Z_v = 216,5$  шт/мм<sup>3</sup> ( $A = 1000$  мкм;  $d_{mean} = 164$  мкм).

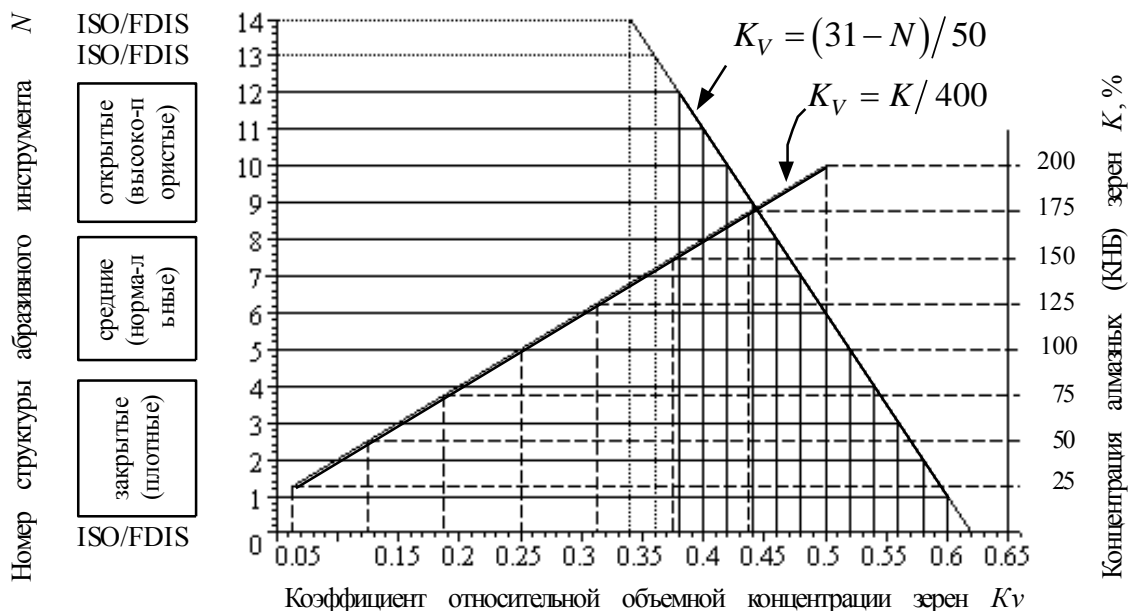


Рисунок 2 – Взаимосвязь между относительной объемной концентрацией зерен  $K_v$  и характеристиками абразивных и абразивно-алмазных инструментов



*Количество зерен на единице площади рабочей поверхности абразивного инструмента*

Рабочую поверхность абразивного инструмента можно представить как полупространство абразивного слоя ограниченное поверхностью связки. В общем случае поверхность связки может иметь произвольную форму. Для простоты рассуждений примем плоскость, что не отразится на конечном результате.

Выполним сечение исходного абразивного пространства  $A$  плоскостью  $X-Y$  (условная поверхность связки). В сечение попадут зерна центры, которых находятся от него на расстоянии меньшем половины их диаметра  $d_{mean}$ . Тогда количество зерен  $Z_{S0}$  попавших в сечение  $X-Y$  будет в  $A/d_{mean}$  меньше  $Z_V$ :

$$Z_{S0} = \frac{6}{\pi} \left( \frac{A}{d_{mean}} \right)^2 K_V = \frac{6}{\pi} \left( \frac{A}{a_0 k_m} \right)^2 K_V. \quad (9)$$

Разделим абразивное пространство  $A$  по сечению  $X-Y$ , удалив одну его часть, и получим полупространство рабочей поверхности инструмента. При этом не все зерна пересекаемые поверхностью связки останутся зафиксированными на рабочей поверхности, часть их (слабо закрепленных) вывалится. Для учета оставшихся зерен введем коэффициент относительной высоты выступания зерен над уровнем связки  $k_h$  ( $0 < k_h < 1$ ). Тогда можно записать выражение для количества зерен на единице площади рабочей поверхности:

$$Z_S = Z_{S0} k_h = \frac{6}{\pi} \left( \frac{A}{d_{mean}} \right)^2 K_V k_h = \frac{6}{\pi} \left( \frac{A}{a_0 k_m} \right)^2 K_V k_h. \quad (10)$$

Относительная критическая глубина заделки зерен в связке [1]  $\epsilon_{кр} = 1 - k_h$ . Для практических расчетов можно принимать следующие значения:  $k_h = 0,9 \dots 0,5$  для зерен из абразивных материалов;  $k_h = 0,5 \dots 0,3$  для алмаза и КНБ. Разница в диапазонах значений определяется особенностями их строения.

