Дискретная математика

том 21 выпуск 1 * 2009

УДК 519.7

Анализ поведения автоматов

© 2009 г. В. Б. Кудрявцев, И. С. Грунский, В. А. Козловский

Обзор содержит результаты, относящиеся к поведенческой и абстрактной теории конечных автоматов. Классическими задачами этой теории являются прямые задачи: задачи анализа процессов преобразования информации, осуществляемых автоматами, и свойств автоматов, и обратные задачи: задачи синтеза автоматов с заданными свойствами и идентификации (восстановления, распознавания, расшифровки, контроля и диагностики) автомата путем экспериментов с ним.

Задача синтеза состоит в построении автомата по заданной его спецификации — заданию на необходимое, возможное и запрещенное поведение, а задача идентификации — в построении автомата с помощью проведения экспериментов с заданным “черным ящиком” — реализацией этого автомата. В процессе эксперимента возникает фрагмент поведения автомата. Поэтому имеется единая исходная основа — фрагмент поведения для решения задач анализа свойств автомата по его поведению и синтеза автомата, удовлетворяющего заданному поведению с некоторой точностью. Эти задачи и рассматриваются в обзоре.

В последние десятилетия активно развиваются два научных направления, это формальные методы синтеза программно-аппаратных вычислительных систем и теория экспериментов с автоматами. Основная задача теории экспериментов состоит в разработке эффективных экспериментов, позволяющих получить (распознать) определенные сведения о строении автомата, его функциях, о характеристиках процесса преобразования информации, осуществляемого этим автоматом. При этом возникает большой круг задач, связанных с классификацией экспериментов, с вопросами разрешимости задач распознавания тех или иных свойств автомата определенными видами экспериментов, с оценками сложности минимальных экспериментов, достаточных для решения тех или иных задач распознавания, а также с оценками сложности построения этих экспериментов. Теория экспериментов интенсивно разрабатывается, в ней получен ряд важных и принципиальных результатов.

Предлагаемый обзор содержит ряд окончательных результатов, однако они являются лишь очередным шагом в исследовании задач анализа и синтеза автоматов по их поведению, которые постоянно наполняются новым содержанием и требуют дополнительных усилий и средств их разрешения.

1. Введение. Задачи, рассматриваемые в обзоре

Обзор содержит результаты, относящиеся к поведенческой и абстрактной теории конечных автоматов. Конечные автоматы и связанные с ними конструкции относятся к важнейшим понятиям дискретной математики и математической кибернетики. Теория автоматов имеет многочисленные применения в программировании, технической кибернетике, теории динамических систем и т. п. Классическими задачами этой теории являются прямые задачи: задачи анализа процессов преобразования информации, осуществляемых автоматами, и свойств автоматов, и обратные задачи: задачи синтеза автоматов с заданными свойствами и идентификации (восстановления, распознавания, расшифровки, контроля и диагностики) автомата путем экспериментов с ним.

Задача синтеза состоит в построении автомата по заданной его спецификации — заданию на необходимое, возможное и запрещенное поведение, а задача идентификации — в построении автомата с помощью проведения экспериментов с заданным "черным ящиком" — реализацией этого автомата. В процессе эксперимента возникает фрагмент поведения автомата. Поэтому имеется единая исходная основа — фрагмент поведения для решения задач анализа свойств автомата по его поведению и синтеза автомата, удовлетворяющего заданному поведению с некоторой точностью. Эти задачи и рассматриваются в работе. Описание поведения автомата задается дескриптором того или иного вида, позволяющим описать поведение автомата с заданной степенью точности.

В последние десятилетия активно развиваются два научных направления. Одно из них — формальные методы синтеза программно-аппаратных вычислительных систем. Важную роль при этом играют средства спецификации, и развитию этих средств уделяется большое внимание. Растет число языков спецификации, разрабатываются средства поддержки разработки спецификаций и методики их использования.

Второе направление — теория экспериментов с автоматами. Экспериментом с автоматом называется процесс подачи на автомат последовательности входных сигналов, наблюдение соответствующего поведения автомата и вывод заключений о функционировании и свойствах автомата, основанных на этих наблюдениях и априорной информации об автомате. Основная задача теории экспериментов состоит в разработке эффективных экспериментов, позволяющих получить (распознать) определенные сведения о строении автомата, его функциях, о характеристиках процесса преобразования информации, осуществляемого этим автоматом. При этом возникает большой круг задач, связанных с классификацией экспериментов, с вопросами разрешимости задач распознавания тех или иных свойств автомата определенными видами экспериментов, с оценками сложности минимальных экспериментов, достаточных для решения тех или иных задач распознавания, а также с оценками сложности построения этих экспериментов. Теория экспериментов интенсивно разрабатывается, в ней получен ряд важных и принципиальных результатов [2–8]. Она имеет широкий круг применений и оказывает значительное влияние на развитие ряда математических и технических дисциплин (технической диагностики, теории динамических систем, теории формальных языков и грамматик, теоретического программирования и других).

Спецификация автомата и фрагменты поведения автомата являются примерами дескриптора автомата. При исследовании точности описания автомата фрагментами важную роль играют так называемые идентификаторы свойств автомата (состояний, входов, выходов) [6] — фрагменты, позволяющие однозначно идентифицировать эти свойства. Идентификаторы дают еще один пример дескриптора.

При решении задач синтеза и идентификации возникает необходимость описывать потенциально бесконечные классы автоматов финитными средствами. Одним из основных таких средств являются недетерминированные автоматы — еще один пример дескриптора.

Таким образом, при исследовании задач синтеза или идентификации автоматов возникает и интенсивно используется ряд частных видов дескрипторов автомата, и эти дескрипторы изучаются своими особыми методами. В связи с этим возникает необходимость разработки теоретического осмысления и обобщения этих частных случаев с целью создания общих методов изучения, создания и использования дескрипторов автомата при решении задач синтеза и идентификации автомата.

Основными проблемами дескрипции автоматов являются анализ дескрипторов данного автомата, синтез автомата по заданным дескрипторам, представление автомата дескрипторами с заданной степенью точности.

Основное внимание в работе уделяется исследованию последней из этих проблем. В качестве основного модельного дескриптора выступают фрагменты автомата. Это объясняется следующими соображениями.

Проблематика восстановления автомата по заданному фрагменту возникла в теории экспериментов и технической диагностике, когда фрагмент — это тест и реакция на него, полученная в эксперименте, а также при синтезе, когда фрагмент — это задание на функционирование синтезируемого автомата. Эта проблематика состоит в анализе точности описания автомата фрагментами, априорно заданными или полученными в эксперименте; создании методов построения фрагментов, представляющих автомат с заданной степенью точности; создании методов синтеза автомата по фрагментам. Указанная проблематика развивается в рамках четырех направлений: синтеза управляющих и вычислительных систем, технической диагностики таких систем, синтаксического распознавания образов, теории экспериментов с автоматами. Развитие этих направлений происходит достаточно независимо друг от друга под определяющим влиянием теории экспериментов.

Основание теории экспериментов с автоматами положено Муром, исследования которого затрагивали два взаимосвязанных аспекта: неотличимость автоматов никакими кратными и никакими простыми (однократными) экспериментами; распознавание автоматов и их состояний с помощью таких экспериментов. Становление теории экспериментов тесно связано с работами А. М. Богомолова и его учеников, М. П. Василевского, А. Гилла, В. Н. Носкова, Н. В. Евтушенко, А. Ф. Петренко, И. К. Рысцова, В. А. Твердохлебова, С. В. Яблонского, Ф. Хенни и его многочисленных последователей, П. Штарке и многих других. Эти исследования можно разделить на три этапа: комбинаторный, сложностной и характеризационный.

Комбинаторный этап касался построения средств анализа автоматов и алгоритмов проведения экспериментов с ними, исходя из комбинаторно-мощностных соображений. Методы и результаты этого этапа достаточно полно представлены в известной книге А. Гилла [12].

На сложностном этапе основное внимание уделяется построению оптимальных по сложности алгоритмов и нахождению сложности проведения экспериментов, а также оптимальных по сложности методов анализа поведения автомата. Это потребовало анализа структуры экспериментов. Этот этап инициирован работами Ф. Хенни и М. П. Василевского, которые проводили построение контрольных экспериментов путем помещения во входные последовательности специальных подпоследовательностей (диагностических, установочных, локализующих, характеристических и т. п.), по реакции на которые исследуемого автомата можно идентифицировать его внутренние состояния. На этом этапе исследовались различные виды таких последовательностей и способы их размещения в эксперименте. Методы и результаты второго этапа достаточно полно представлены в книге В. Б. Кудрявцева, С. В. Алешина, А. С. Подколзина [7]. Один из авторов настоящего обзора (И. С. Грунский), по-видимому, первым назвал эти последовательности и реакции на них идентификаторами состояний, начал их систематическое изучение [4] и обратил внимание на существование идентификаторов других ненаблюдаемых компонент поведения (например, входных последовательностей [6]). На втором этапе получено большое количество частных способов построения контрольных и распознающих экспериментов для случаев, когда они заведомо существуют. Неисследованными остались условия существования и структура таких экспериментов в общем случае. Очень трудным оказался вопрос: что должно присутствовать в этих экспериментах, а что является издержками алгоритмов их построения, то есть вопрос характеризации вышеуказанных экспериментов. Появление первых характеризационных теорем [47] можно отнести уже к становлению третьего, характеризационного, этапа.

Как упоминалось выше, в последнее время возникло важное и интенсивно развивающееся направление "Формальные методы синтеза компьютерных систем", во многом объединяющее вышеуказанные направления. Для него основными задачами являются задачи контроля таких систем на всех этапах их жизни: проектирования (model checking), изготовления и эксплуатации (контроль и диагностика). Появилось значительное число средств описания таких систем на различных уровнях (эксперименты, анкетные языки, k-наборы, частичные и недетерминированные автоматы, временные логики и т. п.). Эти средства фактически описывают фрагменты поведения синтезируемого автомата, зачастую порождаемые неклассическим способом фиксации его поведения. При этом каждый вид таких средств изучается своими специальными методами в отрыве от остальных. Такое разнообразие требует создания общего понятия фрагмента, исследования условий существования, структуры, сложности фрагментов, позволяющих описывать, восстанавливать, идентифицировать автомат с заданной точностью, а также разработки методов создания таких фрагментов. Исследование этого комплекса задач составляет, на наш взгляд, содержание третьего этапа — характеризационного. Актуальность исследований в этом направлении, в силу вышесказанного, все возрастает. Этим исследованиям, выполненным в значительной степени авторами обзора либо под их руководством, посвящена значительная часть работы.

Базовым понятием, на которое опирается изучение вышеуказанного круга задач, является предложенное понятие фрагмента, являющееся естественным обобщением большого числа известных фрагментов частного вида и обладающее их характерными свойствами. Введено отношение фрагмент–автомат, рассмотрены свойства классов фрагментов заданного автомата. Введено понятие кофрагмента (запрещенного фрагмента) автомата, рассмотрены свойства классов автоматов, имеющих заданную пару (фрагмент, кофрагмент). Другое введенное ключевое понятие — понятие идентификатора ненаблюдаемых компонент функционирования автомата, то есть фрагмента, позволяющего однозначно определить значения этих компонент. Показано, что идентификаторы являются мощным инструментом исследования рассматриваемых в работе задач.

Далее введено общее понятие представления автомата-эталона с заданной точностью (подобием) относительно априорного класса автоматов как пары (фрагмент, кофрагмент) автомата-эталона, которая может быть парой (фрагмент, кофрагмент) автомата из априорного класса только если он подобен эталону. Показано, что это понятие охватывает и обобщает ряд частных понятий (контрольные, распознающие эксперименты, анкетные языки, k-наборы и т. п.), известных в теории автоматов. Проведена естественная классификация представлений. Осуществлено систематическое исследование условий существования и структуры представлений.

Получены точные условия существования представлений общего вида и частных их классов в терминах взаимоотношений свойств априорного класса, класса автоматов, подобных эталону, и класса автоматов, неотличимых от автомата-эталона для соответствующего отношения неотличимости. Получены условия существования нетривиальных представлений различных классов, в том числе анкетных языков и контрольных экспериментов.

Предлагаемый обзор содержит ряд окончательных результатов, однако они являются лишь очередным шагом в исследовании задач анализа и синтеза автоматов по их поведению, которые постоянно наполняются новым содержанием и требуют дополнительных усилий и средств их разрешения.

2. Автоматы: эксперименты и идентификаторы

Напомним основные понятия теории автоматов, которые можно найти, например, в [7].

Автоматом (Мили) называется система $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, где S, X, Y — алфавиты состояний, входов и выходов соответственно, а $\delta \subseteq S \times X \times S$, $\lambda \subseteq S \times X \times Y$ — функции переходов и выходов. Как обычно, $\delta(s, x)$ ($\lambda(s, x)$) обозначает множество тех элементов $s' \in S$ ($y' \in Y$), для которых $(s, x, s') \in \delta$ ($(s, x, y') \in \lambda$). Автомат называется детерминированным, если δ и λ являются (частичными) отображениями из $S \times X$ в S и Y соответственно. Автомат называется всюду определенным, если $\delta(s, x)$ и $\lambda(s, x)$ определены для всех $s \in S$ и $x \in X$. В дальнейшем, если не оговорено противное, рассматриваются автоматы, у которых области определения функций переходов и выходов совпадают. Для автомата A соответствующую область определения обозначим через $\operatorname{Dom} A$, а область значений функции f через $\operatorname{Im} f$.

Пусть $S' \subset S$ и

$$\delta(S', x) = \bigcup_{s \in S'} \delta(s, x), \qquad \lambda(S', x) = \bigcup_{s \in S'} \lambda(s, x).$$

Распространим функции автомата на множество X^* по формулам

$$\begin{aligned} \delta(s, e) &= s, \qquad & \delta(s, px) &= \delta(\delta(s, p), x), \\ \lambda(s, e) &= e, \qquad & \lambda(s, e) &= \lambda(s, p)\lambda(\delta(s, p), x), \end{aligned}$$

где $s \in S$, $x \in X$, $p \in X^*$. Будем говорить, что вход-выходное слово $w = (p, q)$ порождается состоянием s автомата A, если $q \in \lambda(s, p)$. С каждым состоянием s ассоциируется множество λ_s всех вход-выходных слов, порождаемых этим состоянием. Если автомат A детерминированный, то λ_s является (частичным) отображением из X^* в Y^* и называется автоматным отображением. Пусть $l(w)$ — длина слова $w \in \lambda_s$, тогда $l(w) = l(p) = l(q)$. Через λ_s^i обозначим множество всех вход-выходных слов длины i, порождаемых состоянием s. Автомат A удобно задавать в виде графа переходов, вершинами которого являются состояния из S, а дугами — четверки (s, x, y, t), где $t \in \delta(s, x)$, $y \in \lambda(s, x)$. Пара (x, y) называется отметкой дуги, s — ее началом, а t — концом. В дальнейшем иногда будем отождествлять автомат со списком всех дуг его графа. Если не оговорено противное, считаем, что автомат имеет хотя бы одну дугу. Состояние t называется достижимым из s, если $t \in \delta(s, p)$ для некоторого $p \in X^*$. Автомат называется сильно связным, если его граф переходов сильно связен. Состояние s называется преходящим в A, если s не является концом ни одной дуги автомата A. Автомат, граф переходов которого не имеет циклов, назовем ацикличным. Если необходимо, алфавиты и функции автомата будем снабжать индексами.

