УДК 519.8

В.А. Соловьев, Р.Т. Файзуллин
Омский государственный технический университет, г. Омск

ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ, АССОЦИИРОВАННАЯ С ЗАДАЧЕЙ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ

Рассмотрим уравнение движения для алгоритмической схемы модели транспортного потока, описанного в [1]:

$$-x_{i-1}(t)-v_{i-1}(t+\Delta t)\Delta t+2(x_i(t)+v_i(t+\Delta t)\Delta t)-x_{i+1}(t)-v_{i+1}(t+\Delta t)\Delta t=\beta_i\,, \qquad (1)$$

где

$x_i(t)$

– положение i-го транспортного средства, движущегося со скоростью

$v_i(t)$, в мо-

мент времени t; Δt

– сдвиг по времени; β_i

– модификатор схемы движения, отвечающий за

положение точки, которую стремится занять транспортное средство при движении в потоке; i – номер от 1 до M, где M – количество транспортных средств на ребре (дороге, трассе).

$\lceil 2(x_1+v_1\Delta t)$

$-x_2-v_2\Delta t$ 0 0 0 0

0 $=\beta_1$

(2)

$$\begin{cases} 0 \quad 0 \quad -x_{i-1}-v_{i-1}\Delta t \quad 2(x_i+v_i\Delta t) \quad -x_{i+1}-v_{i+1}\Delta t \quad 0 \quad 0 = \beta_i \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -x_{M-1}-v_{M-1}\Delta t \quad 2(x_M+v_M\Delta t)=\beta_M \end{cases}$$

Если рассмотрим участок трассы и условия, которые определяют движение, то получим трехдиагональную матрицу, соответствующую системе (2), составленной из уравнений типа (1).

1
i-1
M
M-1

i
$i \pm 1$

Рис. 1. Движение по участку трассы

Если рассмотрим несколько участков трассы в предположении, что на соединяющих перекрестках светофоры "открыты" (горит зеленый сигнал, т.е. проезд разрешен), то получим сильно разреженную матрицу.

Можно рассмотреть предельный случай, когда все светофоры "открыты", и при этом, помимо движения внутри города, имеются транзитные потоки через город. В этом случае так же получаем сильно разреженную матрицу, ассоциированную с графом дорог, учитывающим направление движения. Матрица не будет определена, т.к. замыкающее условие на выходах из трасс "скорость последнего равна скорости предыдущего" приводит к тому, что определитель матрицы равен нулю.

Эта конструкция кажется искусственной, но если рассмотреть усреднения по времени (будем считать светофоры модификаторами скорости), то можно вместо транспортных средств рассматривать группы транспортных средств. Правую часть в этом случае можно рассматривать как возмущение накладываемое на поток.

В рамках данной модели можно ввести понятие устойчивой пробки, т.е. такой пробки, которая устойчива к некоторым типам возмущений (сама пробка может возникнуть где угодно из-за локальных причин: авария на дороге, неконтролируемый пешеходный переход и др.). Нас же интересуют пробки, определяемые самой структурой дорожной сети. Здесь можно провести аналогию между многими задачами математической физики и рассматриваемой моделью. Так, например, в задаче колебания закрепленного стержня (или задаче о струне Даламбера, рис. 2), колебания раскладываются по собственным формам колебаний.

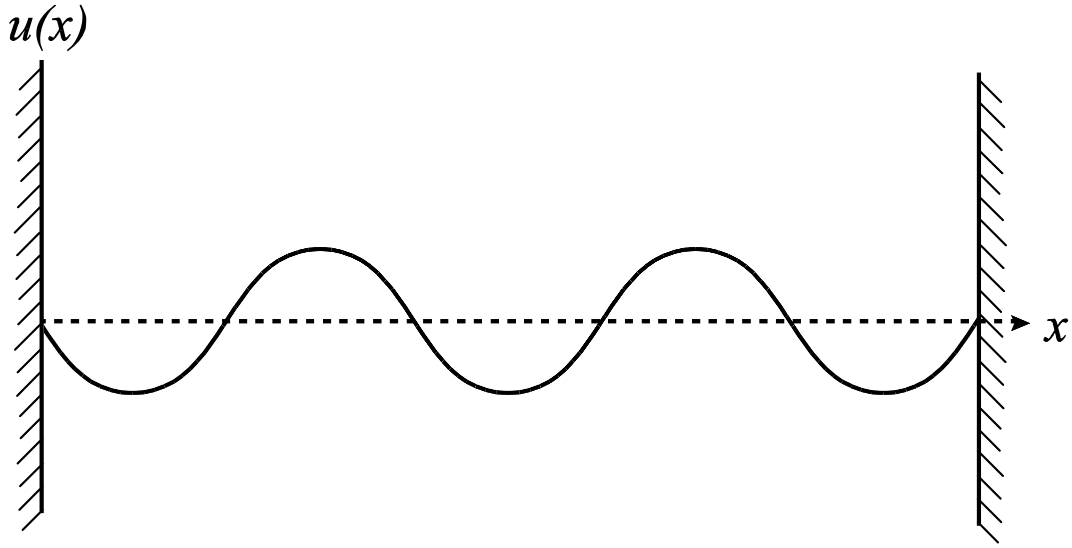

Рис. 2. Колебание струны, Д'Аламбер (1748)

Если воздействие на стержень будет гладким, то результат возмущения будет также гладким, и коэффициенты разложения по собственным функциям будут убывать в зависимости от степени гладкости и возмущения. Если возмущение непрерывно, то коэффициенты убывают как $1/n^2$. Если возмущение дифференцируемо, то убывание будет пропорционально $1/n^3$.

Таким образом, если возмущение похоже на 2-ю собственную форму, то узел не изменится.

Рассмотрим ситуацию, когда пробка возникла в зоне, совпадающей с узлами двух собственных форм (функций). В этом случае, если возмущение совпадает со второй или третьей, то возмущение не изменит значение в этом узле. Если в этом узле есть пробка, то она там останется.

В задачах механики интересуются резонансными явлениями в узлах. В рассматриваемом случае интерес вызывают пробки в узловых точках. В задачах механики узел определяет место наибольшего напряжения. В рассматриваемой ситуации узел определяет относительную устойчивость пробки гладким возмущениям.

Особый интерес вызывает случай, в котором узлы собственных функций близки друг к другу (на графе). Точного совпадения ожидать не приходится. Более того в данной модели попытки убрать пробки регулярными или гладкими возмущениями не приводят к успеху. Узел становится пробкой, когда скорость транспортных средств в нем равна нулю.

В качестве наглядного примера приведен рисунок 3, на котором изображена часть графа сети дорог города Омка. В кругах находятся области скопления узлов, либо единичные узлы, которые соответствуют реальным пробкам, образующимся в городе.

Рис. 3. Области, содержащие узлы, совпадающие с реальными пробками (г. Омск)

Таким образом, данный подход позволяет, анализируя лишь топологию транспортной сети, получить данные о расположении мест, в которых пробки, если таковые будут образовываться, будут стабильны, т.е. не подвержены смене режимов работы светофоров и других факторов, влияющих на поток.

Библиографический список

1. Соловьев, В. А. Математическое моделирование транспортных потоков на основе схемы с двумя масштабами времени / В.А. Соловьев, Р.Т. Файзуллин // Омский научный вестник. Сер. Приборы, машины и технологии. 2011. №3(103). С. 37–40.