

# О структуре автоматов, сохраняющих поведение при перебросках дуг

О. М. Копытова

Донецкий национальный технический университет

*Аннотация.* Автоматы, являющиеся "неисправностями" некоторого автомата-эталона, во многих случаях можно описать как результат переброски группы дуг в эталоне. При этом возможны случаи, когда поведение "неисправного" автомата не изменяется по сравнению с эталоном (не обнаруживаемые по внешнему поведению "неисправности"). Описаны структура автомата и условия переброски дуг, при которых поведение "неисправного" автомата остается эквивалентным поведению эталона.

*Введение.* Современные информационные технологии опираются в значительной степени на теоретический фундамент дискретной математики и математической кибернетики. Одной из базовых математических моделей этих теорий является модель конечного автомата. Эта модель полезна при описании информационного взаимодействия объектов различной природы, начиная от технических, связанных с задачами построения управляющих систем, и заканчивая такими, как социальные группы, которые взаимодействуют между собою, обмениваясь информацией в зависимости от их состояния и влияния внешней среды. Возникают модели поведения таких объектов, основными характеристиками которых являются понятия состояния, входного стимула и реакции на него. Сложные системы, исследуемые на протяжении своего жизненного цикла, могут изменять свою структуру под действием среды. При этом поведение новой системы может либо отличаться от поведения старой, либо оставаться без изменения, несмотря на то, что структура системы изменилась. Условия, при которых сохраняется поведение системы, определенным образом характеризует ее стойкость к деформирующим воздействиям внешней среды. Таким образом, возникает задача изучения таких структурных изменений, при которых поведение новой системы не изменяется по сравнению со старой. Формализация соответствующей задачи может быть выполнена в рамках теории автоматов. Исследования поведения автоматов, которые порождаются один из другого с помощью перебросок дуг, имеют уже достаточно давнюю историю. Однако, полученные до этого времени результаты не позволяют утверждать, что эта задача хорошо изучена. В основном она рассматривалась в рамках теории экспериментов с автоматами [1]. Родственные задачи рассматривались в теории графов, где изучалась задача трансформации одного графа (автомата) в другой с помощью некоторой последовательности перебросок дуг [2]. Влияние перебросок дуг на поведение автомата изучалось

позднее в работе [3]. Было доказано, что переброска только одной дуги в приведенном автомате всегда вызывает изменение поведения – автомат становится неэквивалентным исходному приведенному автомату. В настоящей работе доказано, что переброска уже двух дуг принципиально меняет ситуацию.

*Формальная постановка задачи.* Основные определения теории автоматов можно найти в [1]. Под автоматом будем понимать автомат Мили  $A = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ , где  $A, X, Y$  – алфавиты состояний, входов и выходов соответственно, а  $\delta, \lambda$  – функции переходов и выходов, в общем случае, частичные. Как обычно, будем обозначать автомат символом множества его состояний. В дальнейшем, если не оговорено противное, рассматриваются автоматы, у которых области определения функций переходов и выходов совпадают. Автомат  $A$  будем рассматривать также как множество дуг, где дуга – это четверка  $(s, x, y, t)$ , если  $\delta(s, x) = t, \lambda(s, x) = y$ .

Два состояния  $a$  и  $b$  одного и того же автомата  $A$  или двух разных автоматов, соответственно  $A$  и  $B$ , называются эквивалентными, если для всякого входного слова  $p \in X^*$  выполняется  $\lambda(a, p) = \lambda'(b, p)$ , где  $\lambda'$  – функция выходов автомата  $A$  или  $B$  [1]. Автомат называется приведенным, если все его состояния попарно неэквивалентны [1].

В дальнейшем будем рассматривать автоматы  $A$  и  $B$ , у которых входные и выходные алфавиты совпадают, то есть  $A = (A, X, Y, \delta, \lambda)$  и  $B = (B, X, Y, \delta', \lambda')$ . В этом случае, как обычно, отображение  $\tau : A \rightarrow B$  будет называться гомоморфизмом автомата  $A$  в автомат  $B$ , если для любых  $a \in A$  и  $x \in X$  :

- 1)  $\tau(\delta(a, x)) = \delta'(\tau(a), x)$ ;
- 2)  $\lambda(a, x) = \lambda'(\tau(a), x)$ .

