УДК 517.988

А.С. Миненко

Приближенный анализ нелинейной конвективной математической модели

Исследуется задача Стефана с учетом конвекции и примесей в жидкой фазе. Доказана теорема существования. Используя метод малого параметра построено приближенное решение задачи. Получена сходимость приближенного решения к точному решению в метрике $H^{2\quad,\frac{2}{2}}$.

1. Принято считать, что чем ближе модель к действительности, тем точнее прогнозы и тем эффективнее, следовательно, управление. Однако это не так. Процессы ЭШП настолько сложны, что, попытавшись построить математическую модель, весьма близкую к реальному процессу со всеми его деталями и особенностями, можно прийти к очень сложным уравнениям, решение которых крайне затруднительны и приводят к существенным ошибкам. Исходя из этих соображений, необходимо стремиться к построению сравнительно простой математической модели процесса ЭШП, отражающей его самые существенные стороны.

В настоящее время известны основные качественные зависимости протекания процесса ЭШП. К сожалению, полных математических моделей его не существует.

Перейдем к построению математической модели процесса кристаллизации.

Будем обозначать через $_t$ область, занятую жидкой (твердой) фазой в момент времени *t*. При этом $_0$ – заданная область в R^3, граница которой состоит из двух замкнутых связанных поверхностей $_0$ и $_0$, не имеющих самопересечений, где $_0$ – гладкая замкнутая поверхность, лежащая внутри $_0$, такая, что $_0$ лежит внутри ограниченной области, границей которой является $_0$. Требуется определить области $_t$ и $_t$ (т.е. границы $_t$ и $_t$), вектор скорости $\vec{V}(x,t)$ $(\vec{V}_1(x,t), \vec{V}_2(x,t), \vec{V}_3(x,t))$, давление $p(x,t)$, концентрации примеси $c(x,t)$, температуру жидкой $u\ (x,t)$ и твердой $u\ (x,t)$ фаз по следующим условиям:

$$\frac{u\ (x,t)}{t} \quad (\vec{V}\ \ )u\ (x,t) \quad a^2 \quad {}^2u\ (x,t) \quad 0,\ (x,t) \quad D_T\ ,$$

$$\frac{u\ (x,t)}{t} \quad a^2 \quad {}^2u\ (x,t) \quad 0,\ (x,t) \quad D_T\ ,$$

$$\frac{\vec{V}(x,t)}{t} \quad (\vec{V}\ \ )\vec{V}(x,t) \quad p(x,t) \quad v \quad {}^2\vec{V}(x,t) \quad \vec{f}(u\ ,c),\ (x,t) \quad D_T\ ,$$

$$\vec{V}(x,t) \quad 0,\ (x,t) \quad D_T\ , \quad \vec{V}(x,0) \quad \vec{C}(x);$$

$$T(\vec{V},p)\vec{n} \quad q(x,t)\vec{n},\ (x,t) \quad {}_t\ ; V_n \quad (1 \quad —)W_n; \tag{1}$$

$$V \quad 0,\ (x,t) \quad {}_t,\ u\ (x,t) \quad B\ (x,t),\ (x,t) \quad {}_t \quad {}_0\ ;$$

$$u\ (x,0) \quad A\ (x); u \quad u \quad T^* \quad c,\ k_{-}\frac{u}{n} \quad k\frac{u}{n} \quad p\ W_n,\ (x,t) \quad {}_t,$$

$$\frac{c}{t}(x,t) \quad (\vec{V}\ \ )c(x,t) \quad {}^2c(x,t) \quad 0,\ (x,t) \quad D_T\ ;$$

$$c(x,0) \quad g_0(x),\ c(x,t) \quad g(x,t),\ (x,t) \quad {}_t\ , \quad \frac{c}{n} \quad cW_n,\ (x,t) \quad {}_t\ .$$

Здесь $x \quad (x_1,x_2,x_3)$, $D_T \quad \{(x,t): x \quad {}_t, t(0,T)\}$, $_t$ – области соответственно жидкой и твердой фаз, $_t \quad {}_t$, $_0 \quad {}_t$, $\vec{n}$ – нормаль к $_t$, направленная в сторону $_t$. Далее, $(\ /\ x_1,\ /\ x_2,\ /\ x_3)$,

