О сложности кратных диагностических экспериментов для подмножеств состояний автомата

Д. В. Уваров

В работе рассматриваются кратные диагностические безусловные эксперименты для подмножеств множества состояний конечного автомата. Найдены точные оценки сложности таких экспериментов. Под сложностью эксперимента здесь понимается его объем, то есть сумма длин слов, из которых состоит эксперимент.

Введение

Важным классом экспериментов с автоматами являются диагностические эксперименты. Такие эксперименты используются для идентификации неизвестного состояния автомата. В общем случае, диагностические эксперименты рассматриваются для некоторого класса K инициальных автоматов. Эксперимент называется *диагностическим*, если результаты его применения к любым двум различным автоматам из K различны.

В этой работе в качестве класса K мы будем рассматривать множество некоторых инициальных автоматов V_q, получающихся при различном выборе начального состояния у заданного автомата V. Таким образом, задача сводится к тому, чтобы отличать пары состояний у одного автомата. Э. Ф. Мур в своей работе [1] доказал, что для того, чтобы отличить одну пару состояний в автомате приведенного вида, в худшем случае может потребоваться слово длины $n-1$, где n — количество состояний автомата, причем существует автомат, на котором эта оценка достигается. Здесь будет рассмотрено некоторое обобщение этой задачи, когда вместо одной пары состояний рассматриваются целые множества, и отличать надо любые пары из этих множеств, с помощью кратных безусловных диагностических экспериментов. Были получены точные оценки сложности таких экспериментов. В качестве сложности эксперимента мы будем рассматривать его объем, то есть сумму длин слов, из которых состоит эксперимент.

1. Определения и формулировка результатов

Пусть $V=(A,Q,B,\varphi,\psi)$ — автомат приведенного вида, $|Q|=n\geqslant 2$. Рассмотрим подмножество $Q'\subset Q$, $|Q'|=l\geqslant 2$. Поскольку V — автомат приведенного вида, то для Q' существует некоторый *диагностический эксперимент* $E_{V,Q'}$, то есть такое множество слов из A^*, что любые два состояния из Q' отличимы каким-нибудь из этих слов.

Пусть $v(E)$, где E — эксперимент, обозначает объем эксперимента, то есть сумму длин входящих в него слов. Нас интересует, какой объем в наихудшем случае может иметь эксперимент $E_{V,Q'}$. Введем следующую функцию Шеннона:

$$L(n,l)=\max_{V:|Q|=n,\,Q':|Q'|=l}\left(\min_{E_{V,Q'}} v(E_{V,Q'})\right).$$

Здесь минимум берется по всем диагностическим экспериментам $E_{V,Q'}$, а максимум — по всем автоматам приведенного вида с n состояниями и подмножествам с l состояниями.

Получен следующий результат.

Теорема 1. $L(n,l)=(l-1)(n-\dfrac{l}{2})$.

Расширим понятие диагностического эксперимента, приняв в рассмотрение выделенные попарно не пересекающиеся множества

$$Q_1,Q_2,\ldots,Q_m\subset Q,\quad |Q_i|=l_i\geqslant 1,\quad i=1,\ldots,m.$$

Диагностическим экспериментом для подмножеств $Q_1,Q_2,\ldots,Q_m$ множества состояний автомата V назовем такое множество слов

$E'_{V,Q_1,\dots Q_m}$, что любые два состояния, лежащие в различных подмножествах, отличимы некоторым словом из $E'_{V,Q_1,\dots Q_m}$. *Внутренним диагностическим экспериментом для подмножеств* $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ множества состояний автомата V назовем такое множество слов $E''_{V,Q_1,\dots Q_m}$, что любые два различных состояния, лежащие в одном подмножестве, отличимы некоторым словом из $E''_{V,Q_1,\dots Q_m}$. Заметим, что если подмножества $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ одноэлементные, то диагностический эксперимент для них является диагностическим экспериментом для множества $Q' = Q_1 \cup \dots \cup Q_m$. Также, если у нас имеется всего одно подмножество, то внутренний диагностический эксперимент совпадает с обычным диагностическим экспериментом для него. Как и выше, введем следующие функции Шеннона:

$$L'(n, l_1, \dots, l_m) = \max_{\substack{V:|Q|=n,\, Q_1:|Q_1|=l_1,\dots,\\ Q_m:|Q_m|=l_m}} \left(\min_{E'_{V,Q_1,\dots Q_m}} v(E'_{V,Q_1,\dots Q_m}) \right),$$

$$L''(n, l_1, \dots, l_m) = \max_{\substack{V:|Q|=n,\, Q_1:|Q_1|=l_1,\dots,\\ Q_m:|Q_m|=l_m}} \left(\min_{E''_{V,Q_1,\dots Q_m}} v(E''_{V,Q_1,\dots Q_m}) \right).$$

Были получены точные значения для этих функций.

Теорема 2. $L'(n, l_1, \dots, l_m) = (l-1)(n - \frac{l}{2})$, *где* $l = l_1 + \dots + l_m$.

Теорема 3. $L''(n, l_1, \dots, l_m) = (l-m)(n - \frac{l-m+1}{2})$, *где* $l = l_1 + \dots + l_m$.

Рассмотрим еще одну задачу. Пусть $Q'' \subset Q' \subset Q$, $|Q'| = l'$, $|Q''| = l''$. Пусть для множества Q'' уже построен некоторый диагностический эксперимент $E_{V,Q''}$. Мы хотим расширить этот эксперимент до диагностического для множества Q', то есть найти такой диагностический эксперимент $E_{V,Q'}$, что $E_{V,Q''} \subset E_{V,Q'}$. Введем следующую функцию Шеннона, которая описывает, на какой объем в наихудшем случае нужно расширить эксперимент $E_{V,Q''}$.

$$\widehat{L}(n, l', l'') = \max_{\substack{V:|V|=n,\, Q'':|Q''|=l'',\\ Q':|Q'|=l',\, E_{V,Q''}}} \left(\min_{E_{V,Q'} \supset E_{V,Q''}} (v(E_{V,Q'}) - v(E_{V,Q''})) \right).$$

Для этой функции также была найдена точная оценка.

Теорема 4. $\widehat{L}(n,l',l'') = (l'-l'')(n - \dfrac{l'-l''+1}{2})$.

Введем ряд обозначений и приведем те понятия, которые использовались в других работах.

Если в обозначении слова проставлен верхний индекс, то он будет означать длину слова. Например α^k означает слово длины k.

