

## ОБЗОР МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Дубина Д.А., Миненко А.С.

Донецкий национальный технический университет  
кафедра искусственного интеллекта и системного анализа

E-mail:

### *Аннотация:*

*Дубина Д.А., Миненко А.С. Обзор математических методов моделирования сложных геометрических объектов и их преобразований. Проведен анализ существующих методов геометрического моделирования: гладкого сопряжения кривых и плоскостей; построения линейной перспективы плоских и объемных геометрических объектов.*

### *Annotation:*

*Dubina D.A., Minenko A.S. A review of mathematical methods for modeling complex geometric objects and their transformations. The analysis of the existing methods of geometric modeling is carried out: smooth conjugation of curves and planes; building a linear perspective of flat and three-dimensional geometric objects.*

### **Общая постановка проблемы**

Математическое моделирование физико-механических процессов и инженерных сооружений часто связано с необходимостью создания геометрических моделей. С их помощью можно определить образ существующего или проектируемого объекта, провести соответствующий постановке задачи численный эксперимент и осуществить необходимые коррекции. Геометрической моделью в широком смысле называется совокупность формального описания исследуемого объекта и соответствующего ему визуального образа, представленного в пространствах различной размерности. Формальным описанием в связи с развитием современных методов компьютерного моделирования в первую очередь является численное моделирование геометрических объектов окружающего мира. При этом их многообразие создается с использованием базовых геометрических элементов: точки, линии и поверхности.

### **Методы геометрического моделирования**

Геометрическое моделирование в настоящее время развивается по двум направлениям. Первое направление – численные методы в задачах САПР и компьютерной графики [1–5]. Современные этапы внедрения САПР характеризуются переходом от плоского моделирования к объемному. Точность модели геометрического объекта обеспечивается точностью осуществления преобразования базового примитива. Для плоского моделирования, основными объектами моделирования являются отрезки, дуги, полилинии и кривые, в том числе кривые Безье, сплайны, рациональные кривые. Базовые преобразования на их основе – продление, обрезка и соединение. В объемном моделировании основные объекты – это замкнутые контуры. При этом используются поверхности движения, линейчатые, поверхности Безье, Кунса. Главные операции – булевы: объединение, дополнение, пересечение, а также преобразования поворота и трансляции. Существует понятие базовой поверхности, с которой в процессе моделирования осуществляют то или иное преобразование. В результате средствами САПР проектируемый объект численно конструируется из геометрических тел, называемых графическими примитивами, которые могут быть трансформированы теми или иными программными

средствами. Аналитического представления новых форм, получаемых такими преобразованиями, не существует.

Второе направление геометрического моделирования представлено работами, где геометрические объекты задаются в аналитическом виде [6–12]. В работе [13] собрано более 500 аналитически заданных поверхностей 38 классов, которые могут быть использованы при решении различных задач науки и техники. Аналитические методы представления геометрических объектов обладают высокой степенью точности. Возможны различные формы описания объектов и их преобразований – векторные, операторные, тензорные и иные формы, что позволяет задавать каждую точку геометрического объекта и выполнять произвольные преобразования в аналитическом виде. В основе классификации аналитических поверхностей существенную роль имеют те способы, в результате которых эти поверхности получаются [7]. Существует большой класс поверхностей, которые получены преобразованием вращения плоской кривой вокруг оси  $Oz$ . Еще один обширный класс поверхностей получается преобразованием переноса кривой некоторого направления, так что ее одна точка скользит по другой кривой. Более сложные преобразования образуют классы винтовых, спиралевидных и других поверхностей [7,13]. Пополнение известного набора аналитических поверхностей новыми и расширение их классов представляет интерес для развития методов геометрического моделирования и их приложений. Важной составляющей исследований в этом направлении может быть расширение многообразия поверхностей и создание новых аналитических форм путем различных преобразований: дополнений, поворотов, пересечений и других. Использование аналитических методов может являться начальным этапом проектирования. Это позволяет после верификации соответствующих геометрических моделей транслировать их в графические пакеты, поддерживающие геометрические масштабы для получения проектной документации.

#### **Методы гладкого сопряжения и построения линейной перспективы**

Существуют алгоритмы гладкого сопряжения кривых и плоскостей при разработке системы геометрического моделирования машиностроительных деталей на основе численных методов. Для их применения требуется описать объекты сопряжения в форме поверхности или кривой Безье, или сплайновой поверхности соответственно, как рассмотрено в работах [2,3,4,14]. Степень гладкости сопряжения зависит от числа контрольных точек, что в свою очередь увеличивает алгебраическую степень кривых, и затрудняет численные расчеты. Более широко данные методы моделирования используются для поверхностного моделирования сложных объемных форм.