$T(\vec{V},p)$ – тензор напряжений с элементами $T_{ij}\quad {}_{ij}P\quad \nu(\ V_i/\ x_j\quad V_j/\ x_i)$, V_n и V – нормальная и тангенциальная составляющие $\vec{V}$, W_n – скорость движения фронта кристаллизации в направлении нормали $\vec{n}$; $T^*, \nu, \ , \ , \ , \ , \ , \ , k\ , k$ – известные положительные постоянные. Отметим также, что если $(x,t)\quad u\ (x,t)\quad c(x,t)\quad T^*\quad 0$ – уравнение поверхности ${}_t$, тогда $W_n\quad {}_t|\quad |$. В дальнейшем удобно условие Стефана представить в следующем виде: $L(u\ ,u\ ,\ {}_t,\ )\quad k^{\ 2}|\ \ u\ |^2\quad k^{\ 2}|\ \ u\ |^2\quad (k^{\ 2}\quad k\ k\ )(\ u\ ,\ \ c)\quad (k^{\ 2}\quad k\ k\ )(\ u\ ,\ \ c)$ $(k\ u\ {}_t\quad k\ u_t\ )\quad (k\quad k\ )c_t\quad 0$, $(x,t)\quad {}_t$.

В работе предполагается, что $A(x)\ H^4\ (\overline{\ {}_0})$, $\vec{C}(x)\ H^2\ (\ {}_0\ )$, $B\ (x,t)\ H^{2\ ,\frac{2}{2}}(\ {}_t\quad {}_0\quad [0,T])$, $\vec{f}(u\ ,c)\ C^1(R^2)$, $g(x,t)\ H^{2\ ,\frac{2}{2}}(\ {}_t\quad [0,T])$, $g_0(x)\ H^4\ (\overline{\ {}_0})$. При этом $g(x,t)$ и $g_{x_i}(x,t)$ должны быть функциями класса $H^{1\ ,\frac{1}{2}}(R^3\quad [0,T])$. Считается также, что выполнены условия согласования до первого порядка включительно, которые формулируются аналогично [1, с. 268, с.363].

2. Будем искать свободные границы ${}_t$ и ${}_t$ в следующем виде ${}_t\ \{x\ \ x(\ )\ \ \vec{n}(\ )\ (\ ,t)\}$, ${}_t\ \{x\ \ x(\ )\ \ (\ ,t)\vec{n}(\ )\}$, где $(\ {}_1,\ {}_2)$, $(\ {}_1,\ {}_2)$, $x(\ )\ \ {}_0$, $x(\ )\ \ {}_0$, $(\ ,t)$ и $(\ ,t)$ некоторые функции соответственно классов $H^{2\ ,\frac{2}{2}}(\ {}_0\ [0,T])$ и $H^{2\ ,\frac{2}{2}}(\ {}_0\ [0,T])$, $(\ ,0)\ \ 0$ и $(\ ,0)\ \ 0$. Введем также обозначения $Q_T\quad {}_0\ [0,T]$, ${}_{0T}\quad {}_0\ [0,T]$, ${}_{0T}\quad {}_0\ [0,T]$, ${}_{0T}\quad {}_0\ [0,T]$.

Далее, для достаточно малых чисел   будем искать решение задачи (1) в виде следующих разложений:

$$u\ (x,t;\ )\quad u_0\ (x)\quad \sum_{k\ 1}\ {}^k u_k\ (x,t),\ p(x,t;\ )\quad p_0(x)\quad \sum_{k\ 1}\ {}^k p_k(x,t),$$

$$V_i(x,t;\ )\quad V_{i0}(x)\quad \sum_{k\ 1}\ {}^k V_{ik}(x,t),\ c(x,t)\quad c_0(x)\quad \sum_{k\ 1}\ {}^k c_k(x,t), \qquad (2)$$

$$i\quad 1,2,3;\quad (\ ,t;\ )\quad \sum_{k\ 1}\ {}^k\ {}_k(\ ,t),\quad (\ ,t;\ )\quad \sum_{k\ 1}\ {}^k\ {}_k(\ ,t).$$