Мы будем использовать отношение эквивалентности R_k, $k = 1, 2, \ldots$, введенное на множестве Q состояний автомата [2]. Состояния q_i и q_j находятся в отношении R_k тогда и только тогда, когда для любого слова $\alpha^k \in A^*$ имеет место $\overline{\psi}(q_i, \alpha^k) = \overline{\psi}(q_j, \alpha^k)$, то есть q_i и q_j не отличимы словами длины k. Пусть P_k — разбиение множества Q на классы эквивалентности, индуцируемые отношением R_k. Ясно, что P_{k+1} является подразбиением P_k. Известно [2], что если при некотором l имеет место $P_l = P_{l+1}$, и $P_l = \{Q_1, \ldots, Q_r\}$, то любые состояния q_u и q_v из любого заданного класса Q_w, $w = 1, 2, \ldots, r$ неотличимы, то есть $P_l = P_{l+1} = P_{l+2} = P_{l+3} = \ldots$

В этой работе мы рассматриваем только автоматы приведенного вида, то есть те, у которых нет неотличимых состояний. Значит, если $|P_k| < |Q|$, то $P_k \neq P_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$

Для краткости, класс эквивалентности, индуцируемый отношением R_k, будем называть классом R_k, число классов R_k будем обозначать $|R_k|$. Тогда при $|R_k| < |Q|$, учитывая, что P_{k+1} является подразбиением P_k и $P_k \neq P_{k+1}$, выполнено $|R_k| \geqslant |R_{k+1}| + 1$, а значит $|R_k| \geqslant k + 1$. Классом R_0 будем называть все множество состояний автомата.

В силу определения отношения R_k, на некотором множестве Q^{R_k}, целиком лежащем в одном классе R_k, и множестве слов длины k функция $\overline{\psi}$ автомата V принимает одно и то же значение. Поэтому можно корректно определить функцию $\overline{\psi}(Q^{R_k}, \alpha^k)$, положив ее равной $\overline{\psi}(q, \alpha^k)$, где q — любое состояние из Q^{R_k}. Если Q_1 и Q_2 — множества, лежащие в двух различных классах R_k, и для некоторого слова α_k выполнено $\overline{\psi}(Q_1, \alpha^k) \neq \overline{\psi}(Q_2, \alpha^k)$, то говорим, что α_k *отличает множества* Q_1 и Q_2.

2. Верхние оценки для функций Шеннона

Докажем сначала, что $L(n,l) \leqslant (l-1)(n-\dfrac{l}{2})$.

Лемма 1. *Если в множестве Q состояний автомата $V=(A,Q,B,\varphi,\psi)$ выделено подмножество $Q' \subset Q$, $|Q'| \geqslant 2$, и отношение R_k разбивает Q' на s классов: $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$, $s \geqslant 2$, то существует диагностический эксперимент для $\{Q_1, \ldots, Q_s\}$, состоящий из не более чем $s-1$ слова длины k.*

Доказательство. Докажем лемму индукцией по числу классов s.

При $s=2$ существует одно слово α^k, которое отличает некоторую пару состояний, одно из которых лежит в Q_1, в другое — в Q_2. Ясно, что $\overline{\psi}(Q_1,\alpha^k) \neq \overline{\psi}(Q_2,\alpha^k)$, поэтому α^k является диагностическим экспериментом для $\{Q_1, Q_2\}$.

Пусть лемма верна для некоторого $s \geqslant 2$. Предположим теперь, что отношение R_k разбивает Q' на $s+1$ классов R_k: $Q_1, \ldots, Q_s, Q_{s+1}$. По предположению индукции (если в качестве Q' взять $Q_1 \cup \ldots \cup Q_s$) существует диагностический эксперимент $E = \{\alpha_1^k, \ldots, \alpha_m^k\}$, $m \leqslant s-1$ для множеств $Q_1, \ldots, Q_s$. Переобозначим множества $Q_1, \ldots, Q_s$ в $Q_1^1, Q_2^2 \ldots, Q_s^s$ следующим образом: пусть $\alpha_{i_1}^k \in E$ — слово, отличающее множества Q_1 и Q_2. Обозначим $Q_1^1 = Q_1$, $Q_2^1 = Q_2$, если $\alpha_{i_1}^k$ отличает Q_1 и Q_{s+1}, и $Q_1^1 = Q_2$, $Q_2^1 = Q_1$, если $\alpha_{i_1}^k$ не отличает Q_1 и Q_{s+1}, в этом случае $\alpha_{i_1}^k$ отличает Q_2 и Q_{s+1}. Таким образом, слово $\alpha_{i_1}^k$ отличает Q_1^1 и Q_{s+1}. Предположим, что мы уже переобозначили множества $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ в множества $Q_1^1, Q_2^2, \ldots, Q_{p-1}^{p-1}, Q_p^{p-1}$ соответственно, $2 \leqslant p \leqslant s-1$. Пусть $\alpha_{i_p}^k \in E$ отличает множества Q_p^{p-1} и Q_{p+1}, $p \leqslant s-1$, тогда обозначаем: $Q_p^p = Q_p^{p-1}$, $Q_{p+1}^p = Q_{p+1}$, если $\alpha_{i_p}^k$ отличает Q_p^{p-1} и Q_{s+1}, и $Q_p^p = Q_{p+1}$, $Q_{p+1}^p = Q_p^{p-1}$, если $\alpha_{i_p}^k$ не отличает Q_p^{p-1} и Q_{s+1}. Получим, что $\alpha_{i_p}^k$ отличает Q_p^p и Q_{s+1}. При $p=s$ обозначим $Q_p^p = Q_p^{p-1}$. Таким образом, мы совершили некоторую перестановку множеств так, что полученные множества $Q_1^1, Q_2^2 \ldots, Q_{s-1}^{s-1}$ обладают тем свойством, что для любого $p \in \{1, \ldots, s-1\}$ существует слово из E, которое отличает Q_p^p и Q_{s+1}. Для множеств Q_s^s и Q_{s+1} найдем слово $\beta^k \in A^*$, которое их отличает (оно существует, так как множества лежат в разные классах R_k). Таким образом, $\{\alpha_1^k, \ldots, \alpha_m^k, \beta^k\}$ — есть диагностический эксперимент для $\{Q_1^1, \ldots, Q_s^s, Q_{s+1}\}$ и, поскольку $m \leqslant s-1$, он состоит не более чем из s слов длины k. Но $\{Q_1^1, \ldots, Q_s^s, Q_{s+1}\} = \{Q_1, \ldots, Q_s, Q_{s+1}\}$, так как при каждом переобозначении просто менялись местами два соседних множества. Лемма доказана.