Гомоморфизм  $\tau$  называется изоморфизмом, если  $\tau$  – взаимно однозначный гомоморфизм [1].

Пусть  $A = (A, X, Y, \delta, \lambda)$  – приведенный автомат. Пусть также автомат  $B$  является результатом переброски некоторых двух дуг в автомате  $A$ : например, дуга  $(s, x, y, s_1)$  перебрасывается в состояние  $s_2$ , то есть заменяется дугой  $(s, x, y, s_2)$ , а дуга  $(t, x', y', t_1)$  перебрасывается в состояние  $t_2$ , то есть заменяется дугой  $(t, x', y', t_2)$ .

Задача заключается в том, чтобы определить условия, при которых автомат  $B$  остается изоморфным заданному автомату  $A$ .

*Пример сохранения поведения.* Легко привести примеры, когда результатом переброски в автомате двух дуг является новый автомат, не изоморфный исходному.

Рассмотрим противоположный пример – когда переброска двух дуг в приведенном автомате приводит к автомату, изоморфному заданному.

Пусть автомат  $A$  задается таблицей:

$$\begin{aligned} \delta(1, 0) &= s; \lambda(1, 0) = 0; \delta(1, 1) = 2; \lambda(1, 1) = 0; \\ \delta(2, 0) &= t; \lambda(2, 0) = 0; \delta(2, 1) = 1; \lambda(2, 1) = 0; \\ \delta(s, 0) &= 3; \lambda(s, 0) = 0; \delta(s, 1) = 4; \lambda(s, 1) = 0; \\ \delta(t, 0) &= 3; \lambda(t, 0) = 0; \delta(t, 1) = 3; \lambda(t, 1) = 0; \\ \delta(3, 0) &= 3; \lambda(3, 0) = 1; \delta(3, 1) = 3; \lambda(3, 1) = 0; \\ \delta(4, 0) &= 4; \lambda(4, 0) = 1; \delta(4, 1) = 4; \lambda(4, 1) = 1, \end{aligned}$$

а автомат  $B$  является результатом переброски двух дуг в автомате  $A$ : дуга  $(s, 1, 0, 4)$  перебрасывается в состояние 3, то есть заменяется дугой  $(s, 1, 0, 3)$ , а дуга  $(t, 1, 0, 3)$  перебрасывается в состояние 4, то есть заменяется дугой  $(t, 1, 0, 4)$ . Легко видеть, что отображение  $\tau : A \rightarrow B$ , такое, что:  $\tau(1) = 2; \tau(2) = 1; \tau(s) = t; \tau(t) = s; \tau(3) = 3; \tau(4) = 4$ , реализует изоморфизм автомата  $A$  на автомат  $B$ , т.е. автомат  $B$  также приведен и эквивалентен автомату  $A$ .

Отметим особенности структуры автомата  $A$ . В нем есть два неэквивалентных состояния 3 и 4, в которые направлены из двух разных состояний  $s$  и  $t$  перебрасываемые дуги. Из состояний 3 и 4 состояния  $s$  и  $t$  не достижимы. Те состояния, из которых достигаются  $s$  и  $t$ , можно разбить на такие пары, из которых состояния  $s$  и  $t$  достигаются по одинаковым словам. Этим словам отвечают такие последовательности дуг графа переходов, в которых не содержатся перебрасываемые дуги. Элементы всех таких пар, включая  $s$  и  $t$ , отображаются  $\tau$  друг в друга. Другие состояния отображаются сами в себя.

Подобные особенности структуры сформулируем далее как условия, при которых переброска двух дуг не изменяет поведения автомата.

*Условия сохранения поведения.* Пусть  $A = (A, X, Y, \delta, \lambda)$  – приведенный автомат. Через  $K(A)$  обозначим множество всех его состояний, которые входят в сильно связанные подавтоматы автомата  $A$ .

