УДК 519.7

©2008. **В.А. Козловский, О.М. Копытова**

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АВТОМАТОВ В ЛОКАЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ КЛАССАХ

Найдены достаточные, а при дополнительных ограничениях и необходимые условия, при которых частичные автоматы являются представлениями автоматов относительно введенных локально определенных классов автоматов, полученных из эталона некоторыми перебросками дуг. Для таких представлений получены неулучшаемые для n-плотных классов автоматов оценки сложности представлений автоматов. Для их частных случаев – кратчайших простых контрольных экспериментов, показано, что длина последних отличается от длины кратчайших обходов ровно на единицу.

Введение. Контрольные эксперименты с автоматами [1] обычно изучаются для достаточно обширных классов автоматов. На уровне абстрактного автомата большинство таких классов можно рассматривать как результат последовательности специальных преобразований множества дуг автомата-эталона типа переброски дуг – замены конца одной из дуг графа переходов автомата другим состоянием, или замены в отметке дуги одного выходного символа другим. В [2] рассматривались так называемые m-плотные классы, охватывающие широкий круг классов автоматов, возникающих при произвольных перебросках дуг или изменении их отметок, возможно, даже с увеличением числа состояний. Для таких классов необходимым условием, при котором эксперимент становится контрольным, является обход по всем дугам графа переходов автомата-эталона. Однако это условие обычно не является достаточным, что является одной из причин высокой сложности задачи распознавания свойства "быть контрольным экспериментом" относительно этих классов (в ряде случаев это NP-полная проблема [3]). Исключением является класс локально порожденных из эталона автоматов [4], для которого, при наложении ограничений на поведение эталона, минимальный контрольный эксперимент "почти" совпадает с обходом по всем дугам автомата-эталона. Это сразу же определяет и полиномиальность указанной задачи распознавания в этом случае. Поэтому интерес представляет поиск достаточно разнообразных по своему составу классов, для которых "почти" обходы определяют контрольные эксперименты. "Почти" обходы характеризуются наименьшей сложностью среди контрольных экспериментов относительно m-плотных классов, то есть, в них прообраз каждой дуги исходного автомата встречается минимально возможное число раз. Стоит заметить,что, например, в родственной задаче тестирования программных систем на основе графовых моделей чаще всего ограничиваются построением обхода по дугам соответствующих графов, хотя обход есть лишь необходимое условие для полноты проверки. В работе рассматриваются обобщения контрольных экспериментов – представления минимальной сложности для автоматов [3] относительно так называемых локально определенных классов [5]. Показывается, что в этом случае необходимое условие обхода при некоторых дополнительных предположениях является также и достаточным.

1. Автоматы и представления. Под автоматом будем понимать автомат Мили $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$, где S, X, Y – алфавиты состояний, входов и выходов соответственно, а δ, λ – функции переходов и выходов, в общем случае, частичные. В дальнейшем, если не оговорено противное, рассматриваются автоматы, у которых области определения функций переходов и выходов совпадают. Функции автомата обычным образом распространяются на множество X^*. Будем говорить, что вход-выходное слово $w = (p, q)$ порождается состоянием s автомата A, если $\lambda(s, p) = q$. С каждым состоянием s ассоциируется множество λ_s всех вход-выходных слов, порождаемых этим состоянием. Автомат A удобно задавать в виде графа переходов, вершинами которого являются состояния из S, а дугами – четверки $(s, x, y, t) = u$, где $\delta(s, x) = t$, $\lambda(s, x) = y$. Пара (x, y) называется отметкой дуги u, s – ее началом, а t – концом. В дальнейшем будем отождествлять автомат A со множеством всех дуг его графа и писать $u \in A$, если u есть дуга автомата A. Множество всех дуг автомата будем обозначать также как U_A. Если не оговорено противное, считаем, что автомат имеет хотя бы одну дугу. Состояние t называется достижимым из s, если $t \in \delta(s, p)$ для некоторого $p \in X^*$. Автомат называется сильно связным, если его граф переходов сильно связен. Состояние s называется преходящим в A, если s не является концом ни одной дуги автомата A, и висячим, если s не является началом ни одной дуги. Автомат, граф переходов которого не имеет циклов, назовем ацикличным. Если необходимо, алфавиты и функции автомата будем снабжать индексами.