Пусть $A = (S, X, Y, \delta_A, \lambda_A)$, $B = (T, X, Y, \delta_B, \lambda_B)$ — некоторые автоматы. Гомоморфизмом автомата A в автомат B называется такое отображение φ множества S в множество T, что если дуга (s_1, x, y, s_2) принадлежит автомату A, то дуга $(\varphi(s_1), x, y, \varphi(s_2))$ принадлежит B. Следуя [1], гомоморфизм φ называем моно- или эпиморфизмом, если φ — взаимно однозначное отображение или отображение на множество T соответственно. Наличие гомоморфизма обозначаем $A \leqslant B$, а мономорфизма — $A \subseteq B$. Гомоморфизм, являющийся одновременно моно- и эпиморфизмом, назовем изоморфизмом.

Гомоморфизм называется полным, если для всех дуг (t_1, x, y, t_2) автомата B, для которых $t_1 \in \varphi(S)$, найдется дуга (s_1, x, y, s_2) автомата A, для которой $\varphi(s_i) = t_i$, $i = 1, 2$. Автомат A называется подавтоматом автомата B, если существует полный мономорфизм

A в B. Если φ является полным эпиморфизмом автомата A на B, то B называется гомоморфным образом A по φ, что обозначается $B = \varphi(A)$. Если φ является полным изоморфизмом автомата A на B, то автоматы называются изоморфными. Полный изоморфизм обозначаем равенством $A = B$. Гомоморфизм автомата в себя называем эндоморфизмом, а изоморфизм в себя — автоморфизмом.

Пусть φ — гомоморфизм автомата A в автомат B и ϕ — гомоморфизм автомата B в $C = (U, X, Y, \delta_c, \lambda_c)$. Тогда $\phi \cdot \varphi$ обозначает гомоморфизм A в C, для которого, если дуга (s_1, x, y, s_2) принадлежит автомату A, то дуга $(\phi(\varphi(s_1)), x, y, \phi(\varphi(s_2))$ принадлежит C.

Пусть $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ — некоторый автомат. В дальнейшем считаем, что множества входов и выходов автоматов конечны. Автомат, у которого конечно и множество состояний, называется конечным. Множество $U = X \times Y$ назовем внешним алфавитом автомата, оно всегда конечно. Класс всех автоматов в алфавитах X, Y обозначается через $N(X, Y)$ или $N(U)$, в зависимости от удобства. Через $D(X, Y)$ или $D(U)$ обозначается класс детерминированных автоматов в этих алфавитах. Класс всех конечных детерминированных автоматов обозначаем $D_k(U)$, а его подкласс всюду определенных приведенных автоматов — $\mathrm{A}(U)$.

С автоматом A ассоциируется автомат Медведева $A_U = (S, U, \Delta_A)$, где U, S — множества его входов и состояний соответственно, а $\Delta_A \subseteq S \times U \times S$ — отношение переходов, для которого $t \in \Delta_A(s, (x, y))$, если $t \in \delta(s, x)$ и $y \in \lambda(s, x)$. У автоматов A и A_U их графы совпадают, поэтому зачастую эти автоматы будут отождествляться.

Поведением автомата обычно называется способ взаимодействия автомата с внешней средой. Известны различные уточнения поведения. В дальнейшем под поведением будут пониматься множества вход-выходных слов в алфавитах автомата, возможно, с некоторой дополнительной структурой. Основным понятием при изучении поведения автомата следует считать понятие эксперимента с автоматом. В теории автоматов под экспериментом понимается процесс подачи на исследуемый автомат входных слов, наблюдения соответствующих выходных слов — реакций этого автомата, и вывода заключений об исследуемом автомате на основе априорной информации о нем и полученных вход-выходных слов. При этом функции автомата и его внутренние состояния полностью неизвестны и целью эксперимента является их распознавание. Входные слова подаются на начальные состояния автомата. Процесс экспериментирования осуществляется алгоритмом-экспериментатором.

Уточним понятие эксперимента. Назовем автомат A слабо инициальным, если выделено подмножество его возможных начальных состояний S_0, и обозначим его через $A = (S, X, Y, \delta, \lambda, S_0)$. Если S_0 состоит из одного состояния s_0, то назовем автомат $A = (S, X, Y, \delta, \lambda, s_0)$ инициальным. В случае $S_0 = S$ автомат A назовем неинициальным.

Рассмотрим слабо инициальный автомат A. Множество W вход-выходных слов назовем экспериментом автомата A, если $W \subseteq \lambda_s$ для некоторого $s \in S_0$. Зафиксируем некоторый эксперимент W автомата A. Множество P всех таких входных слов p, что $(p, q) \in W$ для некоторого $q \in Y^*$, назовем тестом, порождающим эксперимент W. Множество Q всех таких выходных слов q, что $(p, q) \in W$ для некоторого слова p из теста P, назовем наблюдением, порожденным тестом P. Эксперимент W будем понимать также как пару тест P и наблюдение Q и будем писать $W = (P, Q)$.

Автомату A поставим в соответствие множество всех его экспериментов $\mathrm{Ex}(A)$. Это множество частично упорядочено отношением включения $\subseteq$. Через $\mathrm{Ex}^{\max}(A)$ обозначим множество всех максимальных (по этому отношению) экспериментов автомата A. Ясно, что экспериментами этого множества могут быть λ_s для некоторых $s \in S_0$.

Автоматы A и B назовем неотличимыми никаким экспериментом, если выполняется соотношение $\mathrm{Ex}(A) = \mathrm{Ex}(B)$. Если A и B всюду определены, то последнее равенство равносильно равенству $\mathrm{Ex}^{\max}(A) = \mathrm{Ex}^{\max}(B)$. Для всюду определенных детерминированных неинициальных автоматов эти равенства равносильны соотношению $(A, B) \in \varepsilon$.

Через $\mathrm{Ex}(U)$ обозначим множество всех $W \subseteq U^*$, которые являются экспериментами некоторого детерминированного автомата с внешним алфавитом $U = X \times Y$.

Автомат $A = (S, X, Y, \delta, \lambda, s_0)$ называется инициально связным, если для любого его состояния s существует слово $p \in X^*$, для которого $s \in \delta(s_0, p)$. Класс всех конечных детерминированных инициально связных приведенных инициальных автоматов обозначим через $\mathrm{A}_I(U)$.

Слабо инициальному автомату $A \in \mathrm{A}(U)$ поставим в соответствие множество $L_A = \mathrm{Ex}^{\max}(A) = \{\lambda_s\}_{s \in S_0}$. Пусть $L_A^k = \{\lambda_s^k\}_{s \in S_0}$.

Распространим понятие гомоморфизма на слабо инициальные автоматы: пусть $A = (S, X, Y, \delta_A, \lambda_A, s_0)$, $B = (T, X, Y, \delta_B, \lambda_B, T_0)$ — детерминированные слабо инициальные автоматы. Отображение $\varphi\colon S \to T$ назовем гомоморфизмом автомата A в B, если $\varphi(s) \in T_0$ для всех $s \in S_0$ и $\varphi(\delta_A(s, x)) = \delta_B(\varphi(s), x)$, $\lambda_A(s, x) = \lambda_B(\varphi(s), x)$ для всех $s \in S$, $x \in X$. Существование гомоморфизма обозначаем неравенством $A \leqslant B$, а изоморфизма — равенством $A = B$. Ясно, что для слабо инициальных автоматов $A, B \in A(U)$ равенства $A = B$ и $L_A = L_B$ равносильны.

Проблемой анализа автомата A будем называть проблему исследования свойств $\mathrm{Ex}(A)$ или L_A, если $A \in \mathrm{A}(U)$. Проблемой синтеза автомата будем называть проблему построения автомата (чаще всего из класса $\mathrm{A}(U)$), для которого $\mathrm{Ex}(A)$ равно заданному множеству экспериментов $E \subseteq \mathrm{Ex}(U)$.

При постановке и исследовании проблемы синтеза обычно различаются две ситуации:

(а) множество E задается на достаточно формализованном языке;

(б) множество E может быть получено в результате экспериментирования с заданным “черным ящиком” — исследуемым автоматом.

Последняя ситуация известна как расшифровка автоматов. Ей уделяется основное внимание в данной работе.

Алгоритмы-экспериментаторы расшифровки делятся на два класса: распознающие и контрольные. Алгоритм-экспериментатор (или, как обычно говорят, эксперимент) называется распознающим или идентифицирующим относительно класса $F \subseteq \mathrm{A}(U)$, если в результате проведения процесса экспериментирования с “черным ящиком” из F этот алгоритм полностью определяет его множество экспериментов, то есть распознает его с точностью до изоморфизма.

Такой алгоритм называется контрольным относительно класса $F \subseteq \mathrm{A}(U)$ и автомата-эталона $A \in \mathrm{A}(U)$, если в результате экспериментирования с “черным ящиком” из F этот алгоритм определяет, изоморфны A и “черный ящик” или нет.

2.1. Контрольные эксперименты

Рассмотрим одно из уточнений понятия “контрольный эксперимент”. Следуя вышесказанному, контрольным экспериментом относительно $F \subseteq \mathrm{A}_I(U)$ и $A \in \mathrm{A}_I(U)$ назовем такое множество W вход-выходных слов, для которого $W \subseteq L_A = \{\lambda_{S_0}\}$, и если $W \subseteq L_B$, где $B \in F$, то $A = B$. Если W — контрольный эксперимент для A и F, то контрольный алгоритм-экспериментатор состоит в подаче на “черный ящик” входных слов $p \in P$, где P — тест, порождающий W, в наблюдении реакции q “черного ящика” на p и проверке, принадлежит или не принадлежит (p, q) множеству W.

Для исследования свойств экспериментов автомата введем на классе $\mathrm{A}_I(U)$ метрику.

Функция $\rho\colon A_I(U) \times A_I(U) \to \mathbf{R}^+$ с набором аксиом

(1) $\rho(A, B) = 0$ в точности тогда, когда $A = B$;

(2) $\rho(A, B) = \rho(B, A)$;

(3) $\rho(A, C) \leqslant \rho(A, B) + \rho(B, C)$, где $A, B, C \in \mathrm{A}_I(U)$,

называется метрикой, а пара $(\mathrm{A}_I(U), \rho)$ — метрическим пространством. Метрику ρ назовем вычислимой, если существует алгоритм вычисления расстояния $\rho(A, B)$ для произвольных $A, B \in \mathrm{A}_I(U)$.

Метрику в классе автоматов можно вводить различными способами, но особенно отметим метрику β, для которой положим $\beta(A, B) = 0$, если $A = B$, и $\rho(A, B) = 1/k$, если $L_A^k \neq L_B^k$ и $L_A^{k-1} = L_B^{k-1}$. Метрику β назовем бэровской.

Бэровская метрика β является вычислимой, поскольку если $A \neq B$, то $L_A^k \neq L_B^k$ для всех $k \geqslant n_A + n_B - 1$, где $n_A = |S|$, и следовательно, $\rho(A, B) \geqslant 1/k$ для таких k.

Окрестностью с центром $A \in \mathrm{A}_I(U)$ и радиусом $r \in \mathbf{R}^+$ назовем множество автоматов

$$O_r(A) = \{B \mid B \in \mathrm{A}_I(U), \rho(A, B) < r\}.$$

Автомат A является предельным автоматом класса $F \subseteq \mathrm{A}_I(U)$, если для любого $r > 0$ класс $O_r(A) \cap (F - \{A\})$ не пуст. Через $\lim F$ обозначим множество всех предельных автоматов класса F.

Для бэровской метрики β и произвольных $F \subseteq \mathrm{A}_I(U)$, $A \in \mathrm{A}_I(U)$ справедлив следующий критерий существования контрольного эксперимента [17].

Теорема 2.1. *Следующие утверждения равносильны.*

(1) *Существует контрольный эксперимент относительно A и F;*

(2) *Множество L_A^k является контрольным экспериментом относительно A и F для некоторого k;*

(3) $O_{1/k}(A) \cap F \subseteq \{A\}$ *для некоторого k;*

(4) $O_{1/k}(A) \cap F$ *— конечное множество для некоторого k;*

(5) $A \notin \lim F$.

Этот критерий показывает, что в бэровской метрике β процесс вывода заключений в процессе экспериментирования сводится к проверке условия 3.

Если класс F конечен, то существует верхняя граница t числа состояний автоматов из $F \cup \{A\}$, и поэтому L_A^{2t} является контрольным экспериментом. Для произвольного бесконечного класса F критерий неконструктивен, однако далее будут рассмотрены такие бесконечные классы, для которых этот критерий конструктивен.

2.2. Фрагменты автомата

Задать автомат значит задать его алфавиты и функции. Функции автомата удобно задавать графом, который, в свою очередь, задается списком дуг. Дуга (s, x, y, t) несет следующую локальную информацию об автомате: если известно, что он находится в состоянии s и известен входной сигнал x, то автомат перейдет в состояние t и выдаст на выходе сигнал y. Поскольку имена начал и концов дуг известны точно, список дуг однозначно превращается в граф автомата отождествлением вершин с одинаковыми именами.

Если автомат известен частично, то будем считать, что эта частичная информация задана графом, в котором частичность информации заключается в том, что

(1) некоторые дуги автомата неизвестны полностью,

(2) некоторые дуги автомата заданы с неопределенностью: отметка $u = (x, y)$ неизвестна и вместо нее известно некоторое подмножество U' внешнего алфавита U, причем $u \in U'$, а вместо s, t известны $S', S'' \subseteq S$, для которых $s \in S'$, $t \in S''$.

Таким образом, с неопределенностью известны как вход-выходные отметки на дугах, так и связи между дугами. Основываясь на этих соображениях, введем основное понятие — понятие фрагмента автомата.

Пусть $v_i = U_{i1}U_{i2}\ldots U_{ik}$ суть слова в алфавите 2^U, $i = 1, 2$, то есть $U_{ij} \subseteq U$ для всех i, j. Если $U_{1j} \subseteq U_{2j}$ для всех j, $1 \leqslant j \leqslant k$, то первое слово v_1 назовем уточнением второго слова v_2, а второе — расширением первого, что обозначим включением $v_1 \subseteq v_2$. Если слово v_i понимать как терм в алгебре Клини, определяющий язык в алфавите U, т. е. считать, что $v_i = \{u_1 \ldots u_k \mid u_j \in U_{ik}\}$, то последнее включение совпадает с обычным теоретико-множественным включением. Распространим введенное включение на языки в алфавите 2^U. Пусть V_i — множество слов в этом алфавите, $i = 1, 2$. Если для каждого $v_1 \in V_1$ найдется его расширение $v_2 \in V_2$, то V_1 назовем уточнением V_2, а V_2 — расширением, что обозначим $V_1 \subseteq V_2$. Если V_i понимать как объединение языков $v \in V_i$, то последнее включение не противоречит теоретико-множественному включению.