Пусть $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$, $|Q| = n$, $n \geqslant 2$ — автомат приведенного вида, $Q' \subset Q$, $|Q'| \geqslant 2$. Через $P_k^{Q'}$ обозначим разбиение множества Q' на классы R_k, то есть $P_k^{Q'} = \{Q_1, \ldots, Q_s\}$, где $Q_1, \ldots, Q_s$ — различные классы R_k, причем $Q' = Q_1 \cup \ldots \cup Q_s$. Пусть $j_0, j_1, \ldots, j_p$, $p \geqslant 1$ — конечная строго возрастающая последовательность целых неотрицательных чисел, для которой выполнено:

1) множество Q' лежит в одном классе R_{j_0}, а R_{j_1} разбивает Q' на некоторые подклассы;
2) $P_{j_i}^{Q'} = P_{j_i+1}^{Q'} = P_{j_i+2}^{Q'} = \ldots = P_{j_{i+1}-1}^{Q'}$, $i = 1, \ldots, p-1$, а $P_{j_{i+1}}^{Q'}$ является подразбиением разбиения $P_{j_i}^{Q'}$ (здесь и далее под подразбиением будем понимать строгое подразбиение, то есть не совпадающее с исходным);
3) $P_{j_p}^{Q'}$ состоит из одноэлементных классов.

Назовем $j_0, j_1, \ldots, j_p$ *разбивающей последовательностью для множества* Q' автомата V.

Лемма 2. *Пусть $j_0, j_1, \ldots, j_p$ — разбивающая последовательность для множества Q' автомата V, $|Q'| = l \geqslant 2$. Тогда существует диагностический эксперимент E для Q' имеющий вид:*

$$E = \{\alpha_1^{j_1}, \ldots, \alpha_{i_1}^{j_1}, \alpha_1^{j_2}, \ldots, \alpha_{i_2}^{j_2}, \ldots, \alpha_1^{j_p}, \ldots, \alpha_{i_p}^{j_p}\},$$

причем число слов в нем не более $l-1$ и $i_1, \ldots, i_p \geqslant 1$.

Доказательство. Покажем, что для любого $s = 1, \ldots, p$ для разбиения $P_{j_s}^{Q'}$ существует диагностический эксперимент E_s вида

$$E_s = \{\alpha_1^{j_1}, \ldots, \alpha_{i_1}^{j_1}, \alpha_1^{j_2}, \ldots, \alpha_{i_2}^{j_2}, \ldots, \alpha_1^{j_s}, \ldots, \alpha_{i_s}^{j_s}\}, \tag{1}$$

число слов в котором не более $|P_{j_s}^{Q'}| - 1$ и $i_1, \ldots, i_s \geqslant 1$.

Пусть $s = 1$. Разбиение $P_{j_1}^{Q'}$ состоит из классов R_{j_1}, поэтому, в силу леммы 1, существует диагностический эксперимент E_1 для $P_{j_1}^{Q'}$, состоящий из не более чем $|P_{j_1}^{Q'}| - 1$ слова длины j_1.

Пусть для $s = k$, $1 \leqslant k \leqslant p-1$ уже построен диагностический эксперимент E_k вида (1). Докажем утверждение для $s = k+1$. Пусть $P_{j_k}^{Q'} = \{Q_1, \dots, Q_m\}$. Поскольку $P_{j_{k+1}}^{Q'}$ является подразбиением $P_{j_k}^{Q'}$, то можно записать:

$$P_{j_{k+1}}^{Q'} = P_{j_{k+1}}^{Q_1} \cup \ldots \cup P_{j_{k+1}}^{Q_m},$$

причем хотя бы одно из разбиений $P_{j_{k+1}}^{Q_1}, \dots, P_{j_{k+1}}^{Q_m}$ состоит более чем из одного множества.

Для каждого $P_{j_{k+1}}^{Q_i}$, $i = 1, \dots, m$ такого, что $|P_{j_{k+1}}^{Q_i}| \geqslant 2$, по лемме 1 существует диагностический эксперимент E_{Q_i}, состоящий из не более чем $|P_{j_{k+1}}^{Q_i}| - 1$ слова длины $k+1$. Пусть $I = \{i, i = 1, \dots, m \mid |P_{j_{k+1}}^{Q_i}| \geqslant 2\}$. Как уже было сказано, $|I| \geqslant 1$. Очевидно, что множество слов

$$E_{k+1} = E_k \cup (\cup_{i \in I} E_{Q_i}) \tag{2}$$

является диагностическим экспериментом для $P_{j_{k+1}}^{Q'}$, и число слов в нем:

$$|E_{k+1}| \leqslant |E_k| + \sum_{i \in I} (|P_{j_{k+1}}^{Q_i}| - 1) \leqslant |P_{j_k}^{Q'}| - 1 + \sum_{i \in I} (|P_{j_{k+1}}^{Q_i}| - 1).$$

Но число классов разбиения $P_{j_{k+1}}^{Q'}$ равно:

$$|P_{j_{k+1}}^{Q'}| = |P_{j_k}^{Q'}| + \sum_{i \in I} (|P_{j_{k+1}}^{Q_i}| - 1),$$

откуда следует, что

$$|E_{k+1}| \leqslant |P_{j_{k+1}}^{Q'}| - 1.$$

В силу (2) и того, что $|I| \geqslant 1$, эксперимент E_{k+1} содержит хотя бы одно слово длины $k+1$. Таким образом, мы построили эксперимент E_{k+1} вида (1).

Так как, при $s = p$, $P_{j_s}^{Q'}$ состоит из одноэлементных классов, то E_p совпадает с искомым экспериментом E для множества Q'. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $j_0, j_1, \ldots, j_p$ — разбивающая последовательность для множества Q' автомата V, $|Q'| = l \geqslant 2$. Тогда для любого $r = 1, \ldots, p$ выполнено $j_r \leqslant n - l + r$.*

Доказательство. Пусть $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ — автомат приведенного вида, $|Q| = n$, $n \geqslant 2$. $Q' \subset Q$, $|Q'| = l \geqslant 2$. Пусть $j_0, j_1, \ldots, j_p$ — разбивающая последовательность для Q'. Пусть $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$ — классы R_{j_0}. Покажем, что

$$j_0 \leqslant s - 1. \qquad (3)$$

В п. 1 было показано, что при $|R_k| \leqslant n - 1$ выполнено $|R_k| \geqslant k + 1$. Поскольку Q' целиком лежит в одном классе R_{j_0} и $|Q'| \geqslant 2$, то $|R_{j_0}| \leqslant n - 1$, значит $|R_{j_0}| \geqslant j_0 + 1$, то есть $j_0 \leqslant |R_{j_0}| - 1 = s - 1$, что и доказывает неравенство (3).