Сопряжения поверхностей в компьютерной геометрии [2] осуществляется для операции скругления ребер. Для этого строят новые грани, которые различным образом сопрягают тела, которые стыкуются в скругляемых ребрах. В основе этих методов лежат геометрические алгоритмы с использованием поверхностей скругления постоянного радиуса и поверхностей, представляющие собой следы от качения сферы, частей цилиндрических поверхностей и поверхностей тора. В случае если требуется построить поверхность переменного радиуса, то опорная дуга поверхности сопряжения представляется в виде рациональной кривой Безье. Также рассматриваются и гладкие сопрягаемые поверхности – эллиптические, параболические и гиперболические, которые получаются варьированием функции веса средней точки, заданной рациональной кривой Безье. При этом не исследовался вопрос кривизны и степени гладкости такого сопряжения. Возникающая от привлечения численных методов погрешность, в описанных методах гладкого сопряжения при определении точек касания требует дополнительных исследований.

Исследованию преобразования центрального проектирования посвящен раздел геометрии – проективная геометрия, которая развилась и выделилась в отдельную ветвь знаний в первые десятилетия 19 века в связи с потребностью развития теории изображений в перспективе. Геометр Жан Виктор Понселе один из первых выделил особые свойства

геометрических фигур, названные им проективными. Проективная геометрия составляет геометрию класса проективных преобразований и представляет из себя систему теорем, утверждающих неизменность свойств фигур в этом классе [15]. Идея классификации различных отраслей геометрии в соответствии с классами преобразований принадлежит Феликсу Клейну [16].

Метод создания перспективного изображения широко применяется в компьютерной графике при создании реалистического изображения. В основе метода в популярных и конкурирующих между собой пакетах OpenGL и DirectX лежит построение так называемой проекционной матрицы и ее применение для создания проективного изображения [18]. Преобразование осуществляется с использованием однородных координат с переходом на заключительной стадии к декартовым для определения положения координаты трёхмерной вершины на двумерном экране монитора [6,19].

Формирование проекционной матрицы для создания требуемой иллюзии осуществляется с помощью четырёх параметров: угол обзора в радианах –  $fovy$ , соотношение сторон –  $aspect$ , расстояние до ближней плоскости отсечения ( $n$ ), расстояние до дальней плоскости отсечения –  $f$ .

В данных методах объект проецирования задается организованным программным образом массивом координат. При использовании аналитических форм возникает обязательная необходимость в переходе к таким массивам перед осуществлением преобразования проецирования. Используются различные методы, в частности, триангуляции, для возможности выполнения процедур в соответствии с аксиоматикой проективной геометрии. Серьезные вычислительные трудности возникают в тех случаях, когда проецируемый объект, плоскость проецирования или центр проецирования меняют свое положение в пространстве произвольным образом. Все алгоритмы получения проективных изображений связаны с необходимостью переходов от декартовых координат к однородным и затем требуют выполнения обратного перехода.

### **Выводы**

По результатам анализа существующих методов геометрического моделирования установлено, что при математическом моделировании сложных геометрических объектов и их преобразований используются два основных подхода – численные методы в задачах САПР, компьютерной графики и аналитическое геометрическое моделирование. Средствами САПР проектируемый объект численно конструируется из геометрических тел, называемых графическими примитивами, которые могут быть трансформированы теми или иными программными средствами. Точность модели геометрического объекта обеспечивается точностью осуществления поточечного преобразования базового примитива. Аналитические же методы обладают высокой степенью точности результатов моделирования, так как аналитически задается каждая точка геометрического объекта и преобразования выполняются синхронно.

Существуют алгоритмы гладкого сопряжения кривых и плоскостей при разработке системы геометрического моделирования машиностроительных деталей методами САПР на базе использования численных методов. Степень гладкости сопряжения зависит от числа контрольных точек, что увеличивает и алгебраическую степень кривых сопряжения и затрудняет численные расчеты.

Операцию скругления ребер осуществляют методами компьютерной геометрии, в основе которых лежит сопряжение в аналитической форме с использованием поверхностей постоянного радиуса.

Основным применением методов создания перспективных изображений является решение задач компьютерной визуализации. Теоретические основы соответствующих методов заложены в проективной геометрии. Основными инструментами при моделировании построения центральной проекции являются проективные матрицы в

однородных координатах с использованием глобальных и локальных систем координат. Объект проецирования задается поточечно – числовым массивом его координат. Расположение плоскости проецирования является строго фронтальной.

Наряду с рассмотренными, возможен иной подход к математическому моделированию представленных выше преобразований, когда объекты моделирования заданы в аналитической форме, а все преобразования выполняются в аналитическом виде независимо от выбора системы координат.

Обзор существующих методов описания поворота твердого тела, как наиболее широко используемого преобразования, свидетельствует о большом разнообразии подходов к решению задачи. Объединяющим является использование в разных формах представления матрицы поворота вокруг оси, проходящей через начало координат. Поворот вокруг оси, проходящей через произвольную точку пространства осуществляется путем композиции преобразования поворота относительно координатных осей и преобразования трансляции. При этом обязательным условием является введение подвижной и неподвижной системы отсчета.