Пусть $R_i = (T_i, 2^U, \Delta_i)$ — автоматы Медведева, $i = 1, 2$, из класса $N(2^U)$. Пусть $\varphi\colon T_1 \to T_2$ — отображение, для которого, если (t_1, U_1, t_2) — дуга автомата R_1, найдется такое уточнение $U_2 \subseteq U_1$, что $(\varphi(t_1), U_2, \varphi(t_2))$ — дуга автомата R_2. В отличие от ранее введенного гомоморфизма, отображение φ будем называть слабым гомоморфизмом. В случае существования слабого гомоморфизма пишем $R_1 \sqsubseteq R_2$.

Напомним, что $D_k(X, Y)$ — класс всех конечных, детерминированных, возможно частичных автоматов, у которых области определения функций совпадают. Пусть A — некоторый автомат из этого класса. Автомат $R \in N(2^U)$ назовем фрагментом автомата A, если $R \sqsubseteq A_u$. Отождествляя A_u и A, будем также писать $R \sqsubseteq A$. Фрагмент R назовем непосредственным, если отметка каждой его дуги состоит из одной буквы внешнего алфавита U и R является детерминированным автоматом, то есть, если $R \in D(U)$. В противном случае фрагмент называется косвенным.

Приведем примеры фрагментов автомата, проясняющие смысл этого понятия. Рассмотрим вначале непосредственные фрагменты. Пусть автомат A порождает вход-выходное слово w. Тогда строчный автомат $R(w)$ является конечным непосредственным фрагментом автомата A, полученным при наблюдении входов и выходов автомата. Ясно, что в общем случае существует несколько гомоморфизмов фрагмента $R(w)$ в автомат A. Для любого множества W вход-выходных слов, порождаемых этим автоматом, автомат $R(W)$ является его фрагментом. Если $W \in \mathrm{Ex}(A)$, то дерево $D(W)$ тоже является фрагментом автомата A. Переход от $W \in \mathrm{Ex}(A)$ к $D(W)$ взаимно однозначен, поэтому можно считать, что все эксперименты из $\mathrm{Ex}(A)$ и их прямые суммы являются фрагментами автомата. Ясно, что $D(\lambda_s)$ — фрагмент автомата A для всех $s \in S$. Кроме этого, сам автомат и все его подавтоматы являются его непосредственными фрагментами.

Рассмотрим некоторые косвенные фрагменты автомата A. Если автомат порождает на выходе слово $q = y_1 \ldots y_k$, то это слово q можно понимать как слово $v = (X \times y_1)\ldots$

$(X \times y_k)$ в алфавите 2^U, и строчный автомат $R(v)$ является конечным косвенным фрагментом, полученным при наблюдении только выходов автомата. Если A породил вход-выходные слова w_1, w_2, и известно, что от порождения слова w_1 до начала порождения слова w_2 прошло k тактов работы автомата, то получаем слово $v = w_1 U^k w_2$ в алфавите 2^U, и строчный автомат $R(v)$ является косвенным фрагментом автомата. Из этих примеров ясно, что аналогично строятся косвенные фрагменты, если в процессе экспериментирования с автоматом A в течение некоторого конечного интервала работы автомата не наблюдаются те или иные компоненты входного и выходного векторов (в случае, когда автомат имеет структурные входы и выходы).

Из приведенных рассуждений следует, что фрагменты являются гибким средством описания функционирования автомата и охватывают такие важные частные случаи как эксперименты, ограниченно-детерминированные функции, наблюдения и т. п.

Пусть $\mathrm{Fr}(A)$ — класс всех фрагментов автомата $A \in D_k(U)$. В силу сказанного выше, всякий эксперимент входит в этот класс. Если $R \in N(U)$ конечен, то существует тривиальный алгоритм проверки того, является ли R фрагментом автомата A. Поэтому подкласс $\mathrm{Fr}_k(A)$ конечных фрагментов автомата A всегда бесконечен и рекурсивен. Пусть $\mathrm{Fr}(U) = \bigcup_{A \in D_k(U)} \mathrm{Fr}(A)$ есть класс всех фрагментов в алфавите 2^U. Легко видеть, что этот класс является собственным подклассом класса $N(2^U)$, и подкласс $\mathrm{Fr}_k(U)$ конечных фрагментов бесконечен, рекурсивен и включает в себя класс автоматов $D_k(U)$.

В результате определены два класса объектов: класс автоматов $D(U)$ и класс фрагментов $F(U)$, а также отношение φ дескрипции автомат–фрагмент, то есть $(A, R) \in \varphi$, если $A \in D_k(U)$ и $R \sqsubseteq A$. В монографии [22] автомату $A \in \mathrm{A}(U)$ ставится в соответствие класс его фрагментов $F(A)$, а фрагменту R — класс $\mathrm{A}(R) \subseteq \mathrm{A}(U)$ всех конечных, детерминированных, всюду определенных приведенных автоматов A, для которых $R \sqsubseteq A$. При этом говорят, что R описывает класс $\mathrm{A}(R)$, или, что R определяет A с точностью $\mathrm{A}(R)$. В рамках классов $F(A)$ и $\mathrm{A}(R)$ в книгах [6, 22] систематически исследуются свойства фрагментов различных видов.

2.3. Идентификаторы состояний автомата

Пусть A — некоторый конечный детерминированный автомат с совпадающими областями определения функций переходов и выходов, то есть $A \in D_k(U)$. Этот автомат далее будем называть эталоном. Рассмотрим такие фрагменты эталона, которые позволяют однозначно определять его внутренние состояния.

Пусть R — некоторый фрагмент эталона и t — некоторое произвольное фиксированное состояние фрагмента. Фрагмент с фиксированным состоянием t обозначим R_t. Фрагмент R_t назовем идентификатором состояния s эталона, если для любого слабого гомоморфизма φ фрагмента в эталон выполняется равенство $\varphi(t) = s$. Этот фрагмент назовем идентификатором состояний эталона, если R_t является идентификатором некоторого состояния s эталона A.

С введенными понятиями фрагмента автомата, отношения дескрипции фрагмент–автомат, понятием идентификатора состояний автомата связан целый ряд хорошо известных и старейших задач теории автоматов, которые решались для конкретных видов автоматов и их фрагментов. К их числу относятся такие задачи как задачи определения внутреннего состояния автомата путем эксперимента с ним [12, 16], задачи синтеза автомата по заданному фрагменту (эксперименту [17, 18], анкетным языкам [20, 21]), задачи сравнения поведения автоматов (эквивалентность, неотличимость простым или кратным экспериментом), задачи контроля и распознавания автоматов). Более подробно эти связи рассмотрены в монографиях [6, 11, 22]. В них же показано, что идентификаторы являются мощным и адекватным средством исследования свойств фрагментов автомата и, особенно, его представлений.

2.4. Маркеры состояний автомата

Пусть A — некоторый автомат из $\mathrm{A}(U)$, а M_A — множество всех тех вход-выходных сигналов (x, y), для которых существует такое единственное состояние s этого автомата, что $(x, y) \in \lambda_s$. Другими словами, M_A — множество всех начальных идентификаторов состояний длины 1 автомата A. Определим отношение дескрипции правилом $\varphi \subseteq \mathrm{A}(U) \times 2^U$, $\varphi(A) = M_A$. Далее будет рассмотрена следующая задача. Произвольно зафиксируем некоторое множество $M \subseteq U$. Элементы этого множества назовем маркерами. Рассмотрим класс $\mathrm{A}(U, M)$ всех тех автоматов A, для которых $M_A \supseteq M \cap \Phi_A$. Состояние автомата $A \in \mathrm{A}(U, M)$, порождающее некоторый маркер, назовем маркированным (отмеченным). В дальнейшем исследуется структура класса $\mathrm{A}(U, M)$, его интересных подклассов и его дополнения до $\mathrm{A}(U)$. Рассматриваются также кратные контрольные и распознающие эксперименты для этого класса и его подклассов.

2.5. Характеризаторы классов автоматов, неотличимых экспериментами

Пусть $A = (S, X, Y, \delta_A, \lambda_A)$ — произвольный детерминированный конечный всюду определенный автомат. Пусть P — некоторое множество входных слов, называемое далее тестом. Каждое состояние s автомата и этот тест порождают эксперимент $W_s = \{(p, \lambda_A(s, p))\}$, $p \in P$. Множество всех экспериментов автомата A, порожденных этим тестом, обозначим через $\mathrm{Ex}_P(A)$, то есть $\mathrm{Ex}_P(A) = \{W_s\}_{s\in S}$.

Пусть автомат $B = (T, X, Y, \delta_B, \lambda_B)$ тоже конечен, детерминирован и всюду определен. Будем говорить, что A неотличим от B экспериментами, порожденными тестом P, если $\mathrm{Ex}_P(A) \subseteq \mathrm{Ex}_P(B)$. Отношение неотличимости такими экспериментами обозначим γ_P. Оно рефлексивно, транзитивно, но в общем случае не антисимметрично и является предпорядком. Этот предпорядок порождает эквивалентность $\rho_P = \gamma_P \cap \gamma_P^{-1}$, то есть $(A, B) \in \rho_P$, если $\mathrm{Ex}_P(A) = \mathrm{Ex}_P(B)$. Эту эквивалентность назовем P-неотличимостью, а автоматы P-неотличимыми.

Пусть $\mathbf{P} \subseteq 2^{X^*}$ есть некоторое множество тестов. Оно порождает предпорядок $\gamma_{\mathbf{P}} = \bigcap_{p\in \mathbf{P}} \gamma_p$ и эквивалентность $\rho_{\mathbf{P}} = \bigcap_{p\in \mathbf{P}} \rho_p$.

Легко видеть, что класс $\varepsilon(A)$ конечных детерминированных всюду определенных автоматов, неотличимых от A никаким экспериментом, бесконечен. Поскольку $\varepsilon \subseteq \rho_P$ для любых P, класс $\rho_P(A)$ тоже бесконечен. Для того, чтобы сделать более прозрачной структуру этого класса, в дальнейшем факторизуем его по ε, то есть будем считать, что ρ_P задано на классе приведенных автоматов.

В книге [6] осуществляется общий подход к изучению свойств класса $\rho_P(A)$ автоматов, P-неотличимых от A для различных видов тестов P, то есть автоматов, неотличимых экспериментами различного вида. Рассматривались отношения неотличимости автоматов экспериментами ограниченных высоты и кратности, экспериментами ограниченной высоты, простыми экспериментами и т. п.

При рассмотрении неотличимых автоматов основное внимание уделяется следующим задачам. Пусть α — некоторое отношение неотличимости автоматов. Задачей характеризации отношения α назовем задачу нахождения конструктивных условий, при которых автоматы находятся в этом отношении. Эти условия могут быть выражены в различных терминах. Наш подход к характеризации заключается в следующем: изучение исходного отношения α заменяется изучением другого, в некотором смысле удобного, хорошо известного характеристического отношения β. Для этого автомату ставится в соответствие χ (зависящее от α и β) — некоторый автомат-характеризатор $\chi(A)$ так, чтобы $(A, B) \in \alpha$ тогда и только тогда, когда $(\chi(A), \chi(B)) \in \beta$. В связи с этим возникают задачи анализа — перехода от A к характеризатору, и обратная ей задача синтеза — построения A по заданному характеризатору. Вторая цель, для которой строится характеризатор, — исследование структуры класса $\alpha(A)$. Для вышеуказанных отношений удалось построить характеризаторы и с их помощью найти критерии конечности этих классов, выделить общую часть всех автоматов из класса. При этом важную роль играют соответствующие идентификаторы.

Определим характеризатор для отношения неотличимости автоматов экспериментами кратности, не большей r и высоты не большей i. Пусть $A, B \in \mathrm{A}(U)$. Пусть

$$\mathrm{Ex}_{ri}(A) = \{w \mid w \in \mathrm{Ex}(A),\ r(w) \leqslant r,\ h(w) \leqslant i\}.$$

Тогда полагаем, что $(A, B) \in \rho_{ri}$, если $\mathrm{Ex}_{ri}(A) = Ex_{ri}(B)$. Введенное отношение назовем отношением (r, i)-неотличимости.

Напомним, что $v \leqslant w$ означает, что слово v является начальным отрезком слова w. Пусть $W \subseteq U^*$, тогда $W^{\max}$ обозначает множество всех максимальных экспериментов (по $\leqslant$) из множества W. Пусть $E = \{W_1, \ldots, W_k\}$ — некоторое множество экспериментов. Эксперимент W_j назовем максимальным в E, если $W_j = W_j^{\max}$ и $W_j \leqslant W_i$ влечет $W_i \subseteq W_j$.

Рассмотрим $\mathrm{Ex}_{ri}(A)$. Это множество конечно, поэтому для любого $W \in \mathrm{Ex}_{ri}(A)$ найдется максимальный эксперимент из этого множества. Подмножество всех максимальных экспериментов обозначим Φ_A^{ri}. Каждый такой максимальный эксперимент W состоит из попарно несравнимых по $\leqslant$ слов длины i и кратности $r(W)$,

$$r(W) = \begin{cases} r & \text{при } m^i \geqslant r, \\ m^i & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь $m = |X|$. По автомату A построим $\chi(A, \rho_{ri})$ следующим образом. Множество $W = W_1 \cup \ldots \cup W_k$, где $W_j \in \Phi_A^{ri}$ для всех j, $i \leqslant j \leqslant k$, называется полным относительно Φ_A^{ri}, если одновременно выполняются три условия:

(1) для всякого входного слова p длины i найдется такое выходное слово q такой же длины, что $(p, q) \in W$;

(2) если $(p, q_1), (p, q_2) \in W$, то $q_1 = q_2$;

(3) если $Q \leqslant W$ и $r(Q) = r$, то $Q \in \Phi_A^{ri}$.

Первые два условия равносильны существованию такого конечно автоматного отображения $\lambda\colon X \to Y$, для которого $\lambda^i = W$.

По множеству Φ_A^{ri} построим автомат $G_{ri}(A) = (G, X, Y, \Lambda, B, \Delta, \Lambda)$, возможно недетерминированный, у которого множество состояний G равно множеству всех полных множеств вход-выходных слов, составленных из экспериментов, входящих в Φ_A^{ri}, всевозможными способами. Функции переходов Δ и выходов Λ этого автомата определяются следующими формулами: пусть $W, Q \in G$ и $x \in X$, $y \in Y$, тогда

$$\Delta(W, x) = \{Q \mid \exists y[((x, y) \setminus W) \leqslant Q]\},$$
$$\Lambda(W, x) = \{y \mid (x, y) \leqslant W\}.$$

Напомним, что $v \setminus W = \{w \mid vw \in W\}$. Если $i = 1$ и $(x, y) \in W$, то $(x, y) \setminus W = e$, где e — пустое вход-выходное слово. В теории автоматов принято, что $e \leqslant Q$ для всех Q. Поэтому в этом случае $\Delta(W, x) = G$ для всех $x \in X$. Из условия 1) для полных относительно Φ_A^{ri} множеств следует, что $|\Delta(W, x)| = 1$ для всех $W \in G$ и $x \in X$.