Будем считать, что $Q' \subset Q_1$. Обозначим через N_k, $k = 1, 2, \ldots$ — число классов R_k, которые не содержат в себе состояний из Q'. Из того, что $|R_{i+1}| \geqslant |R_i| + 1$, $i = 0, \ldots, j_p - 1$ и определения разбивающей последовательности следует, что при $i = 0, \ldots, p - 1$:

$$N_{j_{i+1}-1} \geqslant N_{j_i} + j_{i+1} - j_i - 1. \qquad (4)$$

Продолжая индуктивно неравенство (4), получим

$$N_{j_p-1} \geqslant N_{j_0} + (j_1 - j_0 - 1) + (j_2 - j_1 - 1) \ldots + (j_p - j_{p-1} - 1).$$

Ясно, что $N_{j_0} = s - 1$, поэтому имеем:

$$N_{j_p-1} \geqslant s - 1 + j_p - j_0 - p. \qquad (5)$$

Поскольку $|Q \setminus Q'| = n - l$, а классы R_k должны содержать хотя бы по одному элементу, то $N_k \leqslant n - l$ для любого $k = 1, 2, \ldots$ В частности, $N_{j_p-1} \leqslant n - l$. Поэтому, учитывая неравенство (5), имеем

$$s - 1 + j_p - j_0 - p \leqslant n - l. \qquad (6)$$

Из неравенств (3) и (6) получаем: $j_0 \leqslant s - 1 \leqslant n - l - j_p + j_0 + p$ или

$$0 \leqslant n - l - j_p + p. \qquad (7)$$

Поскольку $j_{i+1} \geqslant j_i + 1$, $i = 1, \ldots, p-1$, то $j_p - j_r \geqslant p - r$, $r = 1, \ldots, p$ или:

$$j_r - j_p + p \leqslant r, \quad r = 1, \ldots, p. \tag{8}$$

Прибавим к обеим частям неравенства (7) j_r, $r = 1, \ldots, r$ и воспользуемся неравенством (8). Получим:

$$\begin{cases} j_1 \leqslant n - l + (j_1 - j_p + p) \leqslant n - l + 1, \\ j_2 \leqslant n - l + (j_2 - j_p + p) \leqslant n - l + 2, \\ \vdots \\ j_p \leqslant n - l + (j_p - j_p + p) \leqslant n - l + p. \end{cases} \tag{9}$$

Эти неравенства и доказывают лемму.

Лемма 4. $L(n, l) \leqslant (l-1)(n - \dfrac{l}{2})$.

Доказательство. Возьмем произвольный автомат приведенного вида $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$, $|Q| = n$, $n \geqslant 2$. Выделим в нем подмножество $Q' \subset Q$, $|Q'| = l \geqslant 2$. Пусть $j_0, j_1, \ldots, j_p$ — разбивающая последовательность для Q'.

По лемме 2 существует диагностический эксперимент для Q', состоящий не более, чем из $l-1$ слова. Это будет некоторое множество слов:

$$E_{Q'} = \{\alpha_1^{j_1}, \ldots, \alpha_{i_1}^{j_1}, \alpha_1^{j_2}, \ldots, \alpha_{i_2}^{j_2}, \ldots, \alpha_1^{j_p}, \ldots, \alpha_{i_p}^{j_p}\}, \tag{10}$$

причем $i_1 + i_2 + \ldots + i_p \leqslant l - 1$, $i_j \geqslant 1$, $j = 1, \ldots, p$. Сумма длин его слов равна:

$$v(E_{Q'}) = i_1 j_1 + i_2 j_2 + \ldots + i_p j_p.$$

По лемме 3 имеем:

$$v(E_{Q'}) \leqslant (n - l + 1) i_1 + (n - l + 2) i_2 + \ldots + (n - l + p) i_p.$$

Так как $i_1 + i_2 + \ldots + i_p \leqslant l - 1$, $i_j \geqslant 1$, $j = 1, \ldots, p$, то

$$(n - l + 1) i_1 + (n - l + 2) i_2 + \ldots + (n - l + p) i_p \leqslant$$
$$\leqslant (n - l + 1) + (n - l + 2) + \ldots + (n - 1) = (l - 1)(n - \frac{l}{2}).$$

Поскольку автомат V и $Q' \subset Q$ выбирались произвольно, то

$$L(n,l) \leqslant (l-1)(n-\frac{l}{2}).$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *$L'(n,l_1,\ldots,l_m) \leqslant (l-1)(n-\frac{l}{2})$, где $l = l_1+\ldots+l_m$.*

Доказательство. Пусть $V=(A,Q,B,\varphi,\psi)$ — автомат приведенного вида и $Q_1,Q_2,\ldots,Q_m$, $|Q_i|=l_i$, $i=1,\ldots,m$ — попарно не пересекающиеся подмножества множества Q. Заметим, что всякий диагностический эксперимент для множества $Q'=Q_1\cup\ldots\cup Q_m$ будет также диагностическим для множеств $Q_1,\ldots,Q_m$, откуда следует, что

$$L'(n,l_1,\ldots,l_m) \leqslant L(n,l_1+\ldots+l_m).$$

Из леммы 4 следует требуемая оценка для функции $L'(n,l_1,\ldots,l_m)$. Лемма доказана.

Для доказательства верхней оценки функции $L''(n,l_1,\ldots,l_m)$ нам понадобится следующая

Лемма 6. *Пусть $V=(A,Q,B,\varphi,\psi)$ — автомат приведенного вида, $|Q|=n$, $Q''\subset Q'\subset Q$ и $|Q''|=l$. Пусть $E_{Q'}$ — диагностический эксперимент для Q'. Тогда для Q'' существует диагностический эксперимент $E_{Q''}$ такой, что $E_{Q''}\subset E_{Q'}$ и $|E_{Q''}|\leqslant l-1$.*

Доказательство. Докажем лемму индукцией по l. При $l=2$, очевидно существует одно слово из $E_{Q'}$, отличающее два состояния из Q'.