Допустим, что  $s$  и  $t$  – такие состояния автомата  $A$ , которые не принадлежат  $K(A)$  и удовлетворяют следующим условиям:

- 1) для каждого входного символа  $x \in X$  выполняется равенство  $\lambda(s, x) = \lambda(t, x)$ ;
- 2) существует входной символ  $x' \in X$ , для которого  $\delta(s, x')$  и  $\delta(t, x')$  – разные и принадлежат  $K(A)$ ;
- 3) для всех других входных символов  $x \neq x'$ , если  $\delta(s, x) = \delta(t, x)$ , то  $\delta(s, x)$  принадлежит  $K(A)$ ;
- 4) если  $x \neq x'$  и  $\delta(s, x) \neq \delta(t, x)$ , то либо одновременно выполняются равенства  $\delta(s, x) = t$  и  $\delta(t, x) = s$ , либо одновременно  $\delta(s, x) = s$  и  $\delta(t, x) = t$ .

Такие состояния  $s$  и  $t$  назовем перспективными, а дуги  $(s, x', y, s_1), (t, x', y, t_1)$  назовем выделенными дугами перспективных состояний, где  $y = \lambda(s, x')$ ,  $s_1 = \delta(s, x')$ ,  $t_1 = \delta(t, x')$ .

Состояниям  $s$  и  $t$  поставим в соответствие множество состояний  $\Phi$ , из которых можно достичь или  $s$  или  $t$ . Будем считать, что  $s, t \in \Phi$ .

Назовем пару перспективных состояний  $s$  и  $t$  допустимой, если соответствующее им множество  $\Phi$  можно разбить на такие два равномоощных непересекающихся подмножества  $\Phi_s$  и  $\Phi_t$ , для которых  $s \in \Phi_s, t \in \Phi_t$  и существует взаимно однозначное отображение  $\varphi : \Phi_s \leftrightarrow \Phi_t$ , удовлетворяющее условиям:

- 1) для каждого  $r_s \in \Phi_s$  существует  $r_t \in \Phi_t$  такое, что  $\varphi(r_s) = r_t$  и наоборот, для каждого  $r_t \in \Phi_t$  существует  $r_s \in \Phi_s$  такое, что  $\varphi(r_t) = r_s$ , причем  $\varphi(s) = t, \varphi(t) = s$ ;
- 2) для каждого  $r \in \Phi_a$ , где  $a = s$  или  $a = t$ , и каждого входного слова  $p$  выполняется: если  $\delta(r, p) = a'$ , где  $a' = s$  или  $a' = t$ , то  $\delta(\varphi(r), p) = \varphi(a')$  и  $\lambda(r, p) = \lambda(\varphi(r), p)$ .

Каждому входному слову  $p$  и состоянию  $a \in A$  в графе переходов автомата  $A$  отвечает путь, который начинается в состоянии  $a$  и включает некоторое множество дуг  $U_p$  графа переходов. Будем говорить, что дуга  $u \in U_p$  покрывается словом  $p$  из состояния  $a$ .

Из определений перспективных и допустимых состояний вытекают два утверждения.

**Утверждение 1.**  $\Phi_a \cap K(A) = \emptyset$ , если  $a$  – одно из перспективных состояний.

Действительно,  $a$  не принадлежит  $K(A)$  по определению. Если же  $r \in \Phi_a \cap K(A)$ , то  $r \in K(A)$ , и тогда все состояния, которые можно достичь из состояния  $r$ , также принадлежат  $K(A)$ . По определению  $\Phi_a$  состояние  $a$  может быть достигнуто из  $r$ , но состояние  $a$  не принадлежит  $K(A)$ , то есть получили противоречие.

**Утверждение 2.** Если  $s$  и  $t$  – пара перспективных допустимых состояний с выделенными дугами  $u_s = (s, x', y, s_1)$  и  $u_t = (t, x', y, t_1)$ , и  $a = s$  или  $a = t$ , то для каждого входного слова  $p$ , которое не покрывает из состояния  $r \in \Phi$  выделенную дугу  $u_a$ , для состояния  $b = \varphi(a)$  слово  $p$  не покрывает выделенную дугу  $u_b$  из состояния  $\varphi(r) \in \Phi$ , причем  $\lambda(r, p) = \lambda(\varphi(r), p)$ .

