

П. А. ДМИТРИЕВ, В. М. МУСАЛИМОВ

## КИНЕМАТИЧЕСКИЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ДВИЖЕНИЯ АВТОМОБИЛЯ

Изучена динамика плоского движения автомобиля. Определены параметры, устанавливающие возможность мониторинга движения с использованием датчиков скорости и ускорения.

*Ключевые слова:* плоское движение автомобиля, датчик угловой скорости, угол поворота, угловая скорость, сила трения, обратная связь.

В основе функционирования систем управления движением лежит принцип сопоставления параметров реального движения с программируемым. Речь идет не о системе глобальной навигации, а об инерциальной системе отсчета, связанной с автомобилем. Текущие параметры движения автомобиля определяются с помощью углов поворота передних управляемых колес автомобиля и вычисляются системой датчиков, на основании чего вырабатывается управляющий сигнал корректировки безопасного курса.

**Динамика плоского движения автомобиля.** Рассмотрим расчетную схему движения автомобиля [см. лит.]. На рис. 1 представлен вид сверху плоской модели автомобиля с управляемыми передними колесами. Введены две системы координат:  $Oxyz$  — неподвижная,  $Oxy$  — плоскость движения автомобиля, а ось  $Oz$  направлена на читателя;  $G\xi\eta\zeta$  — подвижная система координат, жестко связанная с кузовом автомобиля,  $G$  — центр масс автомобиля, ось  $G\xi$  направлена по продольной оси  $AB$  автомобиля, ось  $G\eta$  перпендикулярна ей, а ось  $G\zeta$  направлена на читателя. Пусть  $\varphi$  — угол, образуемый продольной осью  $AB$  с осью  $Ox$ , а  $\theta$  — угол поворота передних колес относительно продольной оси  $AB$ . Внешние силы, приложенные к автомобилю:  $F_B$  — равнодействующая продольных сил реакций дороги, приложенных к задним колесам;  $R_B$  — равнодействующая поперечных сил реакций дороги, приложенных к задним колесам;  $R_A$  — равнодействующая поперечных сил реакций дороги, приложенных к передним колесам.

Получено [см. лит.] определяющее дифференциальное уравнение для функции  $\varphi(t)$ :

$$\ddot{\varphi} = \frac{l \operatorname{ctg} \theta \left[ \frac{l \dot{\theta} \dot{\varphi}}{\sin^2 \theta} + \frac{F_B}{m} \right]}{k^2 + l^2 \operatorname{ctg}^2 \theta},$$

где  $k$  — радиус инерции кузова относительно точки  $B$ ,  $l = a + b$ .

Если решение уравнения  $\varphi(t)$  получено, то находим  $v_\xi$  и  $v_\eta$  — проекции вектора скорости. Затем по формулам преобразования координат для неподвижной системы координат  $Oxyz$  получим

$$\begin{aligned}\dot{x}_G &= v_\xi \cos \varphi - v_\eta \sin \varphi = \dot{\varphi} l \operatorname{ctg} \theta \cos \varphi - \dot{\varphi} b \sin \varphi, \\ \dot{y}_G &= v_\xi \sin \varphi + v_\eta \cos \varphi = \dot{\varphi} l \operatorname{ctg} \theta \sin \varphi - \dot{\varphi} b \cos \varphi.\end{aligned}$$