Экспериментальное определение  $k_h$  соответствует нахождению отношения  $Z_S(\text{факт}) / Z_{S0}$ , где  $Z_S(\text{факт})$  находится непосредственным подсчетом зерен видимых на единице площади поверхности инструмента, а  $Z_{S0}$  определяется по (9).

Пример:  $Z_S = 17,75$  шт/мм<sup>2</sup> ( $A = 1000$ ;  $d_{mean} = 164$  мкм;  $K_V = 0,5$ ;  $k_h = 0,5$ ).

### *Распределение вершин зерен на рабочей поверхности*

Вероятностный характер процесса абразивной обработки заложен в самой природе инструмента. При определении статистически-обоснованного закона распределения вершин зерен на рабочей поверхности абразивного инструмента необходимо одновременно учитывать вероятностный характер распределения их центров и размеров. Рассмотрим случай, когда центра зерен распределены в исходном абразивном пространстве равномерно (равномерный закон распределения), а распределение размеров зерен соответствует нормальному закону (2).

Определение закона распределения вершин зерен относительно уровня связки будем выполнять в следующей последовательности [3]:

- Выполним сечение абразивного пространства плоскостью.
- Определим плотность распределения вершин зерен относительно секущей плоскости. Расстояние от вершины каждого отдельного  $i$ -го зерна до секущей плоскости будет равно:  $y_i = c_i + d_i/2$ , где  $c_i$ , - расстояние от центра зерна до секущей плоскости;  $d_i$  - размер зерна. Плотность результирующего распределения для случая суммирования взаимно независимых случайных величин будет представлять собой их композицию [10].
- Перейдем от абразивного пространства к полупространству (рабочей поверхности инструмента). Переход производится усечением результирующего закона распределения для отрицательных значений координат вершин зерен.

Теоретическая плотность вероятности распределения вершин зерен над поверхностью связки будет иметь следующий вид:

$$f_{GD}(y, \mu_{GD}, \sigma_{GD}) = \frac{1}{2 \mu_{GD}} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{y + \mu_{GD}}{\sqrt{2} \sigma_{GD}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{y - \mu_{GD}}{\sqrt{2} \sigma_{GD}} \right) \right]; 0 \leq y < \infty, \quad (11)$$

где  $\mu_{GD}$ ,  $\sigma_{GD}$  - параметры распределения;  $\operatorname{erf}(z)$  - функция ошибки.

Функция ошибки  $\operatorname{erf}(z)$  связана с функцией Лапласа (интегральной функцией стандартного нормального распределения)  $\Phi(z)$  соотношением:  $\operatorname{erf}(z) = 2 \Phi(\sqrt{2} z)$ .

Вероятность распределения  $F_{GD}(y, \mu_{GD}, \sigma_{GD}) = \int_0^y f_{GD}(y, \mu_{GD}, \sigma_{GD}) dy$ :

$$F_{GD} = \frac{\sigma_{GD}}{2 \mu_{GD}} \left\{ z_1 \operatorname{erf} \left( \frac{z_1}{\sqrt{2}} \right) - z_2 \operatorname{erf} \left( \frac{z_2}{\sqrt{2}} \right) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \exp \left( -\frac{z_1^2}{2} \right) - \exp \left( -\frac{z_2^2}{2} \right) \right] \right\}, \quad (12)$$

где  $z_1 = (y + \mu_{GD}) / \sigma_{GD}$ ;  $z_2 = (y - \mu_{GD}) / \sigma_{GD}$ .

Вероятность распределения вершин зерен относительно уровня связки  $F_{GD}(y, \mu_{GD}, \sigma_{GD})$  определяет относительное количество вершин зерен (относительно общего количества зерен на поверхности связки) в интервале  $0 \dots y$ , т. е. в слое между поверхностью связки и эквидистантной поверхностью расположенной на расстоянии  $y$ .

Особый интерес представляет взаимосвязь параметров закона распределения вершин зерен  $\mu_{GD}, \sigma_{GD}$  с параметрами распределения их размеров  $\mu_N, \sigma_N$ . Как показали модельные исследования [3], для нормального закона распределения диаметров зерен эта взаимосвязь имеет следующий вид:

$$\mu_{GD} = \mu_N k_h = a_0 k_m k_h; \quad \sigma_{GD} = \sigma_N k_h = a_0 k_m k_v k_h, \quad (13)$$

где  $k_h$  - коэффициент относительной высоты выступания зерен над уровнем связки.