Это утверждение вытекает из определения перспективной допустимой пары.

Обозначим через  $A(u_s, r_s, u_t, r_t)$  автомат, который является результатом переброски в автомате  $A$  двух дуг: дуги  $u_s = (s, x', y, s_1)$  в состояние  $r_s$  и дуги  $u_t = (t, x', y, t_1)$  в состояние  $r_t$ .

**Теорема (о переброске двух дуг).** Если  $s$  и  $t$  – пара перспективных допустимых состояний с выделенными дугами  $u_s = (s, x', y, s_1)$  и  $u_t = (t, x', y, t_1)$ , то автомат  $B = A(u_s, t_1, u_t, s_1)$  является изоморфным заданному автомату  $A$ .

Доказательство. Построим отображение  $\tau : A \leftrightarrow B$  следующим образом. Если состояние  $a$  автомата  $A$  принадлежит множеству  $K(A)$ , то положим  $\tau(a) = a$ , а если  $a$  принадлежит множеству  $\Phi$ , то положим  $\tau(a) = \varphi(a)$ .

Из утверждения 1 и определения  $\varphi$  вытекает, что  $\tau$  является взаимно однозначным отображением.

Из определения  $\varphi$ , утверждения 2 и определения переброски дуг вытекает, что состояния  $r \in \Phi$  и  $\varphi(r) \in \Phi$  эквивалентны. Действительно, пусть  $\lambda(r, p) = q$ . Возможны два случая:

1) слово  $p$  не покрывает выделенной дуги  $u_a$ , где  $a = s$  или  $a = t$ . Тогда по утверждению 2 оно не покрывает выделенной дуги  $u_b$ , где  $b = \varphi(a)$ , и при этом  $\lambda(\varphi(a), p) = q$ ;

2) слово  $p$  покрывает дугу  $u_a$  в автомате  $A$ . Тогда  $p$  можно представить как  $p = p_a p'$ , где  $p_a$  не покрывает выделенной дуги  $u_a$ ,  $\delta(r, p_a) = a$ , а в слове  $p'$  первый символ  $x'$  покрывает дугу  $u_a$ . По построению автомата  $B$  слово  $p$  покрывает дугу  $u_b$ , где  $b = \varphi(a)$  в автомате  $B$ . По определению отображению  $\varphi$   $p = p_b p'$ ,  $p_b = p_a$ ,  $\delta_B(\varphi(r), p_b) = b$ . Из утверждения 2 вытекает, что  $\lambda(r, p_a) = \lambda(\varphi(r), p_b)$ . Переброска дуги  $u_a$  выполнена таким образом, что  $\delta(a, x') = \delta_B(\varphi(a), x')$ . Ввиду того, что  $\lambda(a, x') = \lambda_B(\varphi(a), x')$ , получаем, что  $\lambda_B(r, p) = q$ .

Таким образом, состояние  $r$  автомата  $A$  и состояние  $\varphi(r)$  автомата  $B$  являются эквивалентными. Теорема доказана.

*Заключение.* Приведенные достаточные условия показывают, что структура автоматов, которые сохраняют свое поведение при переброске двух дуг, является достаточно специфической. Приведенная структура может служить элементарной составляющей при построении автоматов, которые выдерживают произвольное число перебросок. Используя описанную конструкцию, можно доказать справедливость следующего утверждения.

**Утверждение 3.** *Для любого натурального  $k > 1$  существует приведенный автомат, в котором найдется подмножество из  $k$  дуг, одновременная переброска которых приводит к изоморфному автомату.*

## Список литературы

- [1] В. Б. Кудрявцев, С. В. Алешин, А. С. Подколзин. Введение в теория автоматов. – М.:Наука, 1985. – 320 с. .
- [2] В. А. Козловский. О классе графов, порожденных локальными преобразованиями заданного графа. // Методы и системы технической диагностики. – Саратов: Изд-во Саратов. Ун-та. – 1985. – Вып.5. – С. 65–70.
- [3] И. С. Грунский, О. М. Копытова. О структуре контрольного эксперимента для определенно-диагностируемого автомата. // Теория управляющих систем.– К.: Наук.думка, 1987. – С.40–54.