Серия «Математика»
2011. Т. 4, № 3. С. 99—109

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 510.57

Об элементно-подгрупповой теории абелевых групп

В. И. Мартьянов
Национальный исследовательский Иркутский государственный технический университет

Аннотация. Доказана разрешимость элементно-подгрупповой теории абелевых групп без кручения с универсальными кванторами по элементам и произвольными кванторами по подгруппам.

Ключевые