Множество W вход-выходных слов назовем экспериментом автомата A, если $W \subseteq \lambda_s$ для некоторого состояния s автомата A. Эксперимент W называется простым, если он состоит из одного вход-выходного слова, и кратным в противном случае. Обозначим Φ_A множество экспериментов автомата A, $l(w)$ – длину слова $w \in \lambda_s$, λ_s^i – множество всех вход-выходных слов длины i, порождаемых состоянием s. Эксперимент определяет множество путей в графе переходов автомата из состояния s, и если оно содержит (покрывает) все множество дуг графа переходов, то эксперимент называем обходом автомата из состояния s.

Пусть F – некоторый класс автоматов. Эксперимент $W \in \Phi_A$ называется контрольным для (A, F), если из того, что $W \in \Phi_B$, $B \in F$, следует, что B содержит подавтомат, эквивалентный A. Обычно класс F выбирается так, что вместо эквивалентности рассматривается изоморфизм. Контрольные эксперименты являются частным случаем представлений автоматов [3]. Приведем один из вариантов определения представлений.

Пусть $A = (S, X, Y, \delta_A, \lambda_A)$ и $B = (T, X, Y, \delta_B, \lambda_B)$ – некоторые автоматы. Гомоморфизмом автомата A в автомат B называется такое отображение множества S во множество T , для которого, если дуга $u = (s_1, x, y, s_2)$ принадлежит автомату A, то дуга $v = (\varphi(s_1), x, y, \varphi(s_2))$ принадлежит B. Гомоморфизм φ индуцирует, таким образом, отображение множества дуг автомата A во множество дуг автомата B, которое будем обозначать тем же символом φ, и писать в этом случае $\varphi(u) = v$. Гомоморфизм называем полным, если всякая дуга автомата B имеет прообраз в автомате A. В этом случае B называем гомоморфным образом A по φ, что обозначаем равенством $B = \varphi(A)$. Полный изоморфизм обозначаем равенством $A = B$, а наличие гомоморфизма A в B – неравенством $A \leq B$.

Фрагментом автомата A называется всякий (частичный) автомат R, гомоморфно отображающийся в A [3]. Фрагмент автомата A назовем полным, если при любом его гомоморфизме в этот автомат каждая дуга автомата A имеет прообраз в R, то есть, любой гомоморфизм R в A полный. Эксперимент W можно понимать как частный случай фрагмента автомата, частичный автомат R_W, граф переходов которого является ориентированным корневым деревом.

Пусть заданы класс F, автомат-эталон A и τ – бинарное отношение подобия автоматов, которое определяет точность, необходимую при различении. Автомат R (в общем случае частичный) называется представлением эталона A относительно F с точностью τ, если R является таким фрагментом эталона A, что из $R \leq B$ следует, что $B \in \tau(A)$ для любого $B \in F$. Далее рассматриваем случай, когда точность является изоморфизмом. Множество всех представлений автомата A относительно класса F обозначим как $\mathbf{R}(A, F)$.

Пусть задан автомат Мили A из некоторого подкласса F n-полного класса F_n всех автоматов с n состояниями и R – фрагмент автомата A. Фрагмент R может быть фрагментом и некоторого другого автомата $B \in F$. Одна из основных задач теории представлений состоит в том, чтобы указать такие условия, при которых A будет единственным (с точностью до изоморфизма) в классе F автоматом, для которого R является фрагментом, т.е. необходимые и достаточные условия, при которых R есть представление автомата A относительно класса F. Эту задачу назовем задачей характеризации представлений автомата относительно заданного класса. Решение задачи характеризации часто позволяет оценить и сложность решения следующей задачи, которую будем называть задачей распознавания представлений: предъявляется фрагмент R и автомат A из известного класса F; необходимо определить, является ли R представлением автомата A относительно класса F. Эти задачи рассматриваются и для случая, когда в качестве представления выступает контрольный эксперимент. Сложность задачи распознавания может служить косвенной оценкой сложности определения момента завершения построения представления (или контрольного эксперимента). Помимо этого, найденная характеризация позволяет в ряде случаев дать оценки сложности неизбыточных представлений (длины минимальных экспериментов).