В работах [2-7] изучены нулевые и первые приближения задачи (1) для малых чисел . При этом установлено, что $u_0\ (x)\quad A\ (x)$, $\vec{V}_0(x)\quad \vec{C}(x)$, $c_0(x)\quad g_0(x)$, ${}_1(\ ,t)\ \ H^{2\ ,\frac{2}{2}}(\ {}_{0T})$, ${}_1(\ ,t)\quad {}_{0T}$, $u_1(x,t;\ ,\ )\ \ H^{2\ ,\frac{2}{2}}(\overline{Q_T})$, $c_1(x,t;\ ,\ )\ \ H^{2\ ,\frac{2}{2}}(\overline{Q_T})$ причем ${}_1(\ ,t)$ находим как неподвижную точку сжимающегося оператора M_1: $M_1\ {}_1\quad \frac{1}{p}\int_0^t(k\ \frac{u_1}{n}\quad k\ \frac{u_1}{n}\quad f_1(x,t))dt$, $x(\ )\quad {}_{0T}$.

3. Имеют место следующие формулы:

$$u_x\Big|_{t} \quad u_{0x} \quad (\ {}_1 f_1 \quad {}_1 u_1 \ \frac{u_1}{x}) \quad {}^2(\ {}_2 f_2 \quad {}_2 u_2 \ \frac{u_2}{x}) \ \ldots \ {}^k(\ {}_k f_k \quad {}_k u_k \ \frac{u_k}{x}) \ o({}^k),$$

$$(x,t) \quad {}_{0T}; W_n\Big|_{t} \quad (\frac{u_{1t}}{|\ u_0|} \ F_1) \quad (\frac{u_{2t}}{|\ u_0|} \ F_2)^{\ 2} \ \ldots \ (\frac{u_{kt}}{|\ u_0|} \ F_k)^{\ k} \ o({}^k) \ 0, (x,t) \quad {}_{0T},$$

$$L(u\ ,u\ ,\ {}_t,\ {}_t\ ,\ )|_{t} \quad [k^{\ 2}|\ u_0^-|^2 \ k^{\ 2}|\ u_0\ |^2] \quad [2k^{\ 2}(\ u_0\ ,\ u_1\ ) \ 2k^{\ 2}(\ u_0\ ,\ u_1\ ) \quad {}_1$$

$$(k\, u_{1t} \quad k\, u_{1t}\ )] \ \ldots \ {}^k[2k^{\ 2}(\ u_0, \quad u\ {}_k) \ 2k^{\ 2}(\ u_0\ ,\ u\ {}_k) \quad {}_k \quad (k\, u_{kt} \quad k\, u_{kt}\ )]$$

$o({}^k)$ 0, (x,t) ${}_{0T}$, где ${}_k(x,t)$, ${}_k(x,t)$, $f_k(x,t)$, $F_k(x,t)$ и ${}_k(x,t)$ – известные функции. Из последней формулы следует, что $k^{\ 2}|\ u_0\ |^2 \ k^{\ 2}|\ u_0\ |\ 0$, x ${}_0$,

$$k\ \frac{u_k}{n} \ \ k\ \frac{u_k}{n} \quad {}_k \quad \frac{{}_k}{t},\ (x,t) \quad {}_{0T}.$$

4. Введем обозначения: $M_1(\vec{\ }_i, \vec{\ }_j) \ (\vec{\ }_0\ )\vec{\ }_k \ (\vec{\ }_1\ )\overrightarrow{\ }_{k\ 1} \ \ldots \ (\vec{\ }_k\ )\vec{\ }_0$, $M_2(\vec{\ }_i, \ {}_j) \ (\vec{\ }_0\ )\ {}_k \ (\vec{\ }_1\ )\ {}_{k\ 1} \ \ldots \ (\vec{\ }_k\ )\ {}_0$, $N(\vec{V}_i, p_j)\vec{n} \ \ T(\vec{V}_0, p_k)\vec{n} \ \ T(\vec{V}_1 p_{k\ 1})\vec{n} \ \ldots \ T(\vec{V}_k, p_0)\vec{n}$.