В [6] показано, что автомат $G_{ri}(A)$ приведенный, в общем случае недетерминированный, и справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. $(A, B) \in \rho_{ri}$ *тогда и только тогда, когда* $G_{ri}(A) = G_{ri}(B)$.

Это утверждение дает конструктивный критерий (r, i)-неотличимости двух автоматов. Она показывает, что $G_{ri}(A)$ является характеризатором автомата A относительно ρ_{ri}, поэтому обозначения $G_{ri}(A)$ и $\chi(A, \rho_{ri})$ будем считать синонимами. Заметим, что построенный характеризатор не является единственно возможным.

Таким образом, можно определить отношение дескрипции, полагая $(A, G) \in \varphi$, если $G = G_{ri}(A)$. По определению $\varphi(A) = G_{ri}(A)$ и $\varphi^{-1}(G_{ri}(A)) = \rho_{ri}(A)$.

Аналогичные характеризаторы для классов $\upsilon_r(A)$, где $\upsilon_r = \bigcap_{i=1}^{\infty} \rho_{ri}$, для классов $\varepsilon_i(A)$, где $\varepsilon_i = \bigcap_{r=1}^{\infty} \rho_{ri}$, и ряда других отношений определены в [6, 22]. Для этих способов дескрипции рассмотрены и в основном решены проблемы анализа дескриптора и представления автомата дескриптором с точностью до изоморфизма.

2.6. Спецификация автоматов с помощью недетерминированного автомата

При синтезе автоматов рассматриваются различные ограничения на свойства синтезируемого автомата (на верхнюю границу числа состояний, на функцию неисправностей и другие [22]). Одним из наиболее естественных является ограничение на возможное поведение автомата, задаваемое множеством W вход-выходных слов во внешнем алфавите автомата. При этом множеству W ставится в соответствие класс инициальных автоматов $A = (S, X, Y, \delta, \lambda, a_0) \in \mathrm{A}(U)$, для которых $\lambda_{a_0} \subseteq W$, или ставится в соответствие класс инициальных автоматов $A \in \mathrm{A}(U)$, для которых $W \subseteq \lambda_{a_0}$. Во втором случае $D(W)$ является фрагментом автомата A, и эта ситуация рассматривалась ранее. Рассмотрим первый случай. Событие W зачастую задается с помощью слабо инициального недетерминированного автомата-спецификации, а автоматы A, у которых $\lambda_{a_0} \subseteq W$, называются реализациями этой спецификации.

Пусть $C = (S, X, Y, \delta_C, \lambda_C, S_0)$ — слабо инициальный конечный недетерминированный автомат, у которого области определения функций совпадают. Автомат C порождает событие $L(C) = \bigcup_{s \in S_0} \lambda_s$. Инициальный автомат $A \in \mathrm{A}(U)$ называется реализацией автомата C, если выполняется соотношение $\lambda_{a_0} \subseteq L(C)$. Таким образом имеет место отношение дескрипции такое, что $(A, C) \in \varphi$, если A — реализация спецификации C. Тогда $\varphi^{-1}(C)$ определяет класс реализаций автомата C, а $\varphi(A)$ — класс спецификаций автомата A.

Понятие, аналогичное реализации, первоначально исследовалось в теории сверхъязыков А. Черчем, Б. А. Трахтенбротом, Р. Макнотоном ([8], гл. 2). В [19] введено понятие реализации (в оригинале — интеграла) множества W и найдена характеризация наименьшей в некотором смысле спецификации для заданного класса реализаций. Реализации данной спецификации неоднократно применялись при сертификации протоколов [23]. В [25] найдены критерии пустоты, одноэлементности класса $\varphi^{-1}(C)$, предложен алгоритм синтеза минимальной по числу состояний реализации.

Далее будет рассмотрено несколько отличное понятие реализации и исследована структура класса реализаций данной спецификации.

3. Фрагменты автоматов

Пусть A — некоторый инициальный автомат из класса $D_k(U)$ детерминированных конечных автоматов во внешнем алфавите $U = X \times Y$. Пусть также $\mathrm{Fr}(A)$ — класс всех фрагментов этого автомата. Рассмотрим простейшие свойства фрагментов этого автомата. Пусть R, Q — фрагменты автомата A. Легко видеть, что $R \sqsubseteq Q$ влечет включение $\mathrm{A}(R) \subseteq \mathrm{A}(Q)$. Поэтому можно говорить, что Q содержит не меньше информации об автомате, чем R. Напомним, что $\mathrm{A}(R) \subseteq \mathrm{A}(U)$ — класс всех конечных всюду определенных приведенных автоматов, фрагментом которых является R.

Отношение $\sqsubseteq$ является предпорядком и порождает эквивалентность $\equiv$ такую, что $R \equiv Q$, если $R \sqsubseteq Q \sqsubseteq R$. Класс всех фрагментов, эквивалентных R, обозначим $K(R)$. Из определения следует, что если $Q \sqsubseteq R$, то $(R + Q) \in K(R)$, таким образом, класс $K(R)$ замкнут по сложению автоматов.

Рассмотрим конечные фрагменты. Пусть R конечен и $K_k(R)$ — класс всех эквивалентных ему конечных фрагментов. По сказанному выше он рекурсивен. Множество $\{nR\}$, $n = 1, 2, \ldots$, образует бесконечную цепь фрагментов из $K_k(R)$, и следовательно, этот класс бесконечен. Обозначим через $M(R)$ класс всех тех конечных Q, не эквивалентных R, для которых $Q \sqsubseteq R$. Рассмотрим отображение $\varphi\colon M(R) \to K_k(R)$, для которого $\varphi(Q) = Q + R$. Из определения следует, что если $Q_1 \neq Q_2$, то $\varphi(Q_1) \neq \varphi(Q_2)$. Поскольку $R \notin M(R)$, фрагменты nR не имеют прообразов по φ. Следовательно, φ — инъекция, но не биекция. Поскольку $M(R) = \bigcup_{Q \in M(R)} K_k(Q)$, справедливо неравенство $|\bigcup K_k(Q)| \leqslant |K_k(R)|$.

Ядром конечного фрагмента R назовем такой его подавтомат Q, для которого существует полный слабый гомоморфизм φ, причем $Q = \varphi(R)$, а всякий слабый эндоморфизм фрагмента Q в себя является полным автоморфизмом. По определению, ядро фрагмента входит в $K_k(R)$.

Теорема 3.1. *Для каждого конечного фрагмента существует единственное с точностью до изоморфизма ядро.*

Операция выделения ядра фрагмента R является операцией открывания, то есть для нее выполняются условия направленности, идемпотентности и изотонности. Из теоремы 3.1 вытекает ряд следствий, характеризующих эквивалентные фрагменты.

Следствие 3.1. (1) *Конечные фрагменты эквивалентны тогда и только тогда, когда их ядра равны (изоморфны).*

(2) *Ядро конечного фрагмента является наименьшим по включению элементом в классе $K_k(R)$.*

Фрагмент, совпадающий со своим ядром, называем ядерным. Очевидно, что всякий древовидный непосредственный фрагмент является ядерным, но ациклический непосредственный фрагмент ядерным может не быть. В случае, когда автомат принадлежит $\mathrm{A}(X, Y)$, он является ядерным фрагментом самого себя. Класс всех ядерных фрагментов автомата A в силу следствия 3.1 частично упорядочен отношением $\sqsubseteq$. Ядро автомата $A \in D_k(U)$ является его наибольшим элементом, а фрагмент, состоящий из одной дуги с отметкой $X \times Y$, — наименьшим элементом.

Конечный непосредственный фрагмент назовем правильным. Класс правильных фрагментов автомата A обозначим $\mathrm{Fr}(A)$. Выше было сказано, что отношение $\subseteq$ на нем совпадает с $\leqslant$. Класс правильных фрагментов, эквивалентных правильному фрагменту R, обозначим через $K_\Pi(R)$. Этот класс частично упорядочен отношением включения. Поскольку $\{nR\} \subseteq K_\Pi(R)$, $n = 1, 2, \ldots$, класс $K_\Pi(R)$ бесконечен и ядро фрагмента R является его наименьшим (по следствию 3.1) элементом. Ясно, что $K_\Pi(R)$ рекурсивен. Класс всех правильных ядерных фрагментов изоморфен $\mathrm{Fr}(A)/\equiv$. Ядро автомата A является его наибольшим элементом, а каждая дуга автомата A — минимальным элементом, причем других минимальных нет.

Теорема 3.2. *Класс ядерных правильных фрагментов автомата A конечен тогда и только тогда, когда A — ациклический автомат.*

Фрагмент R автомата A назовем тривиальным, если существует всюду определенный конечный подавтомат B автомата R, для которого $(A, B) \in \varepsilon$. Тривиальный фрагмент явно содержит в себе полное глобальное описание автомата A. Легко видеть, что класс тривиальных и класс нетривиальных правильных фрагментов замкнуты по операции сложения и поэтому бесконечны. Кроме того, в классе эквивалентных фрагментов либо все фрагменты тривиальны, либо все нетривиальны.

Рассмотрим структуру класса $\mathrm{A}(R)$, который описывается некоторым фрагментом R. Назовем его классом автоматов, неотличимых этим фрагментом. Этот класс замкнут по операции объединения. Эта операция ассоциативна, коммутативна и идемпотентна, следовательно, $\mathrm{A}(R)$ является (верхней) полурешеткой. Автоматы этой полурешетки, минимальные по включению $\subseteq$, будем называть тупиковыми, а автоматы с наименьшим числом состояний — минимальными. Автомат A из этого класса назовем неразложимым, если $A = B \cup C$, где $B, C \in \mathrm{A}(R)$, влечет $A = B$ или $A = C$.

Рассмотрим свойства порождающих множеств полурешетки неотличимых автоматов. Вначале рассмотрим более общую ситуацию.

Пусть $\langle L, + \rangle$ — произвольная полурешетка, в которой операция $+$ ассоциирована с некоторым частичным порядком $\leqslant$. Подмножество $K \subseteq L$ называется для этой полурешетки порождающим, если каждый ее элемент можно представить суммой конечного числа элементов из K. Минимальное по включению порождающее множество назовем базисом. Множество всех неразложимых элементов обозначим через M. Ясно, что M содержит все тупиковые элементы. Очевидно, что если K — порождающее множество, то $M \subseteq K$. Если L конечна, то из последнего включения следует, что множество K порождающее.

Отображение φ полурешетки L в множество N неотрицательных целых чисел называется изотонным, если $l_1 \leqslant l_2$ влечет $\varphi(l_1) \leqslant \varphi(l_2)$. Если, кроме этого, $l_1 < l_2$ влечет $\varphi(l_1) < \varphi(l_2)$, то назовем φ несжимающим цепи в L гомоморфизмом. Несжимающий цепи гомоморфизм называется высотой, если $\varphi(l) = 0$ тогда и только тогда, когда l — тупиковый элемент, и $\varphi(l) = n$, если $\varphi(l_1) = n - 1$ для некоторого $l_1 < l$. В этом случае $\varphi(l)$ называется высотой элемента l.

Известно [26], что для любой полурешетки несжимающий гомоморфизм существует точно тогда, когда существует высота.

Пусть $\langle \mathrm{A}, \cup \rangle$ — произвольная полурешетка, где $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{A}(X, Y)$. Отображение φ этой полурешетки в N, для которого $\varphi(A)$ равно числу состояний автомата A, является несжимающим гомоморфизмом.

Следствие 3.2. *Множество неразложимых элементов полурешетки является единственным ее базисом, а порождающие ее множества образуют булеву алгебру.*

Полурешетка $\mathrm{A}(R)$ является интересным примером полурешетки, для которой выполняется это следствие. В бесконечной полурешетке A высота ее элементов неограничена. Покажем, что высота ее неразложимых элементов в общем случае тоже неограничена.

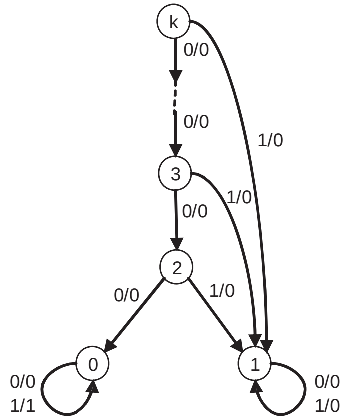

Рис. 1.

Пусть $A \in \mathrm{A}(X, Y)$. Множество $\Phi_A = \bigcup_{s \in S} \lambda_{A_s}$ называется множеством всех простых экспериментов этого автомата. Пусть $R = R(\Phi_A)$ — бесконечный непосредственный фрагмент автомата A. Рассмотрим бесконечную цепь $A_1 \subset \ldots \subset A_k \subset \ldots$, где автомат $A_k \in \mathrm{A}(R)$ и $R = R(\Phi_A)$ имеет множество состояний $\{0, 1, \ldots, k\}$ и представлен на рис. 1. Класс $\mathrm{A}(R)$ бесконечен и имеет единственный тупиковый автомат A_1. Напомним, что цепь $l_1 < \ldots < l_k$ называется максимальной в L, если для всех i, $i \leqslant k$, из включения $l_i \leqslant l \leqslant l_{i+1}$ следует, что $l_i = l$ или $l_{i+1} = l$. Автоматы $A_1 \subset \ldots \subset A_k \subset \ldots$ образуют единственную максимальную цепь от A_1 до A_k, и все эти автоматы неразложимы. Отсюда следует, что в данной полурешетке высота неразложимых элементов может быть как угодно большой.

Продолжим рассмотрение свойств полурешетки A. В дальнейшем считаем, что A выпукла, то есть если $A \subseteq B$ и $A, B \in \mathrm{A}$, то для всех $C \in \mathrm{A}(X, Y)$ из $A \subset C \subset B$ следует включение $C \in \mathrm{A}$. Рассмотрим свойства A как системы $(\mathrm{A}, \cup, \cap)$. Операция пересечения на A в общем случае частична. Пусть B — некоторый автомат из этой системы. Множество всех автоматов $A \in \mathrm{A}$, для которых $A \supseteq B$, называется главным двойственным идеалом (или фильтром) [26], порожденным автоматом B. Главный двойственный идеал, порожденный тупиковым автоматом, называется максимальным.