Как упоминалось выше, большинство рассматриваемых классов неисправностей являются n-плотными классами для эталонов, где n – число состояний эталона. Их можно описать как такие, которые содержат автоматы, полученные из приведенного эталона A независимыми друг от друга перебросками дуг или изменениями отметок дуг. Это влечет для представлений необходимое условие полноты фрагмента. Точнее, пусть дуга $u \in A$, $u = (s, x, y, t)$, u'=(s, x, y', t'), причем $y' \neq y$ или $t' \neq t$. Обозначим $B(u, u')$ автомат, полученный из A заменой в нем дуги u дугой u'. Тогда n-плотным классом для автомата A назовем всякий класс $F_n(A)$ такой, что для любой дуги $u \in A$ в этом классе найдется автомат $B(u, u')$. Далее рассматриваем случай, когда одношаговая функция выходов λ сохраняется при перебросках дуг.

Утверждение 1. *Если A – приведенный автомат с n состояниями, то всякое его представление $R \in \boldsymbol{R}(A, F_n(A))$ является полным фрагментом автомата A.*

Доказательство. Пусть R – представление A относительно $F_n(A)$, и R не является полным фрагментом A, то есть, существует такой гомоморфизм φ R в A, что некоторая дуга u не имеет прообраза в R при этом гомоморфизме. Так как $A - \{u\}{=}B(u, u') - \{u'\}$, то φ есть также гомоморфизм R в $B(u, u')$, то есть R есть фрагмент $B(u, u')$. Но по модифицированной лемме о переброске дуги [3] автомат B не изоморфен A, что противоречит тому, что R есть представление автомата A относительно класса $F_n(A)$. □

2. Локально определенные классы. Каждой паре $(s, x) \in S \times X$ автомата A поставим в соответствие некоторое множество состояний $O(s, x)$, полагая при этом, что состояния s и $\delta(s, x)$ принадлежат $O(s, x)$. Обозначим совокупность таких множеств, соответствующих всевозможным парам $(s, x) \in S \times X$, через $O(A)$ и назовем ее локализацией A. Локально определенным (посредством локализации $O(A)$) классом назовем класс $LO(A)$ всех автоматов, полученных из автомата A заменой в нем некоторой дуги (s, x, y, t) дугой (s, x, y, r), где $r \in O(s, x)$, или множеством таких замен. Из определения класса $LO(A)$ следует, что он является n-плотным для A при условии, что каждое множество из локализации $O(A)$ содержит хотя бы два состояния. Далее для простоты будем полагать, что это условие для рассматриваемых локализаций выполняется.

Пусть R – фрагмент A, φ – некоторый гомоморфизм R в A. Дугу $u{=}(s, x, y, t) \in A$ назовем подтвержденной во фрагменте R при гомоморфизме φ, если во множестве ее прообразов $\varphi^{-1}(u)$ найдется хотя бы одна дуга, конечная вершина которой не является висячей. Такую дугу назовем подтвержденной в R, если она является подтвержденной при любом гомоморфизме R в A.

Локально диагностируемым (по локализации $O(A)$) назовем автомат, в котором для любой пары $(s, x) \in S \times X$ и для любых различных $r, t \in O(s, x)$ верно неравенство $\lambda(r, x') \neq \lambda(t, x')$ для любого $x' \in X$. Заметим, что в общем случае, как показывают примеры, локально диагностируемый автомат может быть неприведенным.

Замечание. Для локально диагностируемого автомата A (по локализации $O(A)$) утверждение 1 остается справедливым и без требования приведенности эталона.

Действительно, в этом случае остается справедливой лемма о переброске дуги. Переброска дуги (s, x, y, t) в одно из состояний $r \in O(s, x)$ преобразует локально диагностируемый автомат A в некоторый автомат B. Так как при переброске одной дуги только для состояния s меняется множество λ_s^2, а остальные автоматные отображения высоты 2 остаются без изменений, то в автомате B число состояний, 2-эквивалентных состоянию s, на единицу меньше, чем в исходном автомате A. Поэтому A и B не изоморфны, что оставляет справедливым доказательство утверждения 1 и в этом случае.