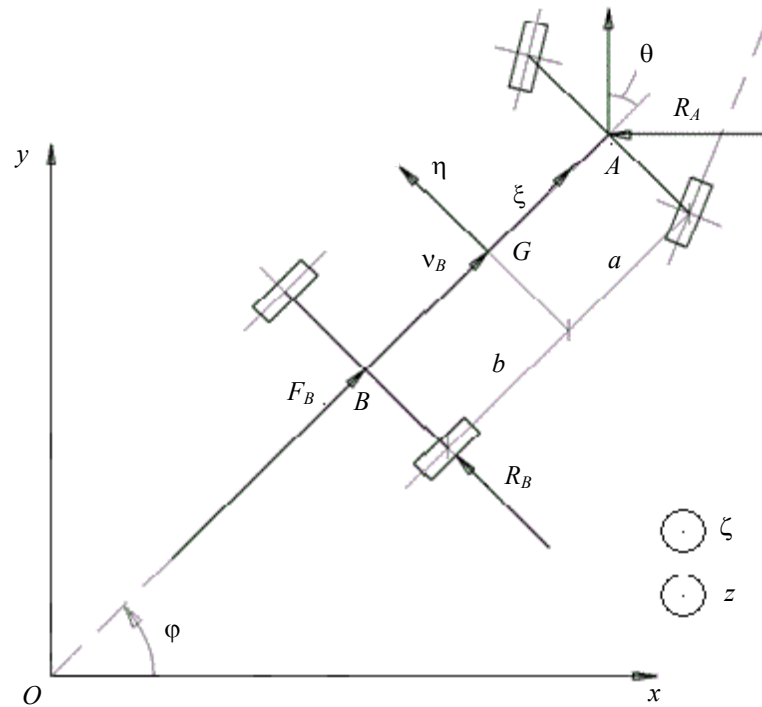


Рис. 1

Поскольку  $\theta$  есть функция времени, примем  $\theta(t) = kt$  (в целях линеаризации уравнения движения), тогда дифференциальное уравнение для функции  $\varphi(t)$  принимает вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{d\varphi}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \right] = \frac{d}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{d\theta} + \frac{d\varphi}{d\theta} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2\varphi}{d\theta^2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{d\varphi}{d\theta} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Угол  $\theta$  как угол поворота передних колес автомобиля не может выходить за пределы интервала  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , что позволяет линеаризовать  $\operatorname{ctg} \theta$ ,  $\operatorname{ctg}^2 \theta$ ,  $\sin^2 \theta$  в дифференциальном уравнении движения. Окончательно уравнение движения примет следующий вид:

$$\ddot{\varphi} = \frac{l(\pi - 2t) \left( \frac{l\dot{\varphi}}{at^2 + bt + c} + \frac{F_B}{m} \right)}{k^2 + l^2(\pi - 2t)^2}.$$

Для исходных данных ( $a=2$ ;  $b=0$ ;  $c=1$ ;  $k=0,8$ ;  $l=1$ ;  $\pi=3,14$ ;  $F_B=200$ ;  $m=250$ ) получены законы изменения  $\varphi(t)$  и  $\omega(\varphi)$ , проиллюстрированные на рис. 2 и 3. На рис. 2 приведена зависимость угла поворота автомобиля от времени  $\varphi(t)$ . На рис. 3 представлена зависимость угловой скорости вращения от угла поворота автомобиля.

Таким образом, получены зависимости угловой скорости и ускорения автомобиля в функции угла поворота передних колес и равнодействующей  $F_B$ . С помощью уравнений находят и реакции опор. Для создания системы управления автомобилем без проскальзывания

при повороте необходимо отслеживать угловую скорость задних колес и сопоставлять ее значения с законом  $\varphi(\theta)$  (преобразуя угловую скорость поворота автомобиля вокруг своей оси в угловые скорости задних колес). При отклонении от данного закона необходимо распределять нагрузку между задними колесами или с помощью коробки передач изменять соотношение крутящего момента и скорости вращения задних колес. Важную роль при этом играют вибрационные датчики угловой скорости. Один из датчиков размещают в окрестности центра масс автомобиля, обратная связь осуществляется по кривой зависимости „угол поворота колес—угловая скорость“ с учетом скорости вращения задних колес (равнодействующей  $F_B$ ).