Пусть лемма верна для $l=k\leqslant|Q'|-1$, то есть для $Q''=\{q_1,\ldots,q_k\}$ существует диагностический эксперимент $E_{Q''}=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_s\}$, $s\leqslant k-1$. Пусть $q_{k+1}\notin Q''$, $q_{k+1}\in Q'$. Переобозначим состояния $q_1,\ldots,q_k$ в $q_1^1,\ldots,q_k^k$, аналогично тому, как мы это делали в доказательстве леммы 1, то есть получим, что для любой пары (q_p^p,q_{k+1}), $p\leqslant k-1$ существует отличающее слово $\alpha_{i_p}\in E_{Q''}$. Для q_k^k и q_{k+1} существует слово $\beta\in E_{Q'}$, которое их отличает, поскольку $q_k^k,q_{k+1}\in Q'$. Таким образом, для $Q''\cup\{q_{k+1}\}$ существует диагностический эксперимент $E_{Q''}\cup\{\beta\}\subset E_{Q'}$, число слов в котором не более k. Шаг индукции, а вместе с ним и лемма доказаны.

Лемма 7. $L''(n, l_1, \ldots, l_m) \leqslant (l-m)(n-\dfrac{l-m+1}{2})$, *где* $l = l_1 + \ldots + l_m$.

Доказательство. Возьмем автомат приведенного вида $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$, $|Q| = n$. Пусть $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ — попарно не пересекающиеся подмножества Q и $|Q_i| = l_i$, $i = 1, \ldots, m$. Обозначим $Q' = Q_1 \cup \ldots \cup Q_m$. Пусть $j_0, j_1, \ldots, j_p$ — разбивающая последовательность для Q'. По лемме 2 существует диагностический эксперимент $E_{Q'}$ для Q', такой что

$$E_{Q'} = \{\alpha_1^{j_1}, \ldots, \alpha_{i_1}^{j_1}, \alpha_1^{j_2}, \ldots, \alpha_{i_2}^{j_2}, \ldots, \alpha_1^{j_p}, \ldots, \alpha_{i_p}^{j_p}\},$$

причем число слов в нем не более $l-1$.

По лемме 6 существуют диагностические эксперименты $E_{Q_i} \subset E_{Q'}$ для множеств Q_i, $i = 1, \ldots, m$ такие, что $|E_{Q_i}| \leqslant l_i - 1$. Заметим, что множество $\widetilde{E}_{Q'} = E_{Q_1} \cup \ldots \cup E_{Q_m}$ есть внутренний диагностический эксперимент для $Q_1, \ldots, Q_m$. Число слов в нем:

$$|\widetilde{E}_{Q'}| \leqslant (l_1 - 1) + (l_2 - 1) + \ldots + (l_m - 1) = l - m.$$

Из леммы 3 и того, что $\widetilde{E}_{Q'} \subset E_{Q'}$ следует:

$$\begin{aligned} v(\widetilde{E}_{Q'}) &\leqslant (n-l+1)\widetilde{i}_1 + (n-l+2)\widetilde{i}_2 + \ldots + (n-l+p)\widetilde{i}_p \leqslant \\ &\leqslant (n-(l-m)) + (n-(l-m)+1) + \ldots + (n-1) = \\ &= (l-m)(n-\frac{l-m+1}{2}), \end{aligned}$$

где $\widetilde{i}_1 + \widetilde{i}_2 + \ldots + \widetilde{i}_p \leqslant l-m$, $0 \leqslant \widetilde{i}_k \leqslant i_k$, $k = 1, \ldots, p$.

Поскольку автомат V и множества $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ выбирались произвольно, последнее неравенство доказывает лемму.

Докажем еще одну вспомогательную лемму, которая нужна для получения верхней оценки функции $\widehat{L}(n, l', l'')$.

Лемма 8. *Пусть* $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$, $|Q| = n$ *— автомат приведенного вида. Пусть* $Q'' \subset Q' \subset Q$ *и* $|Q''| = l''$, $|Q'| = l'$, *причем* $l' = l''+1$. *Пусть уже построен диагностический эксперимент* $E_{Q''}$ *для множества* Q''. *Тогда существует одно слово* $\alpha \in E_{Q'}$ *(где* $E_{Q'}$ *— произвольный диагностический эксперимент для* Q'*), такое, что множество* $E_{Q''} \cup \{\alpha\}$ *— диагностический эксперимент для* Q'.

Доказательство. Пусть $Q' = \{q_1, \ldots, q_{l''}, q_{l''+1}\}$. Переобозначим $q_1, \ldots, q_{l''}$ в $q_1^1, \ldots q_{l''}^{l''}$ аналогично тому, как мы это делали в доказательстве леммы 1, то есть получим, что для пар $(q_p^p, q_{l''+1})$, $1 \leqslant p \leqslant l'' - 1$ существует слово $\alpha_{i_p} \in E_{Q''}$, которое их отличает. Для пары $(q_{l''}, q_{l''+1})$ возьмем слово $\alpha \in E_{Q'}$, которое их отличает. Таким образом, $E_{Q''} \cup \{\alpha\}$ — диагностический эксперимент для Q'.

Лемма 9. $\widehat{L}(n, l', l'') \leqslant (l' - l'') \left(n - \dfrac{l' - l'' + 1}{2} \right)$.

Доказательство. Возьмем автомат приведенного вида $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$, $|Q| = n$. Пусть $Q'' \subset Q' \subset Q$ и $|Q''| = l''$, $|Q'| = l'$.

Пусть у нас имеется некоторый диагностический эксперимент $E_{Q''}$ для множества Q''.

Пусть $j_0, j_1, \ldots, j_p$ — разбивающая последовательность для Q'. По лемме 2 существует диагностический эксперимент $E_{Q'}$ для множества Q', имеющий вид:

$$E_{Q'} = \{\alpha_1^{j_1}, \ldots, \alpha_{i_1}^{j_1}, \alpha_1^{j_2}, \ldots, \alpha_{i_2}^{j_2}, \ldots, \alpha_1^{j_p}, \ldots, \alpha_{i_p}^{j_p}\},$$

причем $i_1 + i_2 + \ldots + i_p \leqslant l' - 1$.

Докажем, что существуют слова $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in E_{Q'}$, $m \leqslant l' - l''$, такие, что эксперимент $E_{Q''} \cup \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ — диагностический для Q'.

Пусть $Q' = \{q_1, \ldots, q_{l'}\}$, $Q'' = \{q_1, \ldots, q_{l''}\}$, $Q_i = Q' \cup \{q_{l''+1}, \ldots, q_{l''+i}\}$, $i = 1, \ldots, l' - l''$.