Далее нам понадобится понятие начального идентификатора состояния [3]. Начальным идентификатором состояния s называется такое порождаемое им множество I_s вход-выходных слов, которое не порождается никаким другим состоянием автомата. Высота идентификатора есть наибольшая из длин входящих в него слов. Если идентификатор состоит из одного слова, он называется простым. Множество всех состояний автомата A, имеющих начальные идентификаторы высоты 1, обозначим как S_A^1, множество всех начальных идентификаторов автомата высоты 1 – как I_A^1.

Далее полагаем, что автомат-эталон A имеет непустое множество S_A^1, и все состояния автомата-эталона достижимы из состояний этого множества.

Пусть во фрагменте $R \leq A$ для любого состояния $s \in S_A^1$ найдется хотя бы одно такое состояние r, что порожденное этим состоянием множество вход-выходных слов длины 1 содержит хотя бы один начальный идентификатор высоты 1 состояния s. Множество всех таких состояний фрагмента R обозначим S_R^1.

Лемма 1. *Пусть φ – гомоморфизм R в A, ψ – гомоморфизм R в $B \in LO(A)$, состояние $r \in S_R^1$. Если для входного слова px $x \in X$, p не пустое слово, $\delta_R(r, px)$ определено, то $\varphi(\delta_R(r,p))=\psi(\delta_R(r,p))$.*

Доказательство. Так как переброска дуг сохраняет все эксперименты высоты 1, то множество начальных идентификаторов высоты 1 при перебросках дуг также сохраняется. Поэтому в автомате-эталоне и в автомате $B \in LO(A)$ множество состояний S_A^1 также сохраняется, и $\varphi(r)=\psi(r)=s$, если $I_s^1 \cap I_r^1 \neq \emptyset$, для любого $r \in S_R^1$. Пусть $p=p_1x_1$, $x_1 \in X$. Если p_1 пустое слово, то утверждение леммы следует из того, что состояние $\varphi(\delta_R(r,p))$ принадлежит множеству $O(s, x_1)$, в котором любые два состояния различаются по любому входному слову длины 1, а, значит, и по слову x_1. Так как эксперименты высоты 1 сохраняются в автомате B, и R есть фрагмент автомата B, то $\varphi(\delta_R(r,p))=\psi(\delta_R(r,p))$. Пусть теперь p_1 не пустое слово, и $\varphi(\delta_R(r,p_1))=\psi(\delta_R(r,p_1))$. И в этом случае остаются в силе вышеприведенные рассуждения. □

На основании этой леммы мы можем однозначно разметить именами состояний-образов из автомата A все состояния фрагмента R вдоль пути, определяемого словом p из леммы 1, при любом гомоморфизме R в A. Как следует из леммы 1, эта разметка не изменится и при любом гомоморфизме R в любой автомат $B \in LO(A)$.

Теорема 1. *Если все состояния автомата R достижимы из состояний S_R^1, и существует полный гомоморфизм R в автомат A, при котором подтверждена каждая дуга автомата A, то R есть представление локально диагностируемого по локализации $O(A)$ автомата A относительно локально определенного класса $LO(A)$.*

Доказательство. Пусть φ – полный гомоморфизм R в A, при котором подтверждена любая дуга автомата A. Так как все состояния R достижимы из состояний множества S_R^1, то во фрагменте для каждой дуги $u = (s, x, y, t)$ автомата-эталона существует ее прообраз $u' = (r, x, y, k)$, который принадлежит некоторому пути в графе R, начинающемуся в одном из состояний множества S_R^1 и заканчивающемуся в вершине, не являющейся концом прообраза. Такому пути соответствует слово, удовлетворяющее условиям леммы 1. Выполнив разметку состояний фрагмента вдоль этого пути, как указано выше, получим разметку концов дуги u, $\varphi(r)= s$, $\varphi(k)=t$. Проделав такую операцию разметки по всем дугам автомата A, определим по фрагменту в точности множество всех дуг эталона, что и доказывает теорему. $\square$

Очевидно, что разметка состояний фрагмента R, описанная в теореме 1, определяется ядром $ker\varphi = \varphi \circ \varphi^{-1}$ гомоморфизма φ: состояния, принадлежащие одному классу этой конгруэнции, получают имя состояния автомата A, в которое отображаются все состояния этого класса.