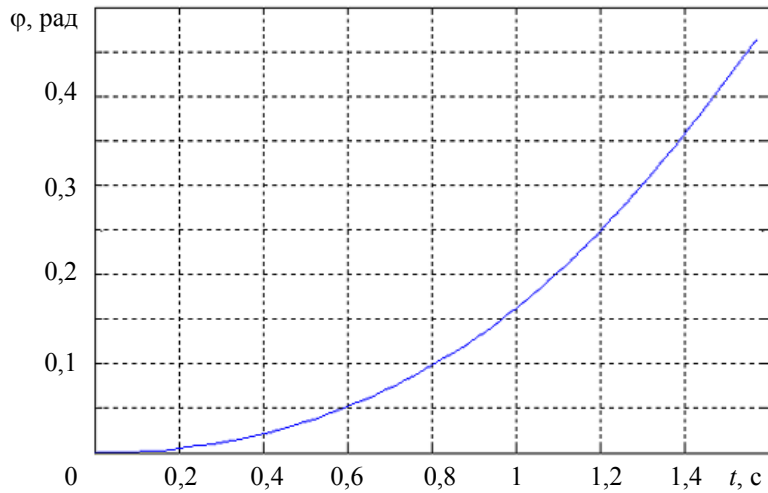


Рис. 2

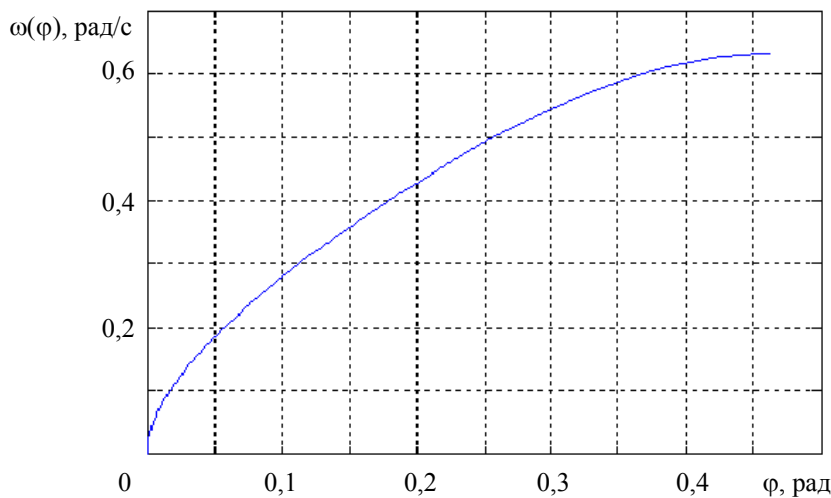


Рис. 3

**Парциальные силы трения (движение без проскальзывания).** Далее целесообразно определить парциальные силы трения для дальнейшей коррекции движения. Найдем значения скорости и ускорения центра масс (ЦМ), силы трения, действующей на каждое колесо:  $F_{\text{тр}1}$ ,  $F_{\text{тр}2}$ ,  $F_{\text{тр}3}$  и  $F_{\text{тр}4}$ . Расчетная схема задачи приведена на рис. 4.

Так как движение происходит без проскальзывания, мгновенный центр скоростей (МЦС) должен лежать на прямой  $Ox$ , а углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  подобраны таким образом, что прямые, перпендикулярные направлению векторов линейных скоростей передних колес, пересекаются на оси  $Ox$  (если ось проходит через центры задних колес). На рис. 4 обозначены расстоя-

ния от МЦС до каждого из четырех колес:  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  и  $h_4$ . Обозначим расстояния от центра масс до колес —  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  и  $d_4$  соответственно.