Затем рассмотрим k-ое приближение $(\vec{V}_k, u_k\ , p_k,\ {}_k,\ {}_k, c_k)$ задачи (1) для малых чисел . Имеем:

$$\frac{\vec{V}_k}{t} \ \ M_1(\vec{V}_i, \vec{V}_j) \quad p_k \quad \nu \ {}^2\vec{V}_k \ \ \frac{1}{k!} d^2 f(u_k\ , c_k),\ (x,t) \quad Q_T$$

$$\vec{V}_k \quad 0,\ (x,t) Q_T\ ;\ N(\vec{V}_i, p_j)\vec{n} \quad 0,\ (x,t) \quad {}_{0T}\ , \qquad (3)$$

$$\vec{V}_k(x,0) \quad 0,\ V_{kn} \quad (1 \ \frac{p}{\ })[\frac{u_{kt}}{|\ u_0\ |} \quad F_k(x,t)],\ V_k \quad 0,\ (x,t) \quad {}_{0,T}$$

$$\frac{u_k}{t} \quad M_2(\vec{V}_i, u_k\ ) \quad a^2 \quad {}^2 u_k\ ,\ (x,t) \quad Q_T\ ,$$

$$\frac{u_k}{t} \quad a^2 \quad {}^2 u_k \quad 0,\ (x,t) \quad Q_T\ , \qquad (4)$$

$$u\ {}_k(x,0) \quad 0,\ u\ {}_k(x,t) \quad 0,\ (x,t) \quad {}_{0T} \quad {}_{0T}\ ,\ u_k \quad u_k\ ,$$

$$|\ u_0\ (x(\ ))|\ {}_k(\ ,t) \ \ u_k(x(\ ),t) \quad f_k(x(\ ),t) \quad 0,\ (x,t) \quad {}_{0T}$$

$$\frac{c_k}{t} \quad M_2(\vec{V}_i, c_j) \quad {}^2 c_k \quad 0,\ (x,t) \quad Q_T\ , c(x,0) \quad 0,\ c_k(x,t) \quad 0,$$

$$(x,t) \quad {}_{0T}\ ; \quad \frac{c_k}{n} \quad {}_k c_k \quad c_0(x)\frac{u_{kt}}{|\ u_0\ |} \quad F_k^*, (x,t) \quad {}_{0T}, \qquad (5)$$

$$\frac{c_0}{n} \ {}_k(\ ,t) \quad c_k(x(\ ),t) \quad g_k(x(\ ),t) \quad 0,\ (x,t) \quad {}_{0T}\ ,$$

здесь $F_k(x,t)$, $f_k(x,t)$ и $F_k^*(x,t)$– известные функции.

Зададим теперь $\vec{V} \ \ \vec{V}_1(x,t)$. Затем решим задачу (4), (5) и найдем $u_1\ , c_1,\ {}_1,\ {}_1$. После чего решим задачу (3), являющуюся начально-краевой задачей для системы Навье-Стокса. Затем, используя новое значение $\vec{V}_2(x,t)$, снова решаем задачу (4) и (5) и т.д. Следовательно, получим процесс последовательных приближений $\vec{V}_k, u_k\ , c_k,\ {}_k,\ {}_k$. Доказательство сходимости этого процесса аналогично приведенному в [8] причем при заданном

$_k(\ ,t)\ \ H^{2,\frac{2}{2}}(\ _{0T})$ найдем функции $u_k\ (x,t,\ _k)\ \ H^{2,\frac{2}{2}}(\overrightarrow{Q_T})$, $c_k(x,t,\ _k)\ \ H^{2,\frac{2}{2}}(\overrightarrow{Q_T})$ как единственное решение задачи (4)-(5), а $_k(\ ,t)$ находим как неподвижную точку сжимающегося оператора M_k:

$$M_k\ _k\ \ \frac{1}{\ }\int_0^t (k\ \frac{u_k}{n}\ \ k\ \frac{u_k}{n}\ \ _k(x,t))dt,\ (x(\ ),t)\ \ _{0T}.$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. Пусть выполнены условия $|\ \ A\ (x(\ ))|\ \ \frac{g_0}{n},\ x\ \ _0;\ \frac{c(k\ \ \ k\ )}{\ }\ \ 1$, где c – некоторая постоянная [1, с. 364] и пусть $^2A\ (x)\ \ 0$, $x\ \ _0$, $A\ (x)|_{x\ \ 0\ \ 0}\ \ B\ (x,0)$, $A\ (x)|_{\ 0}\ \ 0$, $\vec{C}(x)\ \ 0,\ x\ \ \overline{\ }_0$, $k\ |\ \ A\ (x)|_{\ 0}\ \ k\ |\ \ A\ (x)|_{\ 0}$, $|\ \ A\ (x)||_{\ 0}\ \ \ 0$ (здесь некоторая положительная постоянная). Тогда оператор M_k, действующий из $H^{2,\frac{2}{2}}(\ _{0T})$ в $H^{2,\frac{2}{2}}(\ _{0T})$, имеет там неподвижную точку.

Лемма 2. В качестве k-го приближения задачи (1) можно взять решение $u_k\ (x,t), c_k(x,t), \vec{V}_k(x,t),\ \ _k(\ ,t),\ \ _k(\ ,t)$ задачи (4)-(5).

Теорема. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда приближения $V_k(x,t), u_k\ (x,t), c_k(x,t),\ \ _k(\ ,t),\ \ _k(\ ,t)$ сходятся к функциям $V(x,t),\ u\ (x,t),\ c(x,t)$, $(\ ,t),\ \ _k(\ ,t)$ – класса $H^{2,\frac{2}{2}}$, являющимся решением задачи (1).

Лемма 3. Пусть $\frac{g_0(x)}{n}\ \ 0$ на $\ _0$. Тогда при малых числах и достаточно малых значениях t справедливы формулы:

$$_t:x\ \ x(0)\ \ \vec{n}\sum_{i\ 1}^{k}\ ^i\frac{c_i(x(\ ),t)\ \ g_i(x(\ ),t)}{\frac{c_0}{n}}\ \ o(\ ^k),\ x\ \ \ _0,$$

$$_t:x\ \ x(\ )\ \ \vec{n}\sum_{i\ 1}^{k}\ ^i\frac{u_i(x(\ ),t)\ \ f_i(x(\ ),t)}{|\ \ u_0\ (x(\ ))|}\ \ o(\ ^k),\ x\ \ \ _0.$$

Замечание. Доказанная теорема фактически устанавливает существование решения задачи (1) в классе функций $H^{2,\frac{2}{2}}$.

Литература

1. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 756 с.
2. Миненко А.С. Вариационные задачи со свободной границей. – К.: Наукова думка, 2005. – 341 с.
3. Шевченко А.И., Миненко А.С. Приближенный анализ многомерной конвективной задачи Стефана // Доповіді НАН України. – 2010. – №4. – С. 30-34.
4. Шевченко А.И., Миненко А.С. Приближенный анализ стационарной конвективной задачи Стефана // Доповіді НАН України. – 2010. – №5. – С. 36-40.
5. Шевченко А.И., Миненко А.С. Приближенный анализ пространственной конвективной задачи Стефана // Доповіді НАН України. – 2010. – №10. – С. 29-33.
6. Миненко А.С. Исследование одной конвективной задачи Стефана методом Ритца // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, №11. – С. 1546-1556.
7. Миненко А.С. О минимизации одного интегрального функционала методом Ритца // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, №10. – С. 1385-1394.
8. Солонников В.А. Разрешимость задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1977. – **41**, №6. – С. 1388-1424.

Приблизний аналіз нелінійної конвективної математичної моделі

Досліджується задача Стефана з урахуванням конвекції і домішок в рідині. Доведена теорема розв’язності. Використовуючи метод малого параметру побудовано наближене рішення задачі. Доведена збіжність наближеного рішення до точного розв’язку в метриці $H^{2,\frac{2}{2}}$.

Approximation analysis of nonlinear mathematical model with convection

The convection Stefan problem in liquid phase is investigated. We prove the theorem on the solvability the method of small parameter is constructed. The convergence of an approximation solution to the extract solution in metrics $H^{2,\frac{2}{2}}$ is proved.

Институту
информатики и искусственного
интеллекта, ДонНТУ
83050 г. Донецк, пр. Б.Хмельницкого, 84
Тел. (062) 304 – 92 – 58
Факс (062) 337 – 78 – 66
E-mail: minenko@iai.donetsk.ua

Поступило в редакцию