

СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ СПОСОБОВ АППРОКСИМАЦИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ НА ТРЕУГОЛЬНОМ ЭЛЕМЕНТЕ В РАСЧЕТАХ ОБОЛОЧЕК

Ю. В. Клочков, А. П. Николаев, Н. А. Гуреева

Волгоградская государственная сельскохозяйственная академия, Россия

e-mail: vladisla@vlink.ru

Vector interpolation of displacements was used to obtain the interpolation dependencies for a triangular finite element with nine degrees of freedom in the node. These interpolations express components of the vector of displacement of an internal point of the discrete element along with their derivatives through the column of varying parameters, which include values of all components of the node displacement vectors and their derivatives. Calculations of shells with significant gradients of curvatures of the middle surface or shells allowing stiff displacements have revealed principle advantages of the proposed method of the vector interpolation of displacements in the triangular finite element in contrast with generally accepted interpolation procedure.

Введение

В настоящее время в конечно-элементном анализе оболочек широкое применение находят дискретные элементы, узловыми неизвестными которых выбираются компоненты вектора перемещения и их первые производные по криволинейным координатам [1–3]. Это обстоятельство вызвано, по всей видимости, тем, что конечные элементы (КЭ), число узловых варьируемых параметров которых ограничено компонентами вектора перемещения и только их первыми производными, имеют существенно меньший (по сравнению с высокоточными КЭ) размер матрицы жесткости, что в свою очередь позволяет снизить требования к объему оперативной памяти используемого компьютера. Кроме того, ряд исследователей [3, 4] указывают на возможные проблемы совместности, которые могут возникнуть с применением в качестве элементов дискретизации высокоточных КЭ с набором узловых неизвестных, включающим производные высших порядков. Однако при использовании теории оболочек [5, 6] для определения напряженно-деформированного состояния требуются вторые производные нормальной компоненты вектора перемещения срединной поверхности. Поэтому для достижения приемлемых точности и сходимости вычислительного процесса требуется достаточно мелкая сетка элементов со столбцом узловых параметров, включающим только первые производные компонент вектора перемещения. Но в ряде случаев (когда градиенты кривизны срединной поверхности достигают существенных значений или оболочка имеет закрепления, допускающие ее смещения как абсолютно твердого

тела) даже весьма густая сетка элементов с первыми производными перемещений (КЭ малого порядка) не позволяет получить удовлетворительный результат. Увеличение числа элементов дискретизации до бесконечности также невозможно в связи с накоплением ошибки округления, которая пропорциональна количеству КЭ.

Кардинально повысить эффективность применения такого рода КЭ к расчету оболочек можно за счет использования способа векторной интерполяции перемещений [7], принципиально отличного от общепринятой интерполяционной процедуры в методе конечных элементов. В настоящей статье на примере треугольного конечного элемента, узловыми неизвестными которого выбраны компоненты вектора перемещения и только их первые производные, показана высокая эффективность векторной интерполяции перемещений при расчете оболочек сложной конфигурации или допускающих в процессе своей эксплуатации смещения как жесткого тела.

1. Варианты способов аппроксимации полей перемещений

В качестве элемента дискретизации выбирается треугольный фрагмент срединной поверхности с узлами i, j, k , который для удобства численного интегрирования отображается на прямоугольный треугольник с катетами единичной длины. Столбец узловых варьируемых параметров данного треугольного КЭ в локальной ($0 \leq x, y \leq 1$) системе координат выбирается в виде

$$\left\{ U_y^{\text{л}} \right\}_{1 \times 27}^T = \left\{ \left\{ v_y^{1\text{л}} \right\}_{1 \times 9}^T \left\{ v_y^{2\text{л}} \right\}_{1 \times 9}^T \left\{ v_y^{3\text{л}} \right\}_{1 \times 9}^T \right\}, \quad (1)$$

где

$$\left\{ q \right\}_{1 \times 9}^T = \left\{ q^i q^j q^k q_{,x}^i q_{,x}^j q_{,x}^k q_{,y}^i q_{,y}^j q_{,y}^k \right\}.$$