Непосредственным следствием теоремы является следующее утверждение.

Следствие 1. *Эксперимент W является контрольным для автомата A относительно класса $LO(A)$, если он является таким обходом автомата A из некоторого состояния r, $r \in S_R^1$, что для каждого слова $w = v(x, y) \in W$ дуга, покрываемая парой $(x, y) \in X \times Y$, подтверждена в эксперименте.*

Если эксперимент простой, то следствие 1 требует, чтобы указанное в нем состояние r обладало простым начальным идентификатором длины 1. Отсюда и из оценок длины обходов автоматных графов вытекает

Следствие 2. *Длина минимального простого контрольного эксперимента для $(A, LO(A))$ не меньше $mn + 1$ и не больше $(m + 1)n + 1/2(m - 1)n(n - 1)$, где n, m – число состояний и входов автомата A соответственно, причем нижняя оценка достижима.*

Доказательство. Длина минимального обхода графа переходов автомата, как известно, не меньше mn и не больше $mn + \frac{1}{2}(m - 1)n(n - 1)$. Дополнительное слово длины 1 в обходе необходимо для подтверждения последней пройденной в эксперименте дуги, и, возможно, слово длины, не больше $n - 1$ потребуется для того, чтобы достичь состояния r, указанного в следствии 1, из заданного начального состояния. Поэтому нижняя оценка достижима. $\square$

Теорема 1 может быть усилена, если при выборе локализации потребовать следующее. Назовем окрестностью состояния s в автомате A множество всех его состояний, достижимых из s по некоторому входу x, или из которых достижимо s по x. Потребуем, чтобы любое множество $O(s, x) \in O(A)$ содержало окрестность состояния s. Класс автоматов по такой локализации обозначим $LOC(A)$. Будем, как и выше, полагать, что для эталона A множество $S_A^1 \neq \emptyset$, и во всякой компоненте связности автомата-эталона есть состояние из этого множества. Заметим также, что все одноэлементные компоненты связности автомата A сохраняются во всех автоматах класса $LOC(A)$ при локализации, в точности совпадающей со множеством окрестностей состояний. Поэтому и в данном случае полагаем, что каждое множество из локализации содержит хотя бы два элемента.

Для всякой дуги $u = (s, x, y, t)$ автомата A определим обратную дугу $-u = -(t, x, y, s)$, началом которой считаем t – конец прямой дуги, концом считаем состояние s – начало прямой дуги, а ее отметку обозначаем как $-(x, y)$. Полагаем, что в пути по графу переходов автомата обратную дугу проходим в направлении, противоположном ориентации соответствующей ей прямой дуги. Тогда полупуть определим как последовательность из прямых и обратных дуг $p = \sim (s_1, x_1, y_1, t_2)$,

$\sim(s_2, x_2, y_2, t_3)$,...,$\sim(s_{k-1}, x_{k-1}, y_{k-1}, t_k)$, где $\sim$ указывает на прямую или обратную ориентацию дуг, а соответствующее полупути слово из отметок прямых или обратных дуг – как полуслово, порожденное автоматом A в состоянии s. При указанной локализации в локально диагностируемом автомате из равенств $\delta(s, x)$=$\delta(t, x)$ и $\lambda(s, x)$=$\lambda(t, x)$ для любых $x \in X$ следует равенство s=t. Поэтому в таком автомате всякое полуслово w однозначно определяет полупуть из состояния s, порождающего это полуслово, в состояние t, в котором оканчивается этот путь. В этом случае будем писать $s \cdot w = t$. Так как одношаговая функция выходов автомата-эталона сохраняется в каждом автомате $B \in LOC(A)$, то $s \cdot w$ однозначно определено в B для любого полуслова w и состояния s. Учитывая это, можно сформулировать для класса $LOC(A)$ лемму, аналогичную лемме 1.