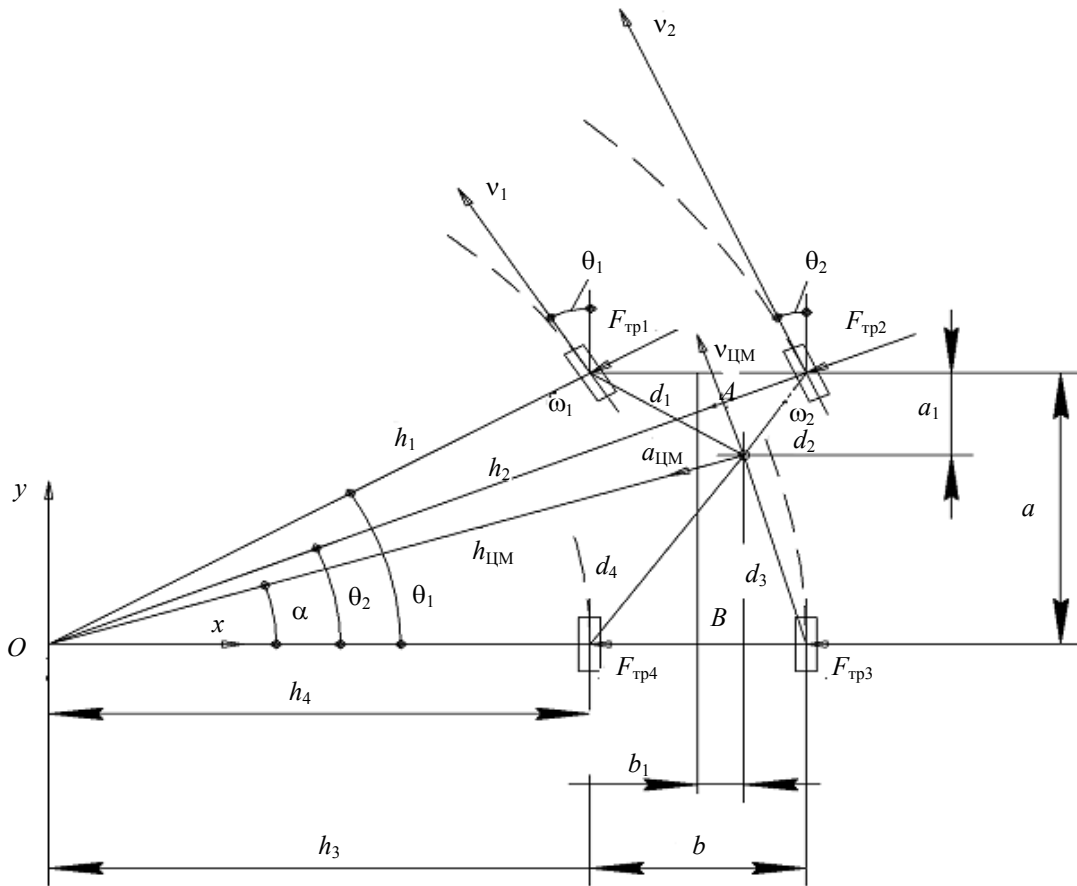


Рис. 4

Найдем значение  $h_4$  из треугольника, обозначенного точками  $h_4$ ,  $h_1$  и  $a$ :

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{a}{h_4} \text{ или } \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{a}{h_4 + b},$$

рассчитаем  $h_2$

$$h_2 = \sqrt{a^2 + (h_4 + b)^2}.$$

Найдем расстояние от МЦС до центра масс

$$h_{\text{ЦМ}} = \sqrt{(a - a_1)^2 + \left(h_4 + \frac{b}{2} + b_1\right)^2}.$$

Вычислим угол  $\alpha$ :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a - a_1}{h_4 + \frac{b}{2} + b_1},$$

далее получим

$$\begin{aligned} d_4 &= \sqrt{h_{\text{ЦМ}}^2 + h_4^2 - 2h_{\text{ЦМ}}h_4 \cos \alpha}, \\ d_3 &= \sqrt{h_{\text{ЦМ}}^2 + (h_4 + b)^2 - 2h_{\text{ЦМ}}(h_4 + b) \cos \alpha}, \\ h_1 &= \sqrt{h_4^2 + a^2}, \end{aligned}$$

$$d_1 = \sqrt{h_1^2 + h_{\text{ЦМ}}^2 - 2h_1 h_{\text{ЦМ}} \cos(\theta_1 - \alpha)},$$

$$d_2 = \sqrt{h_2^2 + h_{\text{ЦМ}}^2 - 2h_2 h_{\text{ЦМ}} \cos(\theta_2 - \alpha)}.$$

Все точки системы движутся с постоянной угловой скоростью

$$\omega = v_1 h_1 = \omega_1 r h_1$$

и линейная скорость центра масс равна

$$v_{\text{ЦМ}} = \omega h_{\text{ЦМ}}.$$

Центростремительное ускорение определим следующим образом:

$$a_{\text{ЦМ}} = \frac{v_{\text{ЦМ}}^2}{h_{\text{ЦМ}}} = \omega^2 h_{\text{ЦМ}}.$$

Приведенные значения массы колес вычисляются по формулам

$$m_1 = \frac{m}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4} d_1, \quad m_2 = \frac{m}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4} d_2,$$

$$m_3 = \frac{m}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4} d_3, \quad m_4 = \frac{m}{d_1 + d_2 + d_3 + d_4} d_4.$$

Вычислим значения силы трения:

$$F_{\text{тр}1} = m_1 a_{\text{ЦМ}1} = m_1 \omega^2 h_1, \quad F_{\text{тр}2} = m_2 a_{\text{ЦМ}2} = m_2 \omega^2 h_2,$$

$$F_{\text{тр}3} = m_3 a_{\text{ЦМ}3} = m_3 \omega^2 h_3, \quad F_{\text{тр}4} = m_4 a_{\text{ЦМ}4} = m_4 \omega^2 h_4$$

Таким образом, постоянно получая с датчиков данные о положении передних колес, скорости вращения колес и распределения массы, можно вычислять значения силы реакции опоры (силы трения). Задача нахождения углового ускорения при известной равнодействующей продольной силы реакции требует дополнительного рассмотрения. Установлено, что достаточно эффективно система управления может быть аппаратно реализована с использованием обратной связи по зависимости „угол поворота колес—угловая скорость“. Для дополнительной коррекции систем управления целесообразно использовать парциальные составляющие сил трения.

#### ЛИТЕРАТУРА

Розенблат Г. М. Гироскопические эффекты в механике твердых тел. М.: Едиториал УРСС, 2003. 96 с.

#### Сведения об авторах

- Павел Александрович Дмитриев** — студент; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра мехатроники
- Виктор Михайлович Мусалимов** — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра мехатроники; E-mail: musalimov@mail.ifmo.ru

Рекомендована кафедрой  
мехатроники

Поступила в редакцию  
25.12.09 г.