Здесь и ниже под q понимаются тангенциальные v^1, v^2 или нормальная v -компоненты вектора перемещения. Согласно общепринятой интерполяционной процедуре [3] каждая компонента вектора перемещения внутренней точки треугольного КЭ интерполируется через узловые значения соответствующей компоненты

$$v^1 = \left\{ \varphi \right\}_{1 \times 9}^T \left\{ v_y^1 \right\}_{9 \times 1}, \quad v^2 = \left\{ \varphi \right\}_{1 \times 9}^T \left\{ v_y^2 \right\}_{9 \times 1}, \quad v = \left\{ \varphi \right\}_{1 \times 9}^T \left\{ v_y \right\}_{9 \times 1}, \quad (2)$$

где $\left\{ \varphi \right\}_{1 \times 9}^T = \{ \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_9 \}$ — функции формы, полученные на основе полного полинома третьей степени [8].

Для вычисления вторых производных нормальной компоненты вектора перемещения необходимо дважды выполнить дифференцирование последнего равенства (2) по глобальным криволинейным координатам α и β :

$$v_{,\alpha\alpha} = \left\{ \varphi_{,\alpha\alpha} \right\}^T \left\{ v_y \right\}, \quad v_{,\beta\beta} = \left\{ \varphi_{,\beta\beta} \right\}^T \left\{ v_y \right\}, \quad v_{,\alpha\beta} = \left\{ \varphi_{,\alpha\beta} \right\}^T \left\{ v_y \right\}. \quad (3)$$

Согласно формулам (3) вторая производная в каком-либо узле элемента будет равна алгебраической сумме первых производных всех узлов элемента.

В отличие от общепринятой интерполяционной процедуры, векторный способ аппроксимации предполагает варьирование не скалярной величины — отдельной компоненты

вектора перемещения, а непосредственно вектора перемещения точки срединной поверхности

$$\vec{v} = \{\varphi\}_{1 \times 9}^T \{\vec{v}_y^{\pi}\}_{9 \times 1}, \quad (4)$$

где

$$\{\vec{v}_y^{\pi}\}^T = \{\vec{v}^i \vec{v}^j \vec{v}^k \vec{v}_{,x}^i \vec{v}_{,x}^j \vec{v}_{,x}^k \vec{v}_{,y}^i \vec{v}_{,y}^j \vec{v}_{,y}^k\}.$$

Столбец $\{\vec{v}_y^{\pi}\}$ выражается через столбец векторных узловых неизвестных $\{\vec{v}_y^{\Gamma}\}$ в глобальной системе координат соотношением

$$\{\vec{v}_y^{\pi}\}_{9 \times 1} = [L]_{9 \times 9} \{\vec{v}_y^{\Gamma}\}_{9 \times 1}. \quad (5)$$

Здесь $[L]$ — матрица вида

$$[L] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & & & & & & & & \\ \hline & 1 & & & & & & & \\ \hline & & 1 & & & & & & \\ \hline & & & \frac{\partial \alpha}{\partial x} & & & \frac{\partial \beta}{\partial x} & & \\ \hline & & & & \frac{\partial \alpha}{\partial x} & & & \frac{\partial \beta}{\partial x} & \\ \hline & & & & & \frac{\partial \alpha}{\partial x} & & & \frac{\partial \beta}{\partial x} \\ \hline & & & \frac{\partial \alpha}{\partial y} & & & \frac{\partial \beta}{\partial y} & & \\ \hline & & & & \frac{\partial \alpha}{\partial y} & & & \frac{\partial \beta}{\partial y} & \\ \hline & & & & & \frac{\partial \alpha}{\partial y} & & & \frac{\partial \beta}{\partial y} \\ \hline \end{array}$$

Вектор перемещения и его производные в точке глобальной системы координат могут быть представлены в локальном базисе