Следствие 3.3. *Каждое выпуклое и замкнутое по объединению* $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{A}(X, Y)$ *равно объединению дистрибутивных решеток с нулем, каждая из которых является максимальным двойственным идеалом, порожденным тупиковым элементом.*

Класс $(\mathrm{A}(R), \cup)$ является выпуклой полурешеткой, то есть является примером системы, для которой условие следствия выполняется, и тем самым $\mathrm{A}(R)$ является объединением таких решеток.

Ядром системы A назовем пересечение всех автоматов из этого класса, то есть наибольший автомат, включающийся во все автоматы класса. Для некоторых систем ядро может быть пусто. Класс $\mathrm{A}(R)$ характеризует размытость, с которой фрагмент R описывает автомат, а ядро класса определяет ту часть автомата, которую фрагмент описывает однозначно. Из следствия 3.3 вытекает, что $\mathrm{A}(R)$ является дистрибутивной решеткой тогда и только тогда, когда он имеет единственный тупиковый автомат, совпадающий с ядром класса. На рис. 1 автомат A_1 является единственным тупиковым в классе $\mathrm{A}(R)$, где

$R = R(\Phi_{A_1})$, поэтому этот класс является дистрибутивной решеткой.

Обычно представляет интерес не сам класс $\mathrm{A}(R)$, а его некоторый подкласс (например, минимальных автоматов). Одним из способов выделения такого подкласса является запрещение некоторого поведения его элементов. Пусть $R = (T, 2^U, \Lambda)$ — некоторый автомат Медведева. Назовем R кофрагментом автомата $A \in \mathrm{A}(X, Y)$, если каждая компонента связности $V \subseteq R$ не является фрагментом автомата A. Через $\mathrm{A}(R, Q)$ обозначим класс всех автоматов из $\mathrm{A}(X, Y)$, для которых R является фрагментом, а Q — кофрагментом. Ясно, что $\mathrm{A}(R, Q) = \mathrm{A}(R) - (\bigcup \mathrm{A}(V))$, где объединение выполняется по всем компонентам связности V кофрагмента Q.

Всякий класс $\mathrm{A}(R, Q)$ является выпуклым. Действительно, если $A, B \in \mathrm{A}(R, Q)$ и $A \subseteq C \subseteq B$, то $R \sqsubseteq A$ влечет включение $R \sqsubseteq C$, а $V \not\sqsubseteq B$ влечет $V \not\sqsubseteq C$.

Пусть $\mathrm{A}(R, Q)$ замкнут по объединению. По следствию 3.3 он является объединением дистрибутивных решеток. Рассмотрим условия, при которых этот класс является булевой алгеброй. Для этого вернемся к рассмотрению свойств системы $(\mathrm{A}, \cup, \cap)$.

Если система A конечна и имеет единственный тупиковый автомат, то она является дистрибутивной решеткой с нулем (тупиковым автоматом) и единицей (объединением всех автоматов из A). Бесконечная система A единицы не имеет. Рассмотрим условие, когда эта система является булевой алгеброй. Пусть $A \in \mathrm{A}$. На множестве S его состояний введем отношение τ достижимости состояний такое, что $(s_1, s_2) \in \tau$, если $\delta_A(s_1, p) = s_2$ для некоторого слова $p \in X^*$. Это отношение порождает эквивалентность $\eta = \tau \cap \tau^{-1}$, классы которой называются слоями [4]. Они являются максимальными (по $\subseteq$) сильно связными подмножествами состояний. Каждый слой S' определяет подграф $Q' = (S', U')$ (но не подавтомат) графа автомата A, где U' — множество всех тех дуг автомата A, начало и конец которых суть вершины из S'. Заметим, что, может быть, $|S'| = 1$ и $U' = \Phi_A^1$. Граф G' для простоты тоже будем называть слоем. Слой будем называть внешним, если в автомате не существует дуги, которая начинается в другом слое, но оканчивается в G'.

Теорема 3.3. *Равносильны следующие утверждения.*

(1) *Система* A *является булевой алгеброй.*

(2) *Система конечна, имеет единственный тупиковый автомат и для всех C, D, для которых $B \subseteq D \subseteq C$, если слой в автомате D является внешним, то и в C он является внешним.*

(3) *Система имеет единственный тупиковый автомат B, а множество всех неразложимых автоматов, отличных от B, конечно и состоит из попарно несравнимых по включению автоматов.*

4. Идентификаторы состояний

Пусть $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ — некоторый конечный детерминированный неинициальный автомат-эталон, у которого области определения функций совпадают, то есть $A \in D_k(U)$. Пусть R_t — идентификатор некоторого состояния $s \in S$ эталона.

Рассмотрим взаимосвязь между идентификаторами, предпорядком $\sqsubseteq$ и эквивалентностью $\equiv$, порождаемой этим предпорядком.

Если φ — слабый гомоморфизм фрагмента R в фрагмент Q эталона, и кроме того, $\varphi(t) = q$, то Q_q является идентификатором состояния s эталона. Следовательно, либо все фрагменты из класса эквивалентности $K(R)$ являются идентификаторами одного и того же состояния эталона, либо ни один не является идентификатором. Из бесконечности этого класса следует, что множество идентификаторов любого состояния эталона либо пусто, либо бесконечно.

Из сказанного следует простой конструктивный критерий существования идентификаторов. Пусть R_t — идентификатор состояния s эталона и φ — некоторый слабый гомоморфизм R_t в A_s. Пусть также $B_s = \varphi(R_t)$.

Теорема 4.1. *Идентификатор состояния эталона A существует тогда и только тогда, когда существует $B_s \subseteq A_s$, являющийся таким идентификатором.*

Из сказанного следует, что для каждого автомата $A \in \mathrm{A}(U)$ и каждого $s \in S$ существуют идентификаторы состояния s. Действительно, так как $A \in \mathrm{A}(U)$ всюду определен и приведен, неравенство $s \neq t$ влечет соотношения $\lambda_s \not\subseteq \lambda_t \not\subseteq \lambda_s$. Поэтому подавтомат B_s, порожденный всеми состояниями эталона, достижимыми из s, является идентификатором состояния s.

Рассмотрим частный вид идентификаторов состояний эталона, связанный с экспериментами. С каждым состоянием s эталона ассоциируются два множества вход-выходных слов, множество λ_s всех вход-выходных слов, начинающихся в s, то есть порожденных состоянием s, и двойственное множество ϕ_s всех вход-выходных слов, оканчивающихся в s, то есть таких $(p, q) \in (X \times Y)^*$, для которых найдется такое $s' \in S$, что $\delta_A(s', p) = s$ и $\lambda_A(s', p) = q$. Пусть V_1, V_2 — некоторые множества слов в алфавите 2^U. Пару (V_1, V_2) назовем окрестностью состояния s эталона, если для каждого слова $v \in V_1$ найдется его сужение $w \in \phi_s$ и для каждого $v \in V_2$ найдется его сужение $w \in \lambda_s$. Множество V_2 определяет автомат Медведева $D(V_2)$, V_1 – возможно бесконечный автомат Медведева $R(V_1)$. Отождествляем начальное состояние автомата $D(V_2)$ и все висячие состояния автомата $R(V_1)$. Полученный автомат обозначим $D(V_1, V_2)$, а отождествленное состояние — d. Из построения следует, что если (V_1, V_2) — окрестность состояния s эталона, то существует слабый гомоморфизм φ автомата $D(V_1, V_2)$ в A, причем $\varphi(d) = s$. Поэтому окрестность (V_1, V_2) состояния s будем называть идентификатором состояния s эталона, если $D(V_1, V_2)$ является таким идентификатором. Идентификатор (V_1, V_2) будем называть начальным (конечным), если $V_1 = \varnothing$, $(V_2 = \varnothing)$. Начальный (конечный) идентификатор эталона называется простым, если кратность множества V_1 (множества V_2) равна единице.

Рассмотрим примеры идентификаторов состояний. Множество вход-выходных слов $P \subseteq X^*$ называется диагностическим [12] для эталона A, если для всех состояний $s \in S$ и всех $p \in P$ реакция $\lambda(s, p)$ определена и если $s \neq t$, $s, t \in S$, то $\lambda(s, p) \neq \lambda(t, p)$ для некоторого $p \in P$. Другими словами, если P — диагностическое множество, то эксперимент λ_s/P, сужение λ_s на P, является начальным идентификатором для всех $s \in S$.

Входное слово p называется установочным [12] для A, если $\lambda(s, p)$ определено для всех $s \in S$ и равенство $\lambda(s, p) = \lambda(t, p)$ влечет равенство $\delta(s, p) = \delta(t, p)$. Ясно, что для установочного слова p вход-выходное слово $(p, \lambda(s, p))$ является конечным идентификатором состояния $\delta(s, p)$ эталона.

Известно [7, 12], что для всюду определенного приведенного эталона всегда существуют диагностические множества и установочные слова. Поэтому для такого эталона существует начальный идентификатор каждого состояния и простой конечный идентификатор хотя бы одного состояния. Там же приведены методы построения таких входных слов.

Рассмотрим условия существования окрестностей состояний, являющихся идентификаторами состояний эталона. Ясно, что если (V_1, V_2) — идентификатор состояния s, то (ϕ_s, λ_s) — тоже идентификатор этого состояния. Для конечного эталона множества ϕ_s, λ_s

регулярны в алгебре Клини, поэтому существует алгоритм проверки того, является ли окрестность (ϕ_s, λ_s) идентификатором состояния s.

Сформулируем более простой критерий существования идентификаторов состояний. Пусть n — число состояний эталона.

Теорема 4.2. *Равносильны следующие утверждения.*

(1) *Существует окрестность состояния s, являющаяся его идентификатором.*

(2) (ϕ_s, λ_s) *является идентификатором состояния s.*

(3) *Существует идентификатор (V_1, V_2) состояния s, для которого $|V_1|+|V_2| \leqslant n-1$ и $h(V_2) \leqslant 2^{2n}$.*

По эталону построим проверочный граф $G = (T, V, \Delta)$, где T=$2^s \times 2^s$, $V = \{+, -\} \times U$. Функцию переходов Δ определим по правилу: $\Delta((S_1, S_2), +(x, y)) = (S'_1, S'_2)$, где $s \in S'_i$, если $\delta_A(t, x) = s$, и $\lambda_A(t, x) = y$ для некоторого $t \in S_i$, $i = 1, 2$; $\Delta((S_1, S_2), -(x, y)) = (S''_1, S''_2)$, где $t \in S''_i$, если $\delta_A(t, x) = s$ и $\lambda_A(t, x) = y$ для некоторого $s \in S_i$, $i = 1, 2$.

Проверочный граф является достаточно общей конструкцией и позволяет находить идентификаторы состояний более общего вида, чем окрестности. Для этого в проверочном графе выбираются слова $v = (\alpha_1, u_1) \ldots (\alpha_k, u_k)$, где $\alpha_j \in \{+, -\}$ и $\Delta((s, t), v) = (S_1, \varnothing)$, $S_1 \neq \varnothing$. По слову v строится ациклический граф $R(v)$, множество вершин которого равно $\{1, 2, \ldots, k+1\}$ и по (α_j, u_j) строится дуга $(j, u_j, j+1)$ при $\alpha_j = +$, или дуга $(j+1, u_j, j)$ в противном случае. Вершина 1 называется начальной. Пусть $V' = (v_1, \ldots, v_l)$ такое, что для каждого $t \in S$, отличного от s, найдется $v \in V'$, для которого $\Delta((s, t), v) = (S_1, \varnothing)$. Тогда в графе $R(V') = \sum_{i=1}^{1} R(v_i)$ отождествляем все начальные вершины и детерминизируем полученный граф. Легко видеть, что детерминизированный граф с выделенной начальной вершиной является правильным ациклическим идентификатором состояния s эталона. Поэтому вышеуказанное множество V' будем называть идентификатором. Класс всех таких идентификаторов состояния эталона обозначим через I_s. Каждый идентификатор W из класса I_s является множеством слов в алфавите $\{+, -\} \times U$. Пусть $W_1 \leqslant W_2$ означает, что каждое слово из W_1 является начальным отрезком некоторого слова из W_2. Это отношение является предпорядком и порождает эквивалентность $\equiv$. Через $K(W)$ обозначим класс всех идентификаторов из I_s эквивалентных (по $\equiv$) идентификатору W.

Идентификатор W назовем минимальным в I_s, если для всех $W' \in I_s$ из $W' \leqslant W$ следует $W' \subseteq W$.

Теорема 4.3. *Равносильны следующие утверждения.*

(1) W *минимален в* I_s *по* $\leqslant$.

(2) W *минимален в* $(K(W), \subseteq)$ *и* $K(W)$ *минимален в* $\langle I_s/\equiv, \leqslant\rangle$.

(3) *Множество W', полученное из W удалением хотя бы одного слова или заменой хотя бы одного слова его собственным начальным отрезком, идентификатором состояния s не является.*

Из приведенных теорем следует, что кратность минимального идентификатора не превосходит $n - 1$.

Оценим высоту минимальных идентификаторов.

Теорема 4.4. *Высота минимальных идентификаторов состояний в общем случае неограничена.*

Эта теорема показывает, что множество минимальных идентификаторов в общем случае бесконечно. В связи с этим представляет интерес задача его эффективного описания. Можно показать, что минимальные идентификаторы можно определенным образом закодировать словами в подходящем алфавите таким образом, что языки, соответствующие множествам минимальных идентификаторов, будут регулярными. Соответствующие построения рассмотрены в [4, 11].

Рассмотрим теперь взаимосвязь между множествами идентификаторов состояний автоматов, поведение которых в той или иной мере подобно.

Пусть $A = (S, X, Y, \delta_A, \lambda_A)$ и $B = (T, X, Y, \delta_B, \lambda_B)$ — конечные автоматы Мили, всюду определенные и детерминированные, но не обязательно приведенные. Тогда λ_{As} является конечно-автоматным отображением. Напомним некоторые определения. Состояния $s \in S$ и $t \in T$ называются эквивалентными, если $\lambda_{As} = \lambda_{Bt}$. Автоматы A и B называются эквивалентными (неотличимыми никаким экспериментом), если $\{\lambda_{As}\}_{s\in S} = \{\lambda_{Bt}\}_{t\in T}$. Автомат A называется приведенным, если из $s_1 \neq s_2$ следует, что $\lambda_{As_1} \neq \lambda_{As_2}$. Автоматы A, B назовем эквивалентными по предыстории, если $\{\phi_{As}\}_{s\in S} = \{\phi_{Bt}\}_{t\in T}$. Автомат A назовем приведенным по предыстории, если из $s_1 \neq s_2$ следует, что $\phi_{As_1} \neq \phi_{As_2}$. Из определения следует, что если автомат A приведен (приведен по предыстории), то для всех s множество начальных (конечных) идентификаторов не пусто. Известно, что для каждого автомата существует ему эквивалентный единственный приведенный автомат. Если автомат A имеет преходящее состояние s, то он не приведен по предыстории, так как $\phi_{As} = \varnothing$. Если, кроме этого, A приведен, то любой B, $(B, A) \in \varepsilon$ имеет преходящие состояния и, следовательно, в классе $\varepsilon(A)$ нет приведенных по предыстории автоматов.