Полученный теоретический закон распределения вершин зерен над поверхностью связки задан на интервале от 0 до  $\infty$ . В реальности размер абразивных зерен ограничен значениями  $d_{\max} = a_0 k_{\max}$  (табл. 1). Тогда, максимально возможная высота выступания зерен из связки  $h_{\max}$  определится выражением:  $h_{\max} = d_{\max} k_h = a_0 k_{\max} k_h$ .

Требуемый закон распределения может быть получен усечением справа уравнения (11) до координаты вершины максимально выступающего зерна  $h_{\max}$ :

$$f_{GD}(y, \mu_{GD}, \sigma_{GD}) = \frac{k}{2 \mu_{GD}} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{y + \mu_{GD}}{\sqrt{2} \sigma_{GD}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{y - \mu_{GD}}{\sqrt{2} \sigma_{GD}} \right); 0 \leq y < h_{\max} \right], \quad (14)$$

где  $k$  - коэффициент, компенсирующий усечение ( $k > 1$ , для практических расчетов  $k \cong 1$ ):  $k = 1 / \int_0^{h_{\max}} f_{GD}(y, \mu_{GD}, \sigma_{GD}) dy = 1 / F_{GD}(h_{\max}, \mu_{GD}, \sigma_{GD})$ .

Математическое ожидание (ожидаемое среднее значение) высоты выступания зерен относительно уровня связки  $h_{mean} = E_{GD} = \int_0^{\infty} y f_{GD}(y) dy$ :

$$h_{mean} = E_{GD}(\mu_{GD}, k_v) = \mu_{GD} \frac{1}{2} \left[ (1 + k_v^2) \operatorname{erf} \left( \frac{1}{\sqrt{2} k_v} \right) + \frac{k_v}{\sqrt{2} \pi} \exp \left( -\frac{1}{2 k_v^2} \right) \right], \quad (15)$$

где  $\mu_{GD} = a_0 k_m k_h$ ;  $k_v$  - коэффициент вариации.

Для упрощения практических расчетов выражение для математического ожидания можно представить в виде  $h_{mean} = E_{GD}(\mu_{GD}, k_v) = \mu_{GD} \phi_{EGD}(k_v)$ , где  $\phi_{EGD}(k_v)$  - аппроксимирующая функция, обеспечивающая относительную ошибку  $\delta < 0,1\%$  для  $k_v = 0,1 \dots 0,8$ :

$$\phi_{EGD}(k_v) = \left( 0,365 + 0,407 k_v + \frac{0,0277}{k_v + 0,178} \right). \quad (16)$$

Имея выражение для математического ожидания высоты выступления зерен над уровнем связки можно определить относительные количества (коэффициенты) зерен расположенных ниже  $k_c$  ( $0 < y < h_{mean}$ ) или выше  $k_t$  ( $h_{mean} < y < \infty$ ) уровня связки  $h_{mean}$ . Между собой эти коэффициенты связаны зависимостью  $k_c + k_z = 1$  ( $k_z = 1 - k_c$ ). Аналитически коэффициент  $k_c$  определяется подстановкой в функцию вероятности (12) распределения вершин зерен над уровнем связки  $F_{GD}(y, \mu_{GD}, \sigma_{GD})$  параметров  $\mu_{GD}$ ,  $\sigma_{GD}$  (13) и значения аргумента  $y = h_{mean}$  (15). Для более компактного вида полученное выражение  $k_c = f(k_v)$  аппроксимировано с относительной ошибкой  $\delta < 0,1\%$  для  $k_v = 0,1 \dots 0,8$ . Окончательно зависимости для относительного количества вершин зерен расположенных ниже  $k_c$  и выше  $k_z$  математического ожидания высоты выступления зерен  $h_{mean}$  имеют следующий вид:

$$k_c(k_v) \cong \frac{0,621 + (2,2829 k_v - 1,543) k_v}{1,259 + (4,7474 k_v - 3,359) k_v}; \quad k_z(k_v) = 1 - k_c(k_v). \quad (17)$$

Результаты расчетов (рис. 3) показывают незначительное изменение коэффициентов относительного количества зерен относительно значения 0,5, что позволяет для предварительных расчетов принимать  $k_c \approx k_z \approx 0,5$ .