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v^1 \vec{a}_1 + v^2 \vec{a}_2 + v \vec{a}_1, \\ \vec{v}_{,\alpha} &= t_{\alpha}^1 \vec{a}_1 + t_{\alpha}^2 \vec{a}_2 + t_{\alpha} \vec{a}_1, \\ \vec{v}_{,\beta} &= t_{\beta}^1 \vec{a}_1 + t_{\beta}^2 \vec{a}_2 + t_{\beta} \vec{a}, \\ \vec{v}_{,\alpha\alpha} &= t_{\alpha\alpha}^1 \vec{a}_1 + t_{\alpha\alpha}^2 \vec{a}_2 + t_{\alpha\alpha} \vec{a}, \\ \vec{v}_{,\beta\beta} &= t_{\beta\beta}^1 \vec{a}_1 + t_{\beta\beta}^2 \vec{a}_2 + t_{\beta\beta} \vec{a}, \\ \vec{v}_{,\alpha\beta} &= t_{\alpha\beta}^1 \vec{a}_1 + t_{\alpha\beta}^2 \vec{a}_2 + t_{\alpha\beta} \vec{a}, \end{aligned} \quad (6)$$

где многочлены $t_{\alpha}^1, t_{\alpha}^2, t_{\alpha}, t_{\beta}^1, t_{\beta}^2, t_{\beta}$ содержат компоненты вектора перемещения и их первые производные, а $t_{\alpha\alpha}^1, t_{\alpha\alpha}^2, t_{\alpha\alpha}, t_{\beta\beta}^1, t_{\beta\beta}^2, t_{\beta\beta}, t_{\alpha\beta}^1, t_{\alpha\beta}^2, t_{\alpha\beta}$ включают и вторые производные компонент вектора перемещения.

Столбец $\{\vec{v}_y^\Gamma\}$ с учетом (6) может быть представлен матричным произведением

$$\{\vec{v}_y^\Gamma\}_{9 \times 1} = \begin{bmatrix} \vec{A} \end{bmatrix}_{9 \times 27} \{m_y\}_{27 \times 1}, \quad (7)$$

где $\{m_y\}_{1 \times 27}^T = \{v^{1i}v^{2i}v^i v^{1j}v^{2j}v^j v^{1k}v^{2k}v^k t_\alpha^{1i}t_\alpha^{2i}t_\alpha^i t_\alpha^{1j}t_\alpha^{2j}t_\alpha^j t_\alpha^{1k}t_\alpha^{2k}t_\alpha^k t_\beta^{1i}t_\beta^{2i}t_\beta^i \dots t_\beta^k\}$; $\begin{bmatrix} \vec{A} \end{bmatrix}_{9 \times 27}$ — матрица вида

$\{\vec{a}^i\}$								
	$\{\vec{a}^j\}$							
		$\{\vec{a}^k\}$						
			$\{\vec{a}^i\}$					
				$\{\vec{a}^j\}$				
					$\{\vec{a}^k\}$			
						$\{\vec{a}^i\}$		
							$\{\vec{a}^j\}$	
								$\{\vec{a}^k\}$

Входящая в структуру матрицы $\begin{bmatrix} \vec{A} \end{bmatrix}$ подматрица $\{\vec{a}^m\}$ представляет собой матрицу-строку, содержащую узловые векторы локального базиса

$$\{\vec{a}^m\}_{1 \times 3} = \{\vec{a}_1^m \vec{a}_2^m \vec{a}^m\},$$

где индекс m обозначает узел треугольного конечного элемента i, j, k .

Столбец $\{m_y\}$ может быть выражен через стандартный столбец узловых варьируемых параметров в глобальной системе координат

$$\{m_y\}_{27 \times 1} = \begin{bmatrix} H \end{bmatrix}_{27 \times 27} \{U_y^\Gamma\}_{27 \times 1}, \quad (8)$$

где $\{U_y^\Gamma\}_{1 \times 27}^T = \left\{ \left\{ v_y^{1\Gamma} \right\}_{1 \times 9}^T \left\{ v_y^{2\Gamma} \right\}_{1 \times 9}^T \left\{ v_y^\Gamma \right\}_{1 \times 9}^T \right\}$; $\{q_y^\Gamma\}_{1 \times 9}^T = \{q^i q^j q^k q_{,\alpha}^i q_{,\alpha}^j q_{,\alpha}^k q_{,\beta}^i q_{,\beta}^j q_{,\beta}^k\}$.