Пусть $\Phi_A = \bigcup_{s\in S} \lambda_{As}$. Автоматы A и B называются неотличимыми никаким простым экспериментом, если $\Phi_A = \Phi_B$. Рассмотрим взаимосвязь между множествами простых конечных идентификаторов состояний двух автоматов, неотличимых никаким простым экспериментом.

Известно, что для каждого приведенного автомата A существует простой установочный эксперимент, то есть существует такое слово p, что для всех s_1, s_2 из равенства $\lambda_A(s_1, p) = \lambda_A(s_2, p)$ следует равенство $\delta(s_1, p) = \delta(s_2, p)$. Поэтому вход-выходное слово $(p, \lambda_A(s_1, p)$ в этом случае является простым конечным идентификатором состояния $\delta(s, p)$. Из определения конечных идентификаторов следует, что если для некоторого состояния автомата существует (простой) конечный идентификатор, то (простой) конечный идентификатор существует и для всякого состояния, достижимого из s. Таким образом, множество состояний, имеющих конечные идентификаторы, образует подавтомат. Этот подавтомат приведен по предыстории. Подавтомат, образованный всеми состояниями автомата, имеющими простой конечный идентификатор, назовем конечным фактором автомата. Из вышесказанного следует, что конечный фактор приведенного автомата не пуст и содержит все сильно связные автоматы этого автомата. Из сказанного вытекают следующие утверждения.

Следствие 4.1. (1) *У всякого приведенного автомата существует приведенный по предыстории подавтомат, содержащий конечный фактор этого автомата.*

(2) *Конечные факторы приведенных неотличимых автоматов изоморфны.*

(3) *Всякий сильно связный приведенный автомат приведен по предыстории.*

Известной задачей, поставленной еще Муром [14], является задача нахождения минимального (по числу состояний) автомата, неотличимого от данного. Приведенные рассуждения позволяют сформулировать достаточное условие минимальности в классе неотличимых автоматов. Если приведенный автомат совпадает со своим конечным фактором, то он является единственным минимальным автоматом в классе неотличимых автоматов. Из этого следствия вытекает известный результат Мура [14] о том, что приведенный сильно связный автомат является единственным минимальным в классе неотличимых автоматов.

Пусть $W \subseteq U^*$. Через $[W]$ обозначим пополнение множества слов W начальными отрезками этих слов. Обозначим через K_A множество всех правильных простых конечных идентификаторов всех состояний автомата A, то есть $K_A \subseteq \Phi_A$.

Полученные результаты позволяют сформулировать критерий неотличимости приведенных автоматов в терминах конечных идентификаторов.

Теорема 4.5. *Приведенные автоматы A и B неотличимы никаким простым экспериментом тогда и только тогда, когда $K_A = K_B$.*

Приведенность автоматов является существенным условием. Действительно, легко привести пример неприводимого автомата, у которого множество простых конечных идентификаторов меньше, чем у приведенного автомата, эквивалентного (а значит, и неотличимого никаким экспериментом) исходному.

Теорема 4.6. *Приведенные автоматы неотличимы никаким (как простым, так и кратным) экспериментом тогда и только тогда, когда у них равны множества правильных начальных идентификаторов.*

В заключение раздела заметим, что ни начальные, ни конечные идентификаторы состояний при гомоморфизме автоматов, в общем случае, не сохраняются.

5. Представления автоматов фрагментами

Раздел посвящен изучению представлений автомата фрагментами с заданной точностью.

Проблема представления автомата фрагментами рассматривается с двух точек зрения. Первая — эксперименты с автоматами. Постановка задачи в этом случае такова. Задан класс F автоматов, в котором выделен "исправный" автомат-эталон A. Остальные автоматы из F называются "неисправностями" эталона. Кроме этого, предъявлен черный ящик B, о котором известно, что он принадлежит классу F. Требуется найти такое множество P входных слов (тестовых последовательностей), по реакции на которые автомата B можно определить:

(а) совпадает ли B с эталоном (контрольный эксперимент);

(б) функции автомата B (распознающий эксперимент).

В этом случае тест P вместе с соответствующими реакциями автомата B является искомым фрагментом поведения. Известен ряд работ, в которых предложены различные алгоритмы построения вышеуказанных экспериментов и найдены оценки их сложности [3–7]. В последнее время появился ряд неклассических видов экспериментов с более сложными степенями точности, определяемыми приложениями (сертификацией протоколов в сетях ЭВМ [27–28], тестированием компоненты сети автоматов [29] и т. п.) Вторая точка зрения связана с описанием исходного задания автомата при его синтезе. При этом автомат задается в виде системы вход-выходных слов, которая представляет информацию двоякого вида: то, что должен реализовывать автомат (предписанное поведение) и то, что автомат не должен реализовывать (запрещенное поведение) [30–31]. Известен ряд вариантов такого описания: анкетные языки [30], k-наборы [20], языки эквивалентных преобразований [31]. Предложены алгоритмы получения таких описаний по заданному автомату и алгоритмы синтеза автомата по заданным описаниям.

Анализ полученных результатов показывает, что до сих пор мало изученными являются следующие вопросы.

(1) Какова та граничная информация об автомате и классе, относительно которого описывается автомат, при которой вышеуказанное описание того или иного вида (эксперимент, анкетный язык) существует, а без которой не существует.

(2) Какова структура вышеуказанного описания автомата, что обязательно должно присутствовать в описании, а что является издержками алгоритма его получения.

(3) Какова сложность описаний, сложность их построения и сложность восстановления автомата по его описанию.

Эти вопросы являются актуальными не только для теории автоматов, но и для смежных дисциплин таких, как техническая диагностика [32, 33], идентификация систем управления [34] и др.

Введем необходимые определения. Пусть F — некоторый класс конечных детерминированных всюду определенных автоматов, то есть $F \subseteq \mathrm{A}(X, Y)$. Пусть $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ — некоторый автомат, называемый эталоном. Пусть также τ — бинарное отношение подобия на классе $\mathrm{A}(X, Y)$. Если $(A, B) \in \tau$, то автомат B назовем подобным эталону. Обычно $A \in F$.

Пусть R и Q есть, возможно, бесконечные автоматы Медведева в алфавите 2^U, где $U = X \times Y$. Пару $\langle R, Q\rangle$ назовем представлением эталона A относительно F с точностью τ, если одновременно выполняются следующие условия:

(1) R является фрагментом, а Q — кофрагментом эталона;

(2) для любого $B \in F$, если R является фрагментом, а Q — кофрагментом автомата B, то $B \in \tau(A)$.

Класс всех представлений эталона относительно A и τ обозначим $R(A, F, \tau)$. Представление назовем текстуальным в случае, когда Q пусто, и информаторным в противном случае. Класс всех текстуальных представлений обозначим $R_T(A, F, \tau)$.

Из определения представлений эталона следует, что $(R, Q) \in R(A, F, \tau)$ точно тогда, когда одновременно выполняются следующие условия:

(1) $A \in A(R, Q) \cap F$;

(2) $A(R, Q) \cap F \subseteq \tau(A)$.

Пусть $Q = \sum Q_i, i \in I,$ — разложение кофрагмента в прямую сумму его F компонент связности. Тогда эти условия равносильны следующим соотношениям:

(1) $A \in F \cap A(R) \cap \left(\bigcap_i \bar{A}(Q_i)\right)$.

(2) $F \cap A(R) \cap \left(\bigcap_i \bar{A}(Q_i)\right) \subseteq \tau(A)$.

Здесь $\bar{A}(Q_i)$ — дополнение класса $A(Q_i)$ до $\mathrm{A}(X, Y)$.

Если выходной алфавит Y содержит только один символ, то $\mathrm{A}(X, Y) = \{A\}$ и класс представлений совпадает с классом всех фрагментов эталона. Поэтому в дальнейшем, если не оговорено противное, считаем, что $|Y| \geqslant 2$.

Рассмотрим примеры представлений.

1. Пусть F состоит из всех автоматов с числом состояний, не превосходящим числа состояний эталона, то есть, как говорят в технической диагностике, неисправность не увеличивает числа состояний автомата [33]. Пусть отношение τ является отношением равенства (изоморфизма) автоматов. Пусть p — контрольная в смысле Хенни [35] последовательность для A. Это значит, что если исследуемый "черный ящик" B, принадлежащий F, отреагировал на слово p словом q, для которого (p, q) может быть порождено эталоном, то $A = B$. Тогда строчный автомат $R(p, q)$ является представлением.

Следуя [35], можно выбрать F равным классу всех автоматов, число состояний которых не превосходит удвоенного числа состояний эталона и считать, что B подобен A, если $A \subseteq B$, то есть если B является реализацией A. Такое τ соответствует проверке работоспособности автомата [33], и в этом случае для контрольного эксперимента (p, q) автомат $R(p, q)$ является представлением.

2. В [36] рассматривается проблема контроля (обнаружения) неисправностей, если классом F является класс всех автоматов, число состояний которых не превосходит заданного натурального числа. Этот класс содержит в себе большинство естественно определяемых классов неисправностей. Предложен алгоритм построения такого множества $P = \{p_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, входных слов, что если "черный ящик" B в состоянии t порождает эксперимент $Q = \{p_i, q_i\}$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, для которого $Q \subseteq \lambda_{As}$, то $\lambda_{As} = \lambda_{Bt}$. Таким образом, древовидный фрагмент $D(Q)$, полученный из $\sum_i R(p_i, q_i)$, является представлением эталона относительно вышеуказанного F и τ, определяемого соотношением $(A, B) \in \tau$, если $\lambda_{As} = \lambda_{Bt}$, где s и t — начальные состояния автоматов.

В силу сказанного, можно считать, что кратные и простые контрольные эксперименты являются частным видом представлений. Аналогичные рассуждения можно провести для распознающих экспериментов [3–8] и анкетных языков [30].

3. Рассмотрим k-набор, являющийся конечным множеством вход-выходных слов вида $(p, q) = (x_1, y_1) \ldots (x_i, y_i) * (x_{i-1}, y_{i-1}) \ldots (x_k, y_k)$ и описывающий сильно связные автоматы с точностью до $\tau = \nu_1$. Звездочка показывает, что начальный отрезок слова (p, q), стоящий слева от нее, оканчивается в том же состоянии автомата, в котором оканчивается все слово. Если по слову (p, q) построить $R(p, q)$, отождествить в нем состояния $i + 1$ и $k + 1$ и провести такое построение для каждого слова из k-набора, то получим представление R сильно связного эталона A относительно бесконечного класса сильно связных автоматов.

4. В [4] предложена методика анализа вход-выходных слов с помощью идентификаторов состояний. В результате этого анализа получается так называемый предельный автомат, который в случае, если анализировался контрольный или распознающий эксперимент, является представлением автомата A относительно заданных F и τ.

5. В [37] рассмотрен случай, возникающий при сертификации протоколов [28] и контроле компоненты сети автоматов [29], когда класс A исправных автоматов задан в виде класса реализаций недетерминированного автомата A, а неисправных B — в виде класса реализаций недетерминированного автомата B. В этой работе строится эксперимент, определяющий, является "черный ящик" реализацией автомата A или реализацией автомата B. В процессе проведения этого эксперимента получается множество W вход-выходных слов, порожденных "черным ящиком". Автомат $R(W)$ является текстуальным представлением "черного ящика", а точность определяется разбиением $\{A, B\}$. Заметим, что в этом случае эти классы могут быть как конечными, так и бесконечными.

Рассмотренные примеры показывают важность и актуальность исследования проблемы представления фрагментами. В [6, 22] заложены основы такого исследования. В данном разделе изложен ряд его основных моментов: условия существования представлений различного вида при различных предположениях о свойствах эталона, класса F и точности представления τ; изучение структуры представлений в случае, когда представлением является только фрагмент R эталона; сложность представлений, как метрическая, так и их распознавания. Эти задачи рассматривались в первую очередь для определенно-диагностируемых порядка k автоматов. Такие автоматы интенсивно изучались в теории экспериментов с автоматами [4, 6, 12, 15, 16] и часто встречаются в прикладных исследованиях. В разделе приведены необходимые и достаточные условия, при которых фрагмент является представлением определенно диагностируемого порядка 1 эталона относительно класса F_n всех автоматов с числом состояний, не превосходящим число n состояний эталона. Для случая $\tau = \varepsilon$ (то есть изоморфизма автоматов) описана структура минимальных представлений. Получены необходимые и достаточные условия быть представлением такого же эталона относительно класса автоматов, порожденных из эталона локальными преобразованиями последнего, и τ, равного отношению неотличимости различного вида. И наконец, найден критерий, при котором вход-выходное слово является контрольным экспериментом для определенно диагностируемого порядка k, $1 \leqslant k \leqslant 11$, эталона относительно F_n и $\tau = \varepsilon$.

5.1. Условия существования представлений

Укажем простейшие свойства представлений, полезные в дальнейшем. Пусть дана система $\langle A, F, \tau \rangle$ и пара (R, G), для которой выполняется условие 1 представлений, то есть R — фрагмент и Q — кофрагмент эталона A. По кофрагменту Q определим класс автоматов F_Q по правилам: $B \in F_Q$, если существует автомат $C \in F$, для которого B является компонентой связности, и существует компонента связности H кофрагмента Q, для которой $H \sqsubseteq B$. Через B_Q обозначим возможно бесконечный автомат, являющийся прямой суммой всех автоматов из F_Q. По классу F определим класс В правилом: $B \in$ В, если существует $C \in F$, для которого B является его компонентой связности и $B \not\sqsubseteq A$. По классу В определим быть может бесконечный автомат $B_{\max}$, являющийся прямой суммой всех автоматов из В.

Можно показать, что в классе $K(R)$ всех фрагментов, эквивалентных по $\equiv$ фрагменту R, либо все элементы из $K(R)$ являются текстуальными представлениями, либо ни один из них не является таковым. Выше было показано, что ядро конечного фрагмента R является наименьшим (по включению $\subseteq$) элементом в классе $K(R)$. Текстуальное представление, совпадающее со своим ядром, назовем ядерным. Ядерным представлением является сам эталон, ядерными представлениями являются контрольные эксперименты (древовидные представления).

Рассмотрим условия существования представлений общего вида.

Пусть s — некоторое состояние эталона, λ_s^k — множество всех вход-выходных слов длины, не большей k, порождаемых s, и $D(\lambda_s^k)$ — древовидный фрагмент, соответствующий этому множеству. Пусть $D_A^k = \sum D(\lambda_s^k)$ — это прямая сумма всех $D(\lambda_s^k)$, $s \in S$. Пусть также $\bar{D}_A^k$ — прямая сумма всех тех $D(\lambda^k)$, для которых λ — конечно-автоматное отображение, λ^k не реализуется ни одним состоянием эталона, $\lambda \subseteq U^*$. Через ε обозначим отношение эквивалентности автоматов из $A(U)$. Пусть $n = |S|$ — число состояний эталона.