Лемма 2. *Пусть φ – гомоморфизм R в A, ψ – гомоморфизм R в $B \in LOC(A)$, состояние $r \in S_R^1$. Если для полуслова $w(\sim(x, y))$, w не пустое полуслово, $r \cdot w(\sim(x, y))$ определено в R, то $\varphi(r \cdot w) = \psi(r \cdot w)$.*

Доказательство этого утверждения с учетом вышеприведенных замечаний почти дословно повторяет доказательство леммы 1.

Будем, как и выше, полагать, что для эталона A множество состояний S_A^1 не пусто, и во всякой компоненте связности автомата-эталона есть состояние из этого множества. Заметим также, что все одноэлементные компоненты связности автомата A сохраняются во всех автоматах класса $LOC(A)$ при локализации, в точности совпадающей со множеством окрестностей состояний. Поэтому и в данном случае полагаем, что каждое множество из локализации содержит хотя бы два элемента.Тогда при замене в условиях теоремы 1 класса $LO(A)$ на класс $LOC(A)$ справедлива

Теорема 2. *Автомат R есть представление локально диагностируемого по локализации $O(A)$ автомата A относительно локально определенного класса $LOC(A)$ тогда и только тогда, когда R есть полный фрагмент A, такой, что в нем подтверждена каждая дуга автомата A.*

Доказательство. Необходимость условий теоремы для $R \in \mathbf{R}(A, LOC(A))$ фактически следует из утверждения 1. Дополнительное требование подтвержденности каждой дуги следует из того, что в противном случае неподтвержденная дуга может быть переброшена в любое состояние соответствующей окрестности, и для полученного автомата R также будет фрагментом.

Доказательство достаточности, учитывая лемму 2 и принятые ограничения, повторяет доказательство теоремы 1 (с соответствующими заменами слов и путей на полуслова и полупути). $\square$

При условии наличия в автомате простого начального идентификатора длины 1, как прямое следствие теоремы 2, усиливается и аналог следствия 1.

Следствие 3. *Простой эксперимент W автомата A является контрольным для $(A, LOC(A))$ тогда и только тогда, когда он является таким обходом автомата A, что если $w = v(x, y) \in W$, то дуга, покрываемая парой $(x, y) \in X \times Y$, подтверждена.*

Следствие 2 в этом случае также можно усилить.

Следствие 4. *Длина минимального простого контрольного эксперимента для* $(A, LOC(A))$ *не меньше* $mn+1$ *и не больше* $mn + 1/2(m-1)n(n-1)+1$, *где* n, m *– число состояний и входов автомата* A *соответственно, причем обе оценки достижимы.*

Его справедливость следует из выполнения условий следствия 3 для любого обхода автомата с подтверждением последней пройденной дуги и оценок длины кратчайших обходов графов переходов автоматов.

Заключение. Из полученных характеризаций следует полиномиальность задачи распознавания контрольных экспериментов для таких классов в отличие от других n-плотных классов (n-полного, групповых автоматов, без потери информации и др.), для которых эта задача является NP-полной даже при условии максимального разнообразия в поведении эталона [4]. Из них же следует, что полученные оценки длины простых экспериментов сложности не могут быть улучшены для n-плотных классов, получаемых произвольными перебросками дуг.

1. *Bhattacharyya A.* Checking experiments on sequential machines. – New York: J. Wiley and Sons, 1989. – 155с.
2. *Козловский В.А., Копытова О.М.* Представления автоматов относительно m-плотных классов // Матер. VIII Межд. семинара "Дискретная математика и ее приложения" (Москва, 2–6 февраля 2004г.). – М.: Изд.-во МГУ. – С.277-280.
3. *Грунский И.С., Козловский В.А.* Синтез и идентификация автоматов. – Киев: Наукова думка, 2004. – 246с.
4. *Козловский В.А.* Локальные неисправности автомата и их обнаружение // Математические вопросы кибернетики (под ред. С.В.Яблонского). – М.: Наука, 1991, вып.3. – С.167-186.
5. *Козловский В.А., Копытова О.М.* Контрольные эксперименты в локально определенных классах // Материалы IX Международного семинара "Дискретная математика и ее приложения", посв. 75-летию со дня рожд. акад. О.Б.Лупанова (Москва, МГУ, 18-23 июня 2007г.) / Под ред. О.М.Касим-Заде. – М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2007. – С.322-324.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
kozlovskii@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 11.09.08