Вектор перемещения внутренней точки срединной поверхности элемента (4) с учетом соотношений (5) и (8) запишется в виде

$$\vec{v} = \{\varphi\}^T \begin{bmatrix} L \end{bmatrix}_{9 \times 9} \begin{bmatrix} \vec{A} \end{bmatrix}_{9 \times 27} \begin{bmatrix} H \end{bmatrix}_{27 \times 27} \{U_y^\Gamma\} = \{\varphi\}^T \begin{bmatrix} \vec{A} \end{bmatrix}_{9 \times 27} \begin{bmatrix} G \end{bmatrix}_{27 \times 27} \begin{bmatrix} H \end{bmatrix}_{27 \times 27} \{U_y^\Gamma\}. \quad (9)$$

Здесь матрица $\begin{bmatrix} G \end{bmatrix}$ сформирована так, чтобы выполнялось равенство $\begin{bmatrix} L \end{bmatrix}_{9 \times 9} \begin{bmatrix} \vec{A} \end{bmatrix}_{9 \times 27} = \begin{bmatrix} \vec{A} \end{bmatrix}_{9 \times 27} \begin{bmatrix} G \end{bmatrix}_{27 \times 27}$,

что достигается без принципиальных затруднений.

Векторы \vec{a}_1 и \vec{a}_2 локального базиса произвольной точки срединной поверхности элемента являются касательными к срединной поверхности, а вектор \vec{a} направлен по нормали к ней. Векторы локальных базисов узловых точек \vec{a}_1^m , \vec{a}_2^m и \vec{a}^m выражаются через векторы локального базиса внутренней точки КЭ соотношениями

$$\vec{a}_1^i = b_{11}^i \vec{a}_1 + b_{12}^i \vec{a}_2 + b_{13}^i \vec{a},$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_2^i &= c_{11}^i \vec{a}_1 + c_{12}^i \vec{a}_2 + c_{13}^i \vec{a}, \\ \vec{a}^i &= d_{11}^i \vec{a}_1 + d_{12}^i \vec{a}_2 + d_{13}^i \vec{a}, \\ \vec{a}_1^j &= b_{11}^j \vec{a}_1 + b_{12}^j \vec{a}_2 + b_{13}^j \vec{a} \text{ и т. д.}\end{aligned}\quad (10)$$

С учетом (10) матрица $[\vec{A}]$ может быть представлена матричной суммой

$$[\vec{A}] = [\vec{a}_1 [A_1] + \vec{a}_2 [A_2] + \vec{a} [A_3]]. \quad (11)$$

Принимая во внимание (6) и (11), соотношение (9) запишем как

$$v^1 \vec{a}_1 + v^2 \vec{a}_2 + v \vec{a} = \{\varphi\}^T (\vec{a}_1 [A_1] + \vec{a}_2 [A_2] + \vec{a} [A_3]) [G] [H] \{U_y^\Gamma\}. \quad (12)$$

Из равенства (12) можно записать искомые интерполяционные выражения, например

$$v = \{\varphi\}^T [A_3] [G] [H] \{U_y^\Gamma\}. \quad (13)$$

В результате дифференцирования (4) по криволинейным координатам можно получить первые и вторые производные вектора перемещения, например

$$\vec{v}_{,\alpha} = \{\varphi_{,\alpha}\}^T \{\vec{v}_y^{\alpha 1}\}, \quad \vec{v}_{,\alpha\alpha} = \{\varphi_{,\alpha\alpha}\}^T \{\vec{v}_y^{\alpha 1}\}. \quad (14)$$