Теорема 5.1. *Равносильны следующие утверждения.*

(1) *Представление эталона A относительно F и τ существует.*

(2) *Класс всех представлений для A, F, τ бесконечен.*

(3) $\langle A, B_{\max}\rangle$ *является представлением.*

(4) $\varepsilon(A) \cap F \subseteq \tau(A)$.

(5) $(D_A^k, \overline{D}_A^k)$ *является представлением при $k \geqslant n$.*

Теорема характеризует существование представлений с разных точек зрения. Утверждение 4 определяет максимальную точность τ, для которой представления существуют. Она равна ε, и так как $F \subseteq A(X, Y)$, представления общего вида могут определить автомат с точностью до изоморфизма (поскольку $\varepsilon(A) = A$). Кроме того, это утверждение показывает, что для рефлексивных τ представления общего вида всегда существуют для всех классов F и эталонов $A \in F$. Утверждения 3 и 5 указывают канонические в некотором смысле представления. Представление из утверждения 5 конечно и состоит из двух правильных фрагментов.

Далее будет приведен ряд теорем существования различных представлений, аналогичных теореме 5.1. В них проверка существования представлений сводится к проверке, является ли некоторая каноническая система представлением, или к проверке включения в класс $\tau(A)$ некоторого класса автоматов, неотличимых от эталона соответствующим образом. Они определяют также для каждого вида представлений максимальную точность представления эталона системой фрагмент–кофрагент.

Рассмотрим условия существования текстуальных представлений общего вида. Текстуальное представление назовем правильным, если оно конечно и является непосредственным фрагментом эталона.

Введем отношение γ_{ri} неотличимости автоматов из $\mathrm{A}(U)$ экспериментами ограниченной высоты и кратности, полагая $(A, B) \in \gamma_{ri}$, если всякий эксперимент автомата A кратности, не большей r и высоты не большей i, является экспериментом автомата B. Отношение $\rho_{ri} = \gamma_{ri} \cap \gamma_{ri}^{-1}$ называем (r, i)-неотличимостью.

Пусть $(A, B) \in \gamma$, если всякий эксперимент автомата A является экспериментом автомата B. Нетрудно видеть, что последнее соотношение равносильно включению $\{\lambda_{As}\}_{s\in S} \subseteq \{\lambda_{Bt}\}_{t\in T}$, где T — множество состояний автомата B и $\gamma = \bigcap_{r,i\geqslant 1} \gamma_{ri}$. Очевидно, что $\varepsilon = \gamma \cap \gamma^{-1}$.

Теорема 5.2. *Равносильны следующие утверждения.*

(1) *Текстуальное представление относительно F и τ существует.*

(2) *Класс всех текстуальных представлений для A, F, τ бесконечен.*

(3) *Класс всех текстуальных правильных ядерных представлений бесконечен.*

(4) *Эталон A является представлением для A, F, τ.*

(5) $\gamma(A) \cap F \subseteq \tau(A)$.

Теорема 5.2 показывает, что текстуальные представления, в общем случае, определяют автомат с точностью, не большей чем γ, то есть с точностью до реализации эталона или, в технических терминах [33], с точностью до работоспособности эталона. Таким образом, как следовало ожидать, информаторные представления являются более точными дескрипторами автомата, чем текстуальные.

Текстуальное представление R назовем тривиальным, если существует всюду определенный автомат $B \subseteq R$, эквивалентный эталону, то есть $B \in \varepsilon(A)$. Тривиальное представление явно содержит в себе полное “глобальное” описание эталона. Контрольные эксперименты являются нетривиальными представлениями. Легко видеть, что класс тривиальных и класс нетривиальных представлений замкнуты по $\equiv$ операции сложения и поэтому бесконечны. Кроме этого в классе эквивалентных представлений либо все тривиальны, либо все нетривиальны.

Рассмотрим непустой класс $R_T(A, F, \tau)$. В силу теоремы 5.2 в нем всегда существуют тривиальные представления, например, сам эталон. $D_A = \sum_{s \in S} D(\lambda_s)$ является бесконечным нетривиальным непосредственным представлением. Если класс F конечен и N — верхняя оценка числа состояний автоматов этого класса, то D_A^{2N-1} является нетривиальным конечным непосредственным, то есть правильным представлением в силу известных результатов Мура [7, 14]. Однако для бесконечных классов F правильные нетривиальные представления в $R_T(A, F, \tau)$ существуют не всегда.

Класс F назовем замкнутым по γ, если $\gamma(B) \subseteq F$ для всех $B \in F$. Ясно, что при $|Y| > 1$ непустой замкнутый по γ класс F бесконечен.

Теорема 5.3. *Пусть эталон A сильно связен, класс F не пуст, замкнут по γ и не равен $\tau(A)$. Тогда в непустом классе $R_T(A, F, \tau)$ все правильные представления тривиальны.*

Из теоремы 5.3 следует, что в случае сильно связных эталонов не существует правильных текстуальных нетривиальных представлений для $\mathrm{A}(U)$ и $|Y| > 1$.

Рассмотрим условия существования правильных текстуальных нетривиальных представлений. Важным частным случаем таких представлений являются древовидные представления, у которых каждая компонента связности является деревом.

Пусть $\chi_k = \bigcap_{r \geqslant 1} \gamma_{rk}$. Ясно, что $\varepsilon_k = \chi_k \cap \chi_k^{-1}$. Автоматы из $\mathrm{A}(U)$ приведены, поэтому $(A, B) \in \chi_k$ равносильно включению $L_A^k \subseteq L_B^k$.

Теорема 5.4. *Эквивалентны следующие утверждения.*

(1) *Правильные древовидные текстуальные представления для A, F, τ существуют.*

(2) *D_A^k является таковым для некоторого k.*

(3) *$\chi_k(A) \cap F \subseteq \tau(A)$ для некоторого k.*

Важным частным случаем является случай, когда автоматы из F несравнимы по γ, то есть $\gamma(B) = B$ для всех $B \in F$. Примером является класс F, все автоматы которого сильно связные. Как показано ранее, в этом случае текстуальные представления существуют для всех $A \in F$ и τ. Наибольшая точность при этом равна ε. В случае этой точности непосредственно из теоремы 5.4 вытекает следующее утверждение.

Следствие 5.1. *Равносильны следующие утверждения.*

(1) *$R_T(A, F, \varepsilon)$ класс содержит правильные древовидные представления.*

(2) *D_A^k входит в этот класс для некоторых k.*

(3) *$\varepsilon_k(A) \cap F = A$ для некоторых k.*

(4) *Множество $\varepsilon_k(A) \cap F$ конечно для некоторых k.*

В силу важности древовидных текстуальных представлений (включающих в себя, например, контрольные эксперименты) в [6] класс F, для которого выполняется утверждение 3 теоремы 5.4, назван классом F, отличимым от A по τ. Наименьшее k, для которого выполняется вышеуказанное утверждение, называется порядком отличимости. Такие классы могут быть как конечными, так и бесконечными. Всякий конечный класс F, для которого существует текстуальное представление эталона A относительно F и τ, является классом, отличимым от A по τ.

Рассмотрим условия существования минимальных представлений.

Правильное текстуальное представление $R \in R_T(A, F, \tau)$ назовем минимальным (по $\leqslant$), если для всех правильных текстуальных представлений из $R_T(A, F, \tau)$ неравенство $Q \leqslant R$ влечет $R \subseteq Q$. Такое определение связано с тем, что отношение $\leqslant$ в общем случае является предпорядком.

Следствие 5.2. (1) *Если F отличим от A по τ, то в $R_T(A, F, \tau)$ существуют правильные минимальные представления.*

(2) *Если в $R_T(A, F, \tau)$ все правильные представления тривиальны, то в этом классе минимальных представлений нет.*

Рассмотрим автономные автоматы, то есть случай $|X| = 1$.

Следствие 5.3. *Для автономных автоматов и сильносвязного эталона равносильны следующие утверждения.*

(1) *F отличим от A по τ,*

(2) *В классе $R_T(A, F, \tau)$ существуют правильные минимальные представления.*

Рассмотрим частный вид представлений — анкетные языки. Пусть $U = X \times Y$ и $Z = 2^U$. Пусть также $W_1, W_2 \subseteq Z^*$. Систему (W_1, W_2) назовем анкетным языком для эталона A относительно F и τ, если $(R(W_1), R(W_2))$ является представлением эталона относительно F и τ. Слову $w \in Z^*$ взаимно однозначно соответствует строчный автомат $R(w)$, поэтому, наряду с $R(W_1) \subseteq R(W_2)$, будем писать $W_1 \sqsubseteq W_2$.

Будем различать текстуальные (при $W_2 = \varnothing$) и информаторные анкетные языки. Текстуальный правильный анкетный язык, состоящий из одного слова называется (простым) контрольным экспериментом.

Рассмотрим условия существования анкетных языков. Полагаем $\gamma_1 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \gamma_{1i}$. Ясно, что $(A, B) \in \gamma_1$ равносильно $\Phi_A \subseteq \Phi_B$ и что $\gamma_1 \cap \gamma_1^{-1} = \nu_1$.

Теорема 5.5. *Равносильны следующие утверждения.*

(1) *Анкетный язык для эталона относительно F и τ существует.*

(2) *$(\Phi_A, \overline{\Phi}_A)$ является анкетным языком для A, F, τ.*

(3) *$\nu_1(A) \cap F \subseteq \tau(A)$.*

Теорема 5.6. *Равносильны следующие утверждения.*

(1) *Текстуальный анкетный язык для эталона A относительно F и τ существует.*

(2) *Φ_A является анкетным языком.*

(3) *$\gamma_1(A) \cap F \subseteq \tau(A)$.*

Теорема 5.7. *Равносильны следующие утверждения.*

(1) *Конечный анкетный язык для эталона A относительно F и τ существует.*

(2) *$(\Phi_A^k, \overline{\Phi}_A^k)$ является анкетным языком для некоторого k.*

(3) *$\rho_{1k}(A) \cap F \subseteq \tau(A)$ для некоторого k.*

Напомним, что $\Phi_A^k = \bigcup_{s \in S} \lambda_{As}^k$, а $\overline{\Phi}_A^k = U^k - \Phi_A^k$.

Теорема 5.8. *Равносильны следующие утверждения.*

(1) *Конечный текстуальный анкетный язык для эталона A относительно F и τ существует.*

(2) *Φ_A^k является таким анкетным языком для некоторого k.*

(3) *$\gamma_{1k}(A) \cap F \subseteq \tau(A)$.*

Отметим важный случай, когда $F = \mathrm{A}(X, Y)$ и $\tau = \nu_1$. Из теоремы 5.5 следует, что в этом случае бесконечный анкетный язык всегда существует, причем он задан двумя регулярными по Клини множествами слов $(\Phi_A, \overline{\Phi}_A)$. Легко показать, что конечные анкетные языки существуют не для всех эталонов A. Автомат A называется автоматом с конечной памятью, если существует такое k, что каждое вход-выходное слово $w \in \Phi_A$ длины k является для A конечным идентификатором его состояний. Наименьшее такое k называется порядком конечной памяти. В [6] показано, что имеет место следующая теорема.

Теорема 5.9. *Равносильны следующие утверждения.*

(1) *Правильный анкетный язык для эталона A относительно $\mathrm{A}(U)$ и ν_1 существует.*

(2) *Эталон A является автоматом с конечной памятью.*

(3) *$\rho_{1k} = \nu_1$ для некоторого k.*

Из доказательства теоремы следует, что $(\Phi_A^k, \overline{\Phi}_A^k)$ является анкетным языком для эталона A, являющегося автоматом с конечной памятью, относительно $\mathrm{A}(U)$ и ν_1 для всех k, не меньших порядка конечной памяти.

Заметим, что система $(A, \mathrm{A}(U), \nu_1)$ удовлетворяет условиям теоремы 5.4 и из нее следует, что все правильные текстуальные представления для этой системы тривиальны. Это показывает принципиальное различие между текстуальными и информаторными представлениями.

5.2. Представления относительно N-полных классов

Класс A назовем n-полным, если он состоит из всех автоматов, входящих в $\mathrm{A}(X, Y)$, число состояний которых не превосходит n. Через F_n будем обозначать n-полный класс. Такие классы являются наиболее часто рассматриваемыми классами неисправностей, так как они содержат в себе большинство естественно определяемых (содержательных) классов неисправностей в теории автоматов [3–8, 12, 14–16] и в технической диагностике [32–33].

Для оценки сложности правильных текстуальных представлений относительно F_n и τ введем ряд параметров. Через n_R обозначим число состояний автомата R. Через n_τ обозначим наименьшее число состояний автоматов, подобных A. Ясно, что $n_\tau \leqslant n_A$. Через Y_τ обозначим множество всех выходных символов, которые порождаются подобными автоматами. Как и ранее, m обозначает мощность алфавита X. Будем рассматривать A, F_n, τ, для которых правильные текстуальные представления существуют.

Теорема 5.10. *Для правильного текстуального представления R относительно F_N и τ при $Y \neq Y_\tau$ выполняются следующие условия.*

(1) *Если $n_A \leqslant N$, то $\varphi(R) = A$ для всех гомоморфизмов φ автомата R в A.*

(2) *Для всех гомоморфизмов φ автомата R в A число состояний $\varphi(R)$ не меньше N при $n_A > N$ и равно n_A в противном случае.*

(3) *$n_R > N$, если R нетривиально, и $n_R > n_A$ в противном случае.*

(4) *Число дуг в графе R не меньше N, если $N < n_A$, а R нетривиально, и не меньше mn_A в противном случае.*

Легко показать, что оценки в условиях 3 и 4 достижимы для всех m и n_A.

В случае $Y = Y_\tau$ дело обстоит сложнее: доопределение автомата $\varphi(R)$ может привести к автомату, подобному эталону. Рассмотрим случай, когда R — правильное текстуальное представление относительно N-полного класса F_n и $N < n_A$. Пусть φ — гомоморфизм автомата R в эталон. Покажем, что если число n состояний автомата $\varphi(R)$ меньше N, то $n \geqslant n_\tau$. Предположим, что $n < N$ и $n < n_\tau$. Если автомат $\varphi(R)$ всюду определен, то из неравенства $R \leqslant \varphi(R)$ следует, что $\varphi(R) \notin \tau(A)$ и R — не представление. Если автомат $\varphi(R)$ частичный, то его можно доопределить до полного с тем же числом состояний.

Приведенная форма B полученного автомата обладает следующими свойствами: $R \leqslant B$, $n_B \leqslant n < n_\tau$, $B \in F_n$, поэтому R — не представление.

Условие 1 теоремы 5.10 указывает случай, когда представление должно содержать полную локальную информацию о поведении эталона, то есть содержать все его дуги.