Из леммы 8 следует, что существует слово $\alpha_1 \in E_{Q'}$ такое, что $E_{Q''} \cup \{\alpha_1\}$ — диагностичеческий эксперимент для Q_1. Пусть уже построены слова $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $1 \leqslant k \leqslant l' - l'' - 1$ такие, что $E_{Q''} \cup \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ — диагностический эксперимент для Q_k. Опять воспользуемся леммой 8, приняв в ней за множество Q'' множество Q_k, а за множество Q' — множество Q_{k+1}. Получим, что существует слово $\alpha_{k+1} \in E_{Q'}$ такое, что $E_{Q''} \cup \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \cup \{\alpha_{k+1}\}$ — диагностический эксперимент для Q_{k+1}.

Таким образом, по индукции, получаем, что существует указанные выше слова $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Поскольку они принадлежат $E_{Q'}$, и $m \leqslant l' - l''$, то из леммы 3 вытекает, что

$$|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_m| \leqslant (n-1) + (n-2) + \ldots + (n-(l'-l'')) =$$
$$= (l'-l'')\left(n - \frac{l'-l''+1}{2}\right).$$

Это доказывает, что $\widehat{L}(n,l',l'') \leqslant (l'-l'')\left(n - \dfrac{l'-l''+1}{2}\right)$.

3. Нижние оценки для функций Шеннона

Докажем теперь нижние оценки для сформулированных в п. 1 теорем. Доказательства будут заключаться в построении конкретных примеров автоматов, на которых достигаются верхние оценки для функций Шеннона.

Лемма 10. $L(n,l) \geqslant (l-1)\left(n - \dfrac{l}{2}\right)$.

Доказательство. Построим следующий автомат $V = (A,Q,B,\varphi,\psi)$, $A = \{0,1\}$, $B = \{0,1\}$, $Q = \{q_1,\ldots,q_n\}$, $Q^{'} = \{q_1,\ldots,q_l\}$.
Функции φ и ψ определим следующим образом:

$$\begin{array}{ll}
\varphi(q_1,a) = q_1, & a \in A; \\
\varphi(q_i,0) = q_{i+1}, & i = 2,\ldots,l-1; \\
\varphi(q_i,1) = q_{i+1}, & i = l,\ldots,n-1; \\
\varphi(q_i,1) = q_1, & i = 2,\ldots,l-1; \\
\varphi(q_i,0) = q_1, & i = l,\ldots,n; \\
\varphi(q_n,1) = q_n; & \\
\psi(q_n,1) = 1; & \\
\psi(q_n,0) = 0; & \\
\psi(q_i,a) = 0, & i = 1,\ldots,n-1, \quad a \in A.
\end{array}$$

Диаграмма Мура этого автомата изображена на рис. 1.

В силу определения функции ψ, для того, чтобы отличить пару состояний (q_i,q_j), $i,j < n$, необходимо некоторое слово $\widetilde{\alpha}$ такое, что или $\varphi(q_i,\widetilde{\alpha}) = q_n$ или $\varphi(q_j,\widetilde{\alpha}) = q_n$. Будем отличать пары $(q_1,q_2),(q_1,q_3),\ldots,(q_1,q_l)$. Чтобы отличить пару (q_1,q_i), $i = 1,\ldots,l$,

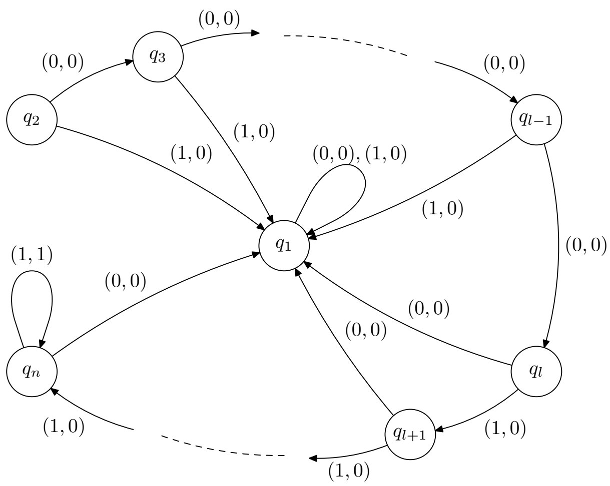

Рис. 1.

необходимо слово, у которого сначала идут $l-i$ нулей (если $l \neq n$), а потом $n-l+1$ единиц. Действительно, если слово α начинается с $m \leqslant l-i$ нулей, за которыми идет 1, то в силу определенных выше функций, получаем, что $\varphi(q_i,\alpha)=q_{i+m}$, и $i+m<i+l-i=l$. Следовательно, $\varphi(q_i,\alpha 1)=q_1=\varphi(q_1,\alpha 1)$. Значит состояния q_1 и q_i не будут отличимы словом α.

Если α начинается с $m>l-i$ нулей, то его можно представить, как $\alpha=\beta^{l-i}0\ldots 0$. Тогда $\varphi(q_i,\alpha)=\varphi(q_l,0\ldots 0)=q_1=\varphi(q_1,\alpha)$.

Легко также видеть, что слово, отличающее (q_i,q_1) должно заканчиваться не менее, чем на $n-l+1$ единиц.

Таким образом, для $\{q_1,\ldots,q_l\}$ можно взять диагностический эксперимент, состящий из слов α_i, $i=2,\ldots,l$, таких, что у α_i сначала идут $l-i$ нулей, а затем $n-l+1$ единиц. И никакой другой диагностический эксперимент для $\{q_1,\ldots,q_l\}$ не будет иметь меньший объем.

$$\sum_{i=2}^{l}\alpha_i=\sum_{i=2}^{l}((l-i)+(n-l+1))=\sum_{i=2}^{l}(n-l+1)=(l-1)(n-\frac{l}{2}).$$

То есть $L(n,l)\geqslant(l-1)(n-\frac{l}{2})$. Лемма доказана.

Лемма 11. $L'(n, l_1, \ldots, l_m) \geqslant (l-1)(n - \frac{l}{2})$, *где* $l = l_1 + \ldots + l_m$.

Доказательство. Построим следующий автомат $V' = (A, Q, B, \varphi, \psi)$: $A = \{0, 1\}$, $B = \{0, 1\}$, $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$.
Пусть $l_1 \leqslant l_2 \leqslant \ldots \leqslant l_m$ и $l_1 + \ldots + l_m = l$.