Из равенств (14) с учетом (5)–(11) можно получить интерполяционные формулы для многочленов $t_\alpha^1, t_\alpha^2, \dots, t_{\alpha\alpha}^1, t_{\beta\beta}^1, t_{\alpha\beta}^1$, в состав которых входят искомые первые и вторые производные компонент вектора перемещения, например

$$t_\alpha = \{\varphi_{,\alpha}\}^T [A_3] [G] [H] \{U_y^\Gamma\}, \quad t_{\alpha\alpha} = \{\varphi_{,\alpha\alpha}\}^T [A_3] [G] [H] \{U_y^\Gamma\}. \quad (15)$$

Таким образом, можно отметить, что при векторном способе интерполяции перемещений каждая компонента вектора перемещения зависит от полного набора узловых варьируемых параметров, в состав которого входят узловые значения всех его компонент. Вычислительный алгоритм также претерпевает существенные и принципиальные изменения. Вместо одного, по сути, оператора, реализующего общепринятую интерполяционную процедуру, в подпрограмму формирования матрицы жесткости КЭ включается целый блок векторной интерполяции перемещений. Причем данный блок присутствует как на этапе формирования матрицы жесткости КЭ, так и на этапе вычисления напряжений (для вычисления вторых производных нормальной компоненты вектора перемещения), т. е. дважды.

2. Численные расчеты

Высокая эффективность применения векторной интерполяции перемещений при использовании КЭ низкого порядка подтверждается решением ряда конкретных задач.

Пример 1. В качестве примера была решена задача по определению напряженно-деформированного состояния компенсатора, находящегося под воздействием внутреннего давления интенсивности q (рис. 1). Радиус вращения задавался в виде

$$r = A + B \cos(x/c).$$

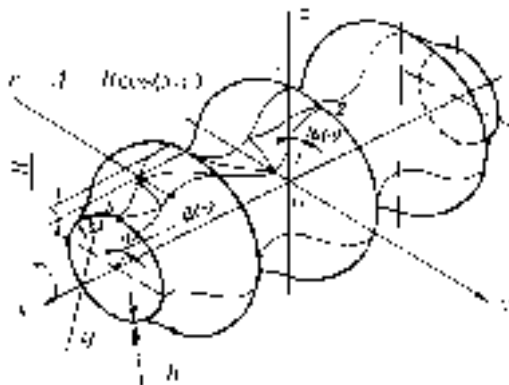


Рис. 1.

Вследствие наличия осевой симметрии для дискретизации оболочки использовалась одна полоска элементов, ориентированная вдоль меридиана. Первоначально были приняты следующие исходные данные: $q = 0.2$ МПа; $A = 1.3$ м; $B = 0.4$ м; $C = 0.48$ м; $t = 0.01$ м; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0.3$. Координата x изменялась в пределах $0 \leq x \leq 1.44\pi$ м.

Расчеты были выполнены в двух вариантах: в первом варианте при формировании матрицы жесткости треугольного конечного элемента размером 27×27 использовалась традиционная независимая интерполяционная процедура (2), (3); во втором варианте был реализован предложенный способ векторной интерполяции перемещений (13), (15). Результаты расчета представлены в табл. 1, где приведены величины кольцевых σ_k и меридиональных σ_m напряжений (в мегапаскалях) во внутренних волокнах оболочки (для точек 1, 2 рассчитываемой конструкции) в зависимости от густоты сетки дискретизации. Анализ результатов расчета показывает, что и в первом, и во втором варианте расчета наблюдается быстрая сходимость вычислительного процесса. Значения расчетных величин в точках 1, 2 компенсатора практически совпадают в обоих вариантах расчета (что и следовало ожидать при решении осесимметричной задачи).

Выбранная расчетная схема, при которой край оболочки (точки 1, 2 на рис. 1) остается свободным, позволяет сравнить полученное численное значение меридионального напряжения с точным, которое по физическим соображениям должно быть равно нулю. Из табл. 1 видно, что в обоих вариантах расчета контролируемое напряжение σ_m близко к нулю.