Рассмотрим свойства представлений относительно n-полного класса, где $n = n_A$. Этот класс конечен, значит, отличим от A и любого τ. Как показано ранее, древовидное представление существует для всех τ. Более того, для всех τ существует правильное древовидное текстуальное представление. Его можно построить, например, сравнением эталона с каждым автоматом из F_n. Заметим, что на классе F_n отношение γ совпадает с ε и, так как автоматы из этого класса приведены, совпадает с отношением $\subseteq$ изоморфного вложения автоматов. Точность $\subseteq$ наиболее изучена в теории автоматов и ее приложениях.

Рассмотрим следующее преобразование эталона A. Выберем в нем некоторую дугу (a, x, y, b). Заменим ее дугой (a, x, y, g), где $g \neq a$ и $g \in S_A$. Будем говорить, что новый автомат получен из эталона переброской дуги (a, x, y, b) в состояние g.

Лемма 5.1. *Автомат, полученный переброской любой дуги эталона, не изоморфен эталону.*

Лемма 5.1 играет важную самостоятельную роль, так как при доказательстве того, что фрагмент не является представлением, используется такая схема: пусть R — правильный фрагмент A, и из A переброской некоторой дуги получен неизоморфный ему B; если удается показать, что R — фрагмент B, то относительно данных A и τ фрагмент R текстуальным представлением не является.

Поскольку мощность класса F_n сильно растет с ростом n, часто вместо этого класса рассматривают так называемые его доминирующие подклассы. Подкласс F' класса F называется доминирующим для F (относительно τ), если всякое правильное представление эталона A относительно F' и τ будет представлением относительно F и τ. Этот подкласс назовем слабо доминирующим, если всякое текстуальное правильное представление эталона относительно F' и τ будет таковым и относительно F и τ.

Пусть $\mathrm{A}_1 = \{B \mid B \in F_n, \Phi_A^1 = \Phi_B^1\}$, иными словами, $\mathrm{A}_1 = \rho_{11}(A) \cap F_n$.

Теорема 5.11. *Класс* A_1 *является слабо доминирующим для* F_n *относительно* $\tau = \gamma$ *для любого* A *с* $n_A = n$.

Рассмотрим условия существования представлений частного вида — анкетных языков, для n-полного класса и произвольного τ. Класс F_n конечен, поэтому проверка существования и построение анкетного языка осуществляется следующим тривиальным алгоритмом. Для всякого автомата $B \in F_n - \tau(A)$ строится акцептор 2^B, представляющий множество Φ_B. Этот акцептор имеет не более 2^n состояний. Затем строится акцептор $2^A \times 2^B$ с числом состояний не более 2^{2n}, представляющий событие $\Phi_A \oplus \Phi_B$, где $\oplus$ — операция симметрической разности множеств. Выберем слово $w \in \Phi_A \oplus \Phi_B$, если оно существует. Множество всех таких слов образует анкетный язык. Если он существует, то длина слов в нем не превосходит $2^{2n} - 1$. Поскольку мощность n_A-полного класса сильно растет с ростом n_A, представляет интерес нахождения таких условий существования анкетного языка, проверка которых осуществляется только по информации об эталоне.

Пусть $\tau = \nu_1$. Распознавание автоматов с этой точностью применяется, например, при контроле протоколов в сети ЭВМ [27, 28]. По показанному ранее конечный анкетный язык всегда существует. Рассмотрим условия существования текстуальных анкетных языков, так как именно они получаются в процессе экспериментирования с автоматом. Пусть $n(\Phi_A) = \min\{n_B \mid (A, B) \in \nu_1\}$. Будем говорить, что множество Φ_A пополняемо с возрастанием, если для всех $B \in \mathrm{A}(X, Y)$ из строгого включения $\Phi_A \subset \Phi_B$ следует строгое неравенство $n(\Phi_A) < n(\Phi_B)$. Автомат называется минимальным в классе $\nu_1(A)$, если $n = n(\Phi_A)$. Через $L(A, \mathrm{A}, \tau)$ и $F(A, \mathrm{A}, \tau)$ обозначим классы всех анкетных и конечных анкетных языков соответственно. Через $L_T(A, \mathrm{A}, \tau)$ и $F_T(A, \mathrm{A}, \tau)$ обозначим классы всех текстуальных и конечных текстуальных языков. Рассмотрим случай $\tau = \iota$.

Теорема 5.12. (1) *$F(A, F_n, \iota)$ не пуст тогда и только тогда, когда A является единственным минимальным в $\nu_1(A)$.*

(2) *$F(A, F_n, \iota)$ не пуст тогда и только тогда, когда A является единственным минимальным в $\nu_1(A)$ и Φ_A пополняемо с возрастанием.*

Известно [14], что приведенный сильно связный автомат является единственным минимальным в $\nu_1(A)$, и для него $F(A, F_n, \iota)$ всегда не пуст. Условия, при которых эталон A является единственным минимальным в классе $\nu_1(A)$, изучались в [6].

Рассмотрим условия, при которых Φ_A пополняемо с возрастанием. Автомат A называется определенно-диагностируемым, если существует такое k, что каждое вход-выходное слово $w \in \Phi_A$ длины k является для A начальным идентификатором его состояний. Наименьшее такое k называется порядком диагностируемости. Если A определенно-диагностируемый, то он является автоматом с конечной памятью.

Лемма 5.2. *Если A сильно связный или определенно-диагностируемый, то Φ_A пополняемо с возрастанием.*

Из теоремы 5.12 и леммы 5.2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 5.4. (1) *Для сильно связного эталона A класс $F_T(A, F_n, \iota)$ всегда не пуст.*

(2) *Для определенно-диагностируемого эталона A класс $F_T(A, F_n, \iota)$ не пуст тогда и только тогда, когда A — единственный минимальный автомат в классе $\nu_1(A)$.*

В заключение отметим следующее. Отраженные в обзоре результаты по теории идентификаторов состояний могут служить основой для их построения и систематического использования при синтезе представления автоматов. Принципиальное решение вопросов существования определенных видов представлений позволяет в ряде случаем точно описывать классы автоматов, для которых такие представления (например контрольные эксперименты) существуют. Широкий круг вопросов, связанных с задачами анализа, синтеза и оценки сложностных характеристик представлений как для конечных, так и бесконечных классов автоматов, предполагается рассмотреть в следующей работе.

Список литературы

1. Кон П., *Универсальная алгебра*. Мир, Москва, 1968.
2. Брауэр Р., *Введение в теорию конечных автоматов*. Радио и связь, Москва, 1987.
3. Богомолов А. М., Барашко А. С., Грунский И. С., *Эксперименты с автоматами*. Наукова думка, Киев, 1973.
4. Богомолов А. М., Грунский И. С., Сперанский Д. В., *Контроль и преобразования дискретных автоматов*. Наукова думка, Киев, 1975.
5. Богомолов А. М., Салий В. Н., *Алгебраические основы теории дискретных систем*. Наука, Москва, 1997.
6. Грунский И. С., Козловский В. А., Пономаренко Г. Г., *Представления конечных автоматов фрагментами поведения*. Наукова думка, Киев, 1990.
7. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С., *Введение в теорию автоматов*. Наука, Москва, 1985.
8. Трахтенброт Б. А., Барздинь Я. М., *Конечные автоматы (поведение и синтез)*. Наука, Москва, 1970.
9. Харари Ф., *Теория графов*. Мир, Москва, 1973.
10. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж., *Построение и анализ вычислительных алгоритмов*. Мир, Москва, 1979.
11. Грунский И. С., Козловский В. А., *Синтез и идентификация автоматов*. Наукова думка, Киев, 2004.
12. Гилл А., *Введение в теорию конечных автоматов*. Наука, Москва, 1966.
13. Глушков В. М., Абстрактная теория автоматов. *Успехи матем. наук* (1961) **16**, №5 (101), 3–62.
14. Мур Э. Ф., Умозрительные эксперименты с последовательностными машинами. В сб.: *Автоматы*. ИЛ, Москва, 1956, с. 179–210.
15. Bhattacharyya A., *Checking experiments on sequential machines*. Wiley, New Delhi, 1989.
16. Kohavi Z., *Switching and finite automata theory*. McGraw–Hill, New York, 1970.
17. Максименко И. К., *Эксперименты в финитно-определенных метрических пространствах автоматов*, Автореферат канд. дисс. физ.-мат. наук. Саратовский госуниверситет, Саратов, 2000.
18. Богомолов С. А., *О восстановлении автоматов по их следам*, Автореферат канд. дисс. физ.-мат. наук. ВЦ АН СССР, Москва, 1986.
19. Спивак М. А., К синтезу конечного автомата по его множеству экспериментов. *Кибернетика* (1969) **5**, 15–20.
20. Буевич В. А., Каландаришвили Н. Г., Таль А. А., Об описании конечного автомата с помощью конечного множества вход-выходных слов. *Автоматика и телемеханика* (1970) **1**, 112–122.
21. Иванов Н. Н., Михайлов Г. И., Руднев В. В., Таль А. А., *Конечные автоматы — эквивалентность и поведение*. Наука, Москва, 1984.
22. Грунский И. С., *Анализ поведения конечных автоматов*. ЛГПУ, Луганск, 2003.

23. Евтушенко Н. В., Лебедев А. В., Петренко А. Ф., О проверяющих экспериментах с недетерминированными автоматами. *Автоматика и вычислительная техника* (1991) **6**, 81–85.

24. Лукьянов Б. Д., О различающих и контрольных экспериментах с недетерминированными автоматами. *Кибернетика и системный анализ* (1995) **31**, 69–76.

25. Лукьянов Б. Д., Детерминированные реализации недетерминированных автоматов. *Кибернетика и системный анализ* (1996) **32**, 34–50.

26. Скорняков Л. А., *Общая алгебра*, **1**. Наука, Москва, 1990.

27. Петренко А. Ф., *Автоматные методы анализа совместимости средств взаимодействия в открытых сетях*, Автореферат докт. дисс. техн. наук. ИЭП Латвийской ССР, Рига, 1988.

28. Петренко А. Ф., Эксперименты над протокольными объектами. *Автоматика и вычислительная техника* (1987) **1**, 16–21.

29. Petrenko A. F., Yevtushenko N., Dssouli R., *Grey-box FSM-based testing strategies*, Dept. Publ. 991. Dept. IRO, Univ. de Montreal, 1994.

30. Захаров В. Н., Поспелов Д. А., Хазацкий В. Е., *Системы управления. Задание. Проектирование. Реализация*. Энергия, Москва, 1972.

31. Крывый С. А., Матвеева Л. Е., Формальные методы анализа свойств систем. *Кибернетика и системный анализ* (2003) **39**, 15–36.

32. Пархоменко П. П., *Основы технической диагностики*. Энергия, Москва, 1976.

33. *Fault-tolerant computing: Theory and techniques*, **1** (Pradhan D. K., ed.). Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1986..

34. Kornoushenko E. K., Monitoring of logic-dynamic systems based on sampled performance data. *J. Comput. Syst. Sci. Int.* (1992) **30**, №6, 107–117.

35. Hennie F. C., Fault detecting experiments for sequential circuits. In: *Proc. 5th Annual Symp. on Switching Circuit Theory and Logical Design*. Princeton Univ., Princeton, NJ, 1964, pp. 95–110.

36. Василевский М. П., О распознавании неисправностей автомата. *Кибернетика* (1973) **4**, 93–108.

37. Бородай С. Ю., *Эксперименты в эффективно заданных классах автоматов*, Автореферат канд. дисс. физ.-мат. наук. СГУ, Саратов, 1997.

38. Бородай С. Ю., Условные и безусловные эксперименты с классами реализаций НД-автоматов. В сб.: *Тезисы докл. XI Межд. конф. по проблемам теор. кибернетики*. СВНЦ, Ульяновск, 1996, с. 27–28.

39. Кузнецов А. Б., Трахтенброт Б. А., Исследование частично рекурсивных операторов средствами теории бэровского пространства. *Доклады АН СССР* (1955) **105**, №5, 897–900.

40. Максименко И. И., Распознавание в эффективно-заданных классах автоматов. *Труды ИПММ НАН Украины* (1998) **2**, 115–123.

41. Корноушенко Е. К., *Диагностирование дискретных динамических систем по накопленной информации*, Автореферат докт. дисс. техн. наук. ИПУ, Москва, 1992.

42. Козловский В. А., О распознавании автомата относительно локально порожденного класса. *Доклады АН СССР* (1981) **285**, №5, 1047–1049.

43. Козловский В. А., *О распознавании локальных неисправностей автомата*, Автореферат канд. дисс. физ.-мат. наук. ВЦ АН СССР, Москва, 1981.

44. Козловский В. А., Локальные неисправности автомата и их обнаружение. *Матем. вопросы киберн.* (1991) **3**, 167–186.

45. Козловский В. А., Копытова О. М., Представления автоматов относительно m-плотных классов. В сб.: *Материалы VIII Межд. Семинара “Дискретная математика и ее приложения”*. МГУ, Москва, 2004, с. 277–280.

46. Козловский В. А., О представлениях групповых автоматов. *Кибернетика и системный анализ* (1996) **32**, 21–28.

47. Козловский В. А., О структуре контрольных экспериментов с автоматом. *Кибернетика* (1978) **3**, 19–33.

48. Kozlovskii V. A., On the complexity of analyzing experiments for checking local faults of an automaton. *Lecture Notes Computer Sci.* (1987) **278**, 259–262.

49. Грунский И. С., Козловский В. А., Копытова О. М., Представления автоматов и анализ атак на криптосистемы. *Искусственный интеллект* (2004) **4**, 764–775.

50. Евтушенко Н. В., Матросова А. Ю., К синтезу контролепригодных автоматных сетей. *Техническая диагностика* (1991) **3**, 143–152.

51. Евтушенко Н. В., Петренко А. Ф., Метод построения проверяющих экспериментов для произвольного недетерминированного автомата. *Автоматика и вычислительная техника* (1990) **5**, 73–76.

52. Евтушенко Н. В., Петренко А. Ф., О проверяющих возможностях кратных экспериментов. *Автоматика и вычислительная техника* (1989) **3**, 9–14.

53. Максименко И. И., Эксперименты в классе реализаций недетерминированных автоматов. *Доклады НАН Украины* (1999) **7**, 95–99.

54. Грунский И. С., Идентификация управляющих систем автоматного типа. В сб.: *Труды ICIM'98*. ТГПИ, Таганрог, 1998, с. 107–109.

55. Грунский И. С., Максименко И. И., О распознавании детерминированных автоматов, задаваемых НД-автоматами. В сб.: *Труды III Межд. Конф. "Дискретные модели в теории управляющих систем", Красновидово*. МГУ, Москва, 1998, с. 23–29.

56. Грунский И. С., Максименко И. И., *Эксперименты с маркированными автоматами*, Препринт 96.02. ИПММ НАН Украины, Донецк, 1998.

57. Грунский И. С., Максименко И. И., Об экспериментах с автоматами при отсутствии верхней оценки числа состояний. *Кибернетика и системный анализ* (1999) **4**, 59–71.

Статья поступила 20.06.2008.