Тогда, среднее количество зерен на единице площади рабочей поверхности, соответствующее средней высоте их выступления над уровнем условной поверхности связки с учетом (10) будет иметь следующий вид:

$$Z_{S_{mean}} = Z_S k_z \approx 0,5 Z_S \approx \frac{3}{\pi} \left( \frac{A}{d_{mean}} \right)^2 \cdot K_V k_h \approx \left( \frac{A}{d_{mean}} \right)^2 K_V k_h. \quad (18)$$

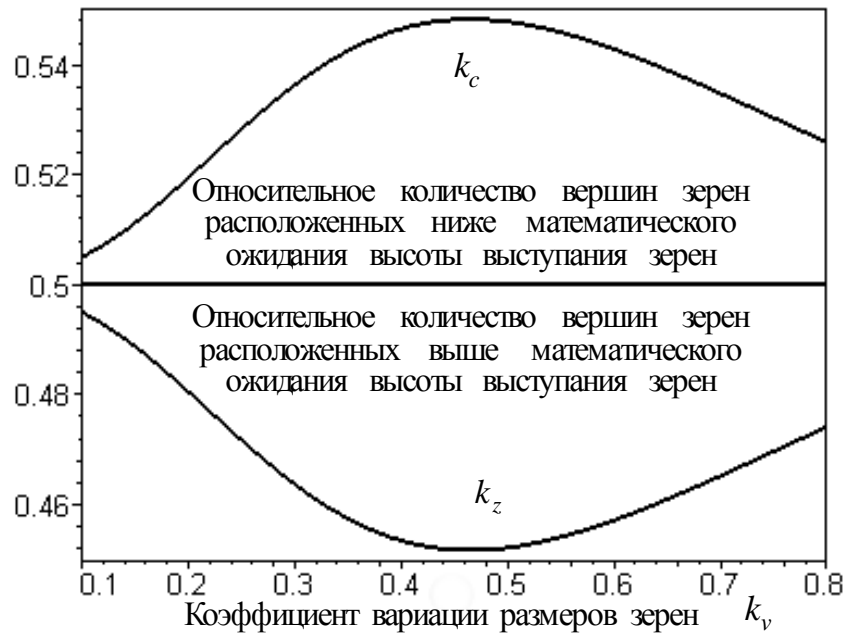


Рисунок 3 – Значения коэффициентов относительного количества вершин зерен

Типовой график плотности (14) и функции (12) распределения вершин зерен относительно уровня связки в относительных координатах ( $y/a_0$ ) представлен на рис. 4. Параметры и характеристики распределения определялись для условий предыдущих примеров (для единичного характеристического размера  $a_0 = 1$ ):  $\mu_{GD} = 0,41 a_0$ ;  $\sigma_{GD} = 0,11 a_0$ ;  $h_{max} = 0,72 a_0$ ;  $h_{mean} = 0,22 a_0$ ;  $F_{GD}(h_{mean}) = 0,53$  ( $k_m = 0,82$ ;  $k_v = 0,27$ ;  $k_h = 0,5$ );  $Z_{S mean} = 8,88$  шт/мм<sup>2</sup> ( $a_0 = 200$  мкм).

Вопросы трансформации статистических характеристик рельефа рабочей поверхности шлифовальных кругов при износе зерен рассмотрены в [5].

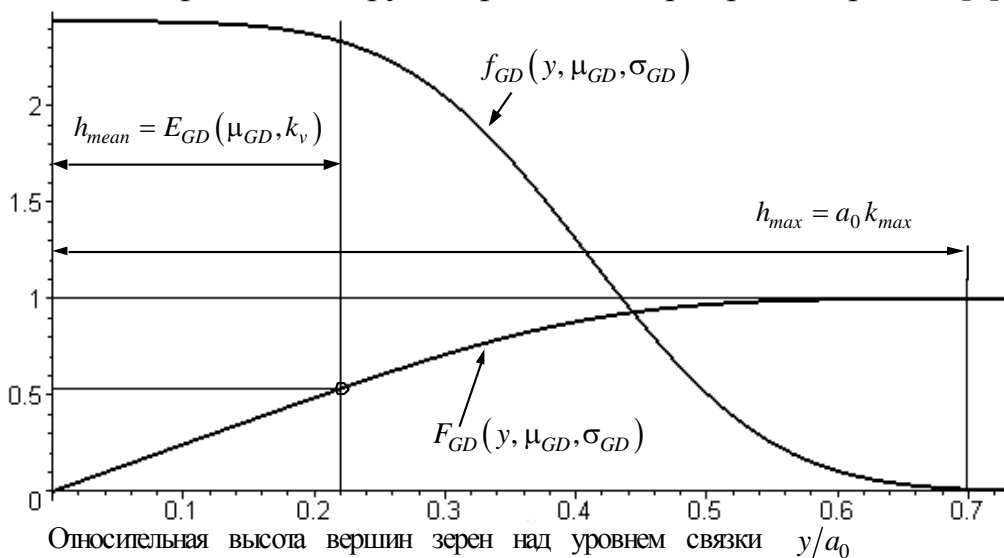


Рисунок 4 – Схема распределения вершин зерен над уровнем связки

### *Количество зерен на единице длины рабочей поверхности*

Выполним сечение рабочей поверхности плоскостью, перпендикулярной условной поверхности связки. Количество зерен попавших в сечение будет в  $A/d_m$  раз меньше  $Z_S$ . Тогда имеем количество зерен на единице длины рабочей поверхности по уровню связки:

$$Z_L = \frac{6}{\pi} \frac{A}{d_{mean}} K_V k_h = \frac{6}{\pi} \frac{A}{a_0 k_m} K_V k_h. \quad (19)$$

Среднее количество зерен на единице длины рабочей поверхности, соответствующее средней высоте их выступания над уровнем условной поверхности связки получим аналогично (18):

$$Z_{Lmean} = Z_L k_z \approx 0,5 Z_L = \frac{3}{\pi} \frac{A}{d_{mean}} K_V k_h = \frac{3}{\pi} \frac{A}{a_0 k_m} K_V k_h. \quad (20)$$

Среднее расстояние (шаг) между зернами по уровню их средней высоты производится делением длины абразивного пространства  $A$  на  $Z_{Lmean}$ :

$$l_{Zmean} = \frac{A}{Z_{Lmean}} = \frac{\pi d_{mean}}{3 K_V k_h} = \frac{\pi a_0 k_m}{3 K_V k_h}. \quad (21)$$

Пример:  $Z_{Lmean} = 1,46$  шт/мм;  $l_{Zmean} = 0,687$  мм ( $A = 1000$  мкм;  $d_{mean} = 164$  мкм;  $K_V = 0,5$ ;  $k_m = 0,82$ ;  $k_h = 0,5$ ).

### *Заключение*

1. Разработана параметрическая вероятностная модель для определения характеристик распределения зерен на рабочей поверхности абразивных инструментов. Получен закон распределения вершин зерен и расчетные зависимости для определения средних значений количества зерен в единице объема, на единице площади и единице длины рабочей поверхности.

2. Обоснована необходимость статистической параметризации (в дополнение к геометрической и физической) при решении задач предметной области абразивной обработки, связанных с исходными размерами абразивных порошков.

3. Статистическая параметризация обеспечивается модификацией параметров масштабируемых законов распределения с приведением их к трем: характеристическому размеру абразивных зерен, коэффициенту смещения математического ожидания относительно характеристического размера и коэффициенту вариации.

4. Предложенная параметризация повышает представительность и содержательность статистических выводов и может позволить выявлять общие закономерности формирования рабочей поверхности абразивного инструмента в процессе шлифования.

**Список литературы:** 1. Абразивная и алмазная обработка материалов: Справочник / Под ред. д-ра техн. наук проф. *А.Н. Резникова*. - М.: Машиностроение, 1977. - 391 с. 2. *Байкалов А.К.* Введение в теорию шлифования материалов. - К.: Наукова думка, 1978. - 207 с. 3. *Грабченко А.И., Доброскок В.Л., Федорович В.А.* 3D моделирование алмазно-абразивных инструментов и процессов шлифования: Учебн. пособие. - Харьков: НТУ "ХПИ", 2006. - 364 с. 4. *Доброскок В.Л., Гаращенко Я.Н., Наконечный Н.Ф.* Определение параметров распределения размеров зерен для абразивно-алмазных порошков по ГОСТ и ДСТУ // Вісник Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут". - Харків: НТУ "ХПИ", 2003. - № 8, Т. 1. - С. 71-86. 5. *Доброскок В.Л., Гаращенко Я.Н.* Трансформация статистических характеристик рельефа рабочей поверхности шлифовальных кругов при износе зерен // Наука і освіта: Зб. наук. праць. - Харків: НТУ «ХПИ». - 2004. - С. 83-98. 6. *Лавриненко В.И., Шепелев А.А., Петасюк Г.А.* Модели формы зерен СТМ. // Сверхтвердые материалы. - 1994. - № 5-6. - С. 18-21. 7. *Маслов Е.Н.* Теория шлифования материалов. - М.: Машиностроение, 1974. - 320 с. 8. *Островский В.И.* Теоретические основы процесса шлифования. - Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. - 144 с. 9. *Резников А.Н.* Теплофизика резания. - М.: Машиностроение, 1969. - 288 с. 10. Точность производства в машиностроении и приборостроении / Под ред. *А.И. Гаврилова*. - М.: Машиностроение, 1973. - 567 с.