Если частоту волн компенсатора увеличить, например, в 2.67 раза ($c = 0.18$ м, $0 \leq x \leq 0.54\pi$ м), то градиенты кривизны срединной поверхности компенсатора в меридиональном направлении существенно возрастут. Результаты расчета оболочки при вышеупомянутом изменении исходных данных представлены в табл. 2. Анализ конечно-элементных решений показывает, что результаты расчета по вариантам принципиально различаются (в отличие

Т а б л и ц а 1

Точка	Напряжение	Вариант I			Вариант II		
		2×13	2×25	2×49	2×13	2×25	2×49
1	σ_k	18.20	17.51	17.52	17.35	17.56	17.52
	σ_m	1.008	-0.042	-0.080	0.472	0.095	-0.067
2	σ_k	18.20	17.51	17.52	17.33	17.55	17.52
	σ_m	1.008	-0.042	-0.080	0.466	0.091	-0.067

от табл. 1).

Как видно из табл. 2, сходимость вычислительного процесса в первом варианте практически отсутствует. Контролируемое напряжение σ_m на краю оболочки остается весьма далеким от нуля, несмотря на достаточно густую сетку элементов дискретизации (216 КЭ) рассчитываемой конструкции. И, напротив, во втором варианте наблюдается быстрая сходимость вычислительного процесса при относительно редкой сетке конечных элементов (по сравнению с первым вариантом расчета). Меридиональное напряжение σ_m близко к нулевому значению.

В правой крайней колонке таблицы приведены результаты расчета компенсатора, полученные при использовании в качестве элемента дискретизации высокоточного четырехугольного конечного элемента с размером матрицы жесткости 72×72 [7]. Алгоритм формирования матрицы жесткости четырехугольного конечного элемента также включал процедуру векторной интерполяции перемещений.

Сравнительный анализ конечно-элементных решений второго варианта расчета и результатов, представленных в крайней правой колонке, показывает, что численные значения контролируемых параметров напряженно-деформированного состояния компенсатора практически совпадают, что также подтверждает достоверность результатов численного анализа оболочки во втором варианте расчета.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что векторная интерполяция перемещений в треугольном конечном элементе позволяет кардинально повысить эффективность использования данного типа элемента при расчете оболочек сложной геометрии со значительными градиентами кривизны срединной поверхности. Применение треугольных дискретных элементов со стандартной интерполяционной процедурой к решению данного типа задач не приводит к получению приемлемых по точности результатов.

Пример 2. В качестве примера была рассчитана цилиндрическая оболочка, загруженная вдоль образующей равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q . На диаметрально противоположной образующей цилиндра относительно приложения нагрузки q оболочка имеет пружинные опоры с переменной жесткостью, позволяющие смещаться ей вертикально вниз как абсолютно твердому телу (рис. 2).

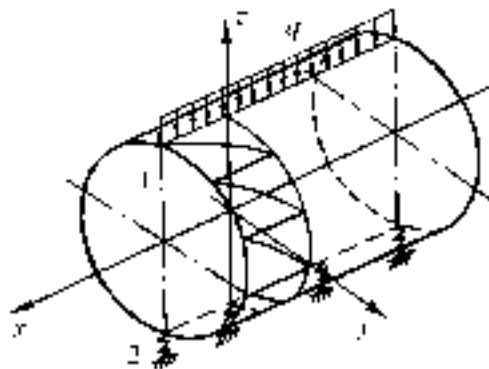


Рис. 2.

Т а б л и ц а 2

Точка	Напряжение	Вариант I						Вариант II				Высокоточный четырёхугольный КЭ с размером матрицы жесткости 72×72 [7]
		2×19	2×31	2×37	2×55	2×73	2×109	2×19	2×31	2×37	2×55	
1	σ_K	7.24	-102.4	-97.5	-49.86	-21.26	-0.24	10.77	11.47	11.57	11.60	11.41
	σ_M	73.03	-345.6	-343.3	-191.8	-103.0	-36.55	-2.19	-0.81	-0.45	-0.12	0.049
2	σ_K	7.14	-102.9	-98.1	-50.49	-21.78	-0.58	10.75	11.45	11.55	11.57	11.41
	σ_M	72.81	-346.0	-343.6	-191.7	-101.6	-36.09	-2.20	-0.82	-0.46	-0.135	0.049