Эффективным средством описания сферического движения твердого тела является использование кватернионной параметризации, которая в последние годы находит все большее применение в задачах управления движением, робототехники и компьютерной анимации. При этом популярность приобретает метод сферической линейной интерполяции кватернионов. Методы нелинейной интерполяции кватернионов, позволяющих в более широком диапазоне задавать кинематические законы сферического движения в научной литературе отсутствуют. Представляется целесообразным получение независимых от выбора системы координат и удобных для реализации в пакетах компьютерной алгебры алгоритмов описания поворота твердого тела относительно оси произвольного положения.

Результат обзора позволяет сделать вывод о целесообразности создания универсальных математических методов для аналитического описания сложных геометрических объектов и их преобразований в основе которых лежит выполнение требований независимости от выбора системы координат и совместимости с существующими аналитическими представлениями объектов.

Именно такие методы позволят осуществить компьютерное моделирование преобразований сложных геометрических объектов в пакетах компьютерной алгебры.

## Литература

1. Роджерс, Д. Математические основы машинной графики. / Д. Роджерс, Дж. Адамс – М.: Мир. – 2001. – 604 с.
2. Голованов, Н. Н. Геометрическое моделирование. / Н. Н. Голованов – М.: КУРС, НИЦ ИНФРА–М. – 2016. – 400 с.
3. Голованов, Н.Н. Компьютерная геометрия. / Н.Н. Голованов, Г.В. Носовский, А.Т. Фоменко – М.: Академия. – 2006. – 512 с.
4. Рекомендации. САПР. Типовые методы геометрического моделирования объектов проектирования. Р 50–34–87 // М: Государственный комитет СССР по стандартам, 1988, дата введения 01.01.1989, дата актуализации 01.12.2013, 113 с.
5. Дубровин, Б.А. Современная геометрия: Методы и приложения. Т.1. Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей. / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко – Изд. 6–е, М.: УРСС: Книжный дом «ЛИБРОКОМ» . – 2013. – 336 с.
6. Никулин, Е.А. Компьютерная геометрия и алгоритмы машинной графики / Е.А. Никулин. – СПб.: БХВ–Петербург, 2003. – 560 с.

7. Кривошапко, С.Н. Энциклопедия аналитических поверхностей. / С.Н. Кривошапко, В.Н. Иванов – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ». – 2010. – 560 с.
8. Иванов, В.Н. Архитектура и конструирование оболочек в форме волнистых, зонтичных и каналовых поверхностей Иоахимстала // Монтажные и специальные работы в строительстве. / В.Н. Иванов, Юнес Аббуши Наср – 2002. – № 6.– С. 21–24.
9. Кривошапко, С.Н. Классификация циклических поверхностей// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. / С.Н. Кривошапко, В.Н. Иванов – 2006. – № 2. – С. 25–34.
10. Иванов, В.Н. Архитектурные композиции на основе поверхностей Кунса // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. / В.Н. Иванов – 2007. – № 4. – С. 5–10.
11. Митюшов, Е.А. Геометрическое моделирование пространственных конструкций. / Е.А. Митюшов, З.В. Беляева – LAP Lambert Academic Publishing. – 2011. – 134 p.
12. Щербаков, Н.Р. Моделирование поверхностей зубьев контактирующих деталей гипоидной передачи / Н.Р. Щербаков, А.А. Щеголева // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2017. – № 48 – С. 30–35.
13. Krivoshapko, S.N. Encyclopedi of Analytical Surfaces / S.N. Krivoshapko, V.N. Ivanov // Springer International Publishing Switzerland. – 2015. – 751p.
14. Куреннов, Д.В. Алгоритм гладкого сопряжения поверхностей / Д.В. Куреннов, А.С. Партин // Программные продукты и системы. – 2009. – N3 – С. 62–64.
15. Игнатъев, Ю.Г. Проективная геометрия и методы изображений. Учебное пособие. / Ю.Г. Игнатъев, А.А. Агафонов – Казань: Казанский университет. – 2014. – 114с.
16. Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию её идей. Ред. Норден А.П. – М.: Гостехиздат. – 1956. – С.429–430.
17. Лаптев, Г. Ф. Элементы векторного исчисления: Учебное руководство. / Г. Ф. Лаптев – М.: Наука. – 1975. – 336 с
18. Сидоренко, Л. Компьютерная графика и геометрическое моделирование: Учебное пособие. / Л. Сидоренко – СПб.: Питер. – 2009. – 224с.
19. Тюкачев, Н.А. Программирование графики в Delphi. / Н.А. Тюкачев, И.В. Илларионов, В. Хлебостроев. СПб, БХВ–Петербург. – 2008, 784 с.