Пусть $Q' = Q_1 \cup \ldots \cup Q_m$ и $Q' = \{q_1, \ldots, q_l\}$. Построим индуктивно множества $Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_s :\ Q'_1 \cup Q'_2 \cup \ldots \cup Q'_s = Q'$. Пусть

$$Q'_1 = \{q^1_{d_1}, \ldots, q^1_m\},\ d_1 = 1,\ q^1_i \in Q_i,\ i = 1, \ldots, m.$$

Положим $q_1 = q^1_{d_1}, \ldots, q_m = q^1_m$. Пусть уже построены множества Q'_1, $Q'_2, \ldots Q'_k \subset Q'$ и $Q'_1 \cup \ldots \cup Q'_k \neq Q'$. Построим $Q'_{k+1} = \{q^{k+1}_{d_{k+1}}, \ldots, q^{k+1}_m\}$, где

$$d_{k+1} = \min\{i :\ \exists q \in Q_i \setminus (Q'_1 \cup \ldots \cup Q'_k)\}$$

и $q^{k+1}_i \in Q_i \setminus (Q'_1 \cup \ldots \cup Q'_k)$, $i = d_{k+1}, \ldots, m$. Положим:

$$\begin{aligned}
&q_{k(m+1)-(d_1+\ldots+d_k)+1} = q^{k+1}_{d_{k+1}},\\
&q_{k(m+1)-(d_1+\ldots+d_k)+2} = q^{k+1}_{d_{k+1}+1},\\
&\vdots\\
&q_{(k+1)(m+1)-(d_1+\ldots+d_{k+1})+1} = q^{k+1}_{d_{k+1}}.
\end{aligned}$$

Из построения следует, что существует такое d, $d \leqslant l-1$, что $\{q_{d+1}, \ldots, q_l\} \subset Q_m$, и для любых $q_i, q_{i+1} \in \{q_1, \ldots, q_d\}$ выполнено:

$$q_i \in Q_{i_1},\ q_{i+1} \in Q_{i_2},\ i_1 \neq i_2,\ 1 \leqslant i_1, i_2, \leqslant m. \tag{11}$$

Теперь определим функции φ и ψ:

$$\begin{aligned}
&\varphi(q_i, 0) = q_{i+1}, && i = 1, \ldots, d-1;\\
&\varphi(q_d, 0) = q_d; &&\\
&\varphi(q_i, 1) = q_1, && i = 1, \ldots, d-1;\\
&\varphi(q_i, 1) = q_{i+1}, && i = d, \ldots, l-1;\\
&\varphi(q_i, 0) = q_2, && i = d+1, \ldots, l-1,\ d \geqslant 2;\\
&\varphi(q_i, 0) = q_1, && i = d+1, \ldots, l-1,\ d = 1;\\
&\varphi(q_i, 0) = q_{i+1}, && i = l, \ldots, n-1;\\
&\varphi(q_i, 1) = q_1, && i = l, \ldots, n;\\
&\varphi(q_n, 0) = q_n; &&\\
&\psi(q_i, 0) = \psi(q_i, 1) = 0, && i = 1, \ldots, n-1;
\end{aligned}$$

$$\psi(q_n, 0) = 1;$$
$$\psi(q_n, 1) = 0.$$

Из определения функции ψ следует, что для того, чтобы отличить пару состояний (q_i, q_j), $i, j < n$, необходимо некоторое слово $\widetilde{\alpha}$ такое, что или $\varphi(q_i, \widetilde{\alpha}) = q_n$ или $\varphi(q_j, \widetilde{\alpha}) = q_n$. В силу (11) нам надо отличить все пары (q_{i-1}, q_i), $i = 2, \ldots, d$, если $d \geqslant 2$. Докажем, что для того, чтобы отличить пару (q_{i-1}, q_i), $i = 2, \ldots, d$ необходимо слово, у которого сначала идут ровно $d - i$ нулей. Действительно, если мы имеем слово α, у которого сначала больше нулей, чем $d - i$, то, представив его в виде $\alpha = \beta^{d-i}0 \ldots 0$, получим, что $\varphi(q_i, \beta^{d-i}0) = q_d = \varphi(q_{i-1}, \beta^{d-i}0)$, то есть не сможем отличить этим словом. Если мы имеем слово α, которое состоит из числа нулей меньшего, чем $d - i$, то получим: $\varphi(q_{i-1}, \alpha 1) = \varphi(q_i, \alpha 1) = q_1$. Легко также видеть, что слово, отличающее (q_{i-1}, q_i), $i = 2, \ldots, d$, после первых $d - i$ нулей должно иметь ровно $l - d$ единиц и затем не менее $n - l + 1$ нулей. Таким образом, для отличия пар (q_{i-1}, q_i), $i = 2, \ldots d$, необходим набор слов α_i, такой что

$$\sum |\alpha_i| \geqslant \sum_{i=2}^{d} (d - i + l - d + n - l + 1) = \sum_{i=2}^{d} (n - i + 1).$$

Также нам необходимо отличить пары (q_1, q_i), $i = d + 1, \ldots, l$, поскольку $q_1 \in Q_1$, а $q_i \in Q_m$, $i = d + 1, \ldots, l$. Для того, чтобы отличить пару (q_1, q_i), аналогично, как и в лемме 10, доказываем, что необходимо слово, у которого сначала идут ровно $l - i$ единиц, а потом не менее $n - l + 1$ нулей. То есть имеем, что для отличия пар (q_1, q_i), $d + 1 \leqslant i \leqslant l$ необходим набор слов β_i и

$$\sum |\beta_i| \geqslant \sum_{i=d+1}^{l} (l - i + n - l + 1) = \sum_{i=d+1}^{l} (n - i + 1).$$

Значит, любой диагностический эксперимент для $\{Q_1, \ldots, Q_m\}$ в автомате V' имеет объем не менее

$$\sum_{i=2}^{d} (n + 1 - i) + \sum_{i=d+1}^{l} (n - i + 1) = (l - 1)(n - \frac{n}{2}),$$

что и доказывает лемму.

Лемма 12. *$L''(n, l_1, \dots, l_m) \geqslant (l-m)(n - \frac{l-m+1}{2})$, где $l = l_1 + \dots + l_m$.*

Доказательство. Построим автомат $V'' = (A, Q, B, \varphi, \psi)$: $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$, $A = \{0, \dots, m+1\}$, $B = \{0, 1\}$.

Положим в нем

$$\begin{aligned} &Q_1 = \{q_1, \dots, q_{l_1}\},\\ &Q_2 = \{q_{l_1+1}, \dots, q_{l_1+l_2}\},\\ &\vdots\\ &Q_m = \{q_{l_1+\dots+l_{m-1}+1}, \dots q_l\},\ l = l_1 + \dots + l_m. \end{aligned}$$

Определим функции φ и ψ:

$$\begin{array}{ll}
\varphi(q_i, j) = q_{i+1}, & \begin{cases} l_1+\dots+l_j+1 \leqslant i \leqslant l_1+\dots+l_{j+1}-1, \\ j = 0, \dots, m-1; \end{cases}\\
\varphi(q_{l_1+\dots+l_{j+1}}, j) = q_{l_1+\dots+l_{j+1}}, & j = 0, \dots, m-1;\\
\varphi(q_i, j+1) = q_{i+2}, & i = l_1 + \dots + l_{j+1},\ j = 0, \dots, m-2;\\
\varphi(q_i, j+1) = q_{l_1+\dots+l_{j+1}+1}, & \begin{cases} i = l_1+\dots+l_j+1, \dots, l_1+\dots+l_{j+1}-1, \\ j = 0, \dots, m-2; \end{cases}\\
\varphi(q_i, m+1) = q_{l_1+l_2+\dots+l_{j+1}+1}, & \begin{cases} i = l_1+\dots+l_j+1, \dots, l_1+\dots+l_{j+1} \\ j = 0, \dots, m-1; \end{cases}\\
\varphi(q_i, m) = q_1, & i = l_1 + \dots + l_{m-1} + 1, \dots, l-1;\\
\varphi(q_l, m) = q_{l_1+1}; & \\
\varphi(q_i, a) = q_1, & \begin{cases} i = l_1+l_2+\dots+l_j+1, \dots, l_1+\dots+l_{j+1}, \\ a \notin \{j, j+1, m+1\},\ j = 0, \dots, m-1; \end{cases}\\
\varphi(q_i, a) = q_{i+1}, & i = l+1, \dots, n,\ a \in A;\\
\psi(q_i, a) = 0, & i = 1, \dots, n-1;\\
\psi(q_n, a) = 1, & a \in A.
\end{array}$$

Если $l = n$, то положим $\psi(q_i, m+1) = 1$, $i = l_1 + \dots + l_{m-1} + 1, \dots, l$.

Рассмотрим любую пару $(q_{i-1}, q_i) \subset Q_j$. Из приведенных выше функций следует, что для того, чтоб отличить эту пару, необходимо слово, у которого сначала идут ровно $l_1 + \dots + l_j - i$ букв $(j-1)$, затем ровно $l_{j+1} - 1$ буквы (j) и т.д…, затем ровно $l_m - 1$ букв $(m-1)$. Дальше нужна одна буква m, и $m-1$ букв $(m+1)$. Потом небходимо подать не менее $n - l$ любых букв. Таким образом, получаем, что слово, отличающее $(q_{i-1}, q_i) \subset Q_j$, $j = 1, \dots, m$, имеет длину не менее

$$l_1 + \ldots + l_j - i + l_{j+1} - 1 + \ldots + l_m - 1 + m + n - l = n - i + j.$$

Из сказанного выше следует, что для всех пар $(q_{i-1}, q_i) \subset Q_j$, $j = 1, \ldots, m$ нужны разные слова, которые их различают. Значит, для Q_1 любой диагностический эксперимент имеет объем не менее $\sum_{i=2}^{l_1}(n - l + 1)$. Для Q_2 — не менее $\sum_{i=l_1+2}^{l_1+l_2}(n - i + 2)$. И так далее, для Q_m — не менее $\sum_{i=l_1+\ldots+l_{m-1}+2}^{l}(n - i + m)$.

Таким образом, получаем, что для $\{Q_1, \ldots, Q_m\}$ внутренний диагностический эксперимент имеет объем не менее

$$\sum_{i=2}^{l_1}(n - i + 1) + \sum_{i=l_1+2}^{l_1+l_2}(n - i + 2) + \ldots + \sum_{l_2+\ldots+l_{m-1}+2}^{l}(n - i + m).$$

Но эта сумма равна $(n-1)+(n-2)+\ldots+(n-(l-m)) = (l-m)(n-\frac{l-m+1}{2})$. Значит,

$$L''(n, l_1, \ldots, l_m) \geqslant (l - m)(n - \frac{l - m + 1}{2}).$$

Лемма доказана.

Лемма 13. $\widehat{L}(n, l', l'') \geqslant (l' - l'')(n - \dfrac{l' - l'' + 1}{2})$.

Доказательство. Построим автомат $\widehat{V} = (A, Q, B, \varphi, \psi)$, $A = \{0, 1\}$, $B = \{0, 1\}$, $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$. Положим:

$$Q'' = \{q_{l'-l''+1}, \ldots, q_{l'}\},$$
$$Q' = \{q_1, \ldots, q_{l'}\}.$$

Определим функции φ и ψ:

$$\begin{array}{ll}
\varphi(q_i, 0) = q_{i+1}, & i = 1, \ldots, l' - 1; \\
\varphi(q_{l'}, 0) = q_{l'}; & \\
\varphi(q_i, 1) = q_1, & i = 1, \ldots l' - 1; \\
\varphi(q_i, 0) = q_1, & i = l' + 1, \ldots, n; \\
\varphi(q_i, 1) = q_{i+1}, & i = l', \ldots, n; \\
\varphi(q_n, a) = q_n, & a \in A; \\
\psi(q_n, 1) = 1; & \\
\psi(q_n, 0) = 0; & \\
\psi(q_i, a) = 0, & i = 1, \ldots, n - 1,\ a \in A.
\end{array}$$

Ясно, что для отличия любой пары состояний (q_{i-1}, q_i), $2 \leqslant i \leqslant l'$, необходимо слово, начинающееся ровно с $l'-i$ нулей и длины не менее $n-i+1$. Поэтому для того, чтобы отличить любую пару состояний из $\{Q' \setminus Q''\} \cup \{q_{l'-l''+1}\}$ нужно новых $l'-l''$ слов, сумма длин которых не менее $(n-1)+(n-2)+\ldots+(n-(l'-l'')) = (l'-l'')(n-\frac{l'-l''+1}{2})$. Это и доказывает лемму.

Таким образом, мы получили верхние и нижние оценки для всех функций Шеннона, определенных в п. 1. Теорема 1 следует из лемм 4 и 10. Теорема 2 — из лемм 5 и 11. Теорема 3 — из лемм 7 и 12. И, наконец, теорема 4 — из лемм 9 и 13.

В заключение автор выражает благодарность А. С. Подколзину за научное руководство и В. Б. Кудрявцеву за внимание к работе.

Список литературы

[1] Мур Э. Ф. Умозрительные эксперименты с последовательностными машинами. В кн. Автоматы. М.: ИЛ, 1956. С. 179–210.

[2] Кудрявцев В. Б., Подколзин А. С., Ушчумлич Ш. Введение в теорию абстрактных автоматов: Учеб. пособие. М.: МГУ, 1985.

[3] Кудрявцев В. Б., Алёшин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985.