Т а б л и ц а 3

Смещения оболочки как жесткого тела, м	Вариант I		Вариант II	
	σ_1^{BH} , Н/м ²	σ_2^{BH} , Н/м ²	$\sigma_1^{нар}$, Н/м ²	σ_2^{BH} , Н/м ²
0	$194.8 \cdot 10^4$	$194.4 \cdot 10^4$	$-195.2 \cdot 10^4$	$-195.2 \cdot 10^4$
0.01	$233.8 \cdot 10^4$	$154.2 \cdot 10^4$	$-195.2 \cdot 10^4$	$-195.2 \cdot 10^4$
0.05	$385.4 \cdot 10^4$	$-1.83 \cdot 10^4$	$-195.2 \cdot 10^4$	$-195.2 \cdot 10^4$
0.10	$565.5 \cdot 10^4$	$-187.2 \cdot 10^4$	$-195.2 \cdot 10^4$	$-195.2 \cdot 10^4$

Были приняты следующие исходные данные: радиус цилиндра $r = 0.1$ м; толщина оболочки $t = 0.001$ м; модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м²; коэффициент Пуассона $\nu = 0$; интенсивность равномерно распределенной линейной нагрузки $q = 10$ Н/м.

Расчеты были выполнены также в двух вариантах: в первом при формировании матрицы жесткости треугольного конечного элемента 27×27 применялась традиционная независимая процедура (2), (3); во втором варианте расчета была реализована аппроксимация полей векторов перемещений (4)–(15). Результаты расчетов оболочки представлены в табл. 3, где приведены численные значения кольцевых напряжений при сетке узлов 2×19 в зависимости от величины смещения цилиндра как абсолютно жесткого тела. Как видно, результаты расчетов по вариантам существенно отличаются друг от друга. Если во втором варианте кольцевые напряжения в наружных волокнах оболочки в точках 1 и 2 остаются неизменными, то в первом варианте погрешность вычисления кольцевых напряжений во внутренних волокнах оболочки в наблюдаемых точках с увеличением смещения цилиндра как абсолютно твердого тела стремительно нарастает до совершенно неприемлемых значений. Даже при отсутствии жесткого смещения ($v = 0$) напряжения в точках 1 и 2 различаются на $0.4 \cdot 10^4$ Н/м², хотя при выбранной расчетной схеме они должны полностью совпадать (что наблюдается во втором варианте расчета).

Таким образом, можно сделать вывод, что предложенная интерполяция полей векторов перемещений треугольного дискретного элемента с размером матрицы жесткости 27×27 позволяет в неявном виде корректным образом в полной мере учесть смещения конечного элемента как жесткого тела.

Список литературы

- [1] Голованов А.И., Корнишин М.С. Введение в метод конечного элемента статики тонких оболочек. Казань, 1990. 269 с.
- [2] Хечумов Р.А., Кепплер Х., Прокофьев В.Н. Применение метода конечных элементов к расчету конструкций. М.: Изд-во АСВ, 1994. 351 с.
- [3] Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 542 с.
- [4] Секулович М. Метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1993. 645 с.
- [5] Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 432 с.
- [6] Черных К.Ф. Линейная теория оболочек. Л.: Изд-во ЛГУ, 1962. Т. 1. 374 с. (1964. Т. 2. 395 с.).
- [7] Клочков Ю.В., Николаев А.П., Киселев А.П. Применение четырехугольного элемента с матрицей жесткости 72×72 для расчета оболочечных конструкций // Изв. вузов. Сер. Строительство. 1998. № 4–5. С. 36–41.
- [8] Клочков Ю.В., Николаев А.П., Киселев А.П. О функциях формы в алгоритмах формирования матриц жесткости треугольных конечных элементов // Изв. вузов. Сер. Строительство. 1999. № 10. С. 23–27.

*Поступила в редакцию 25 февраля 2004 г.,
в переработанном виде — 16 августа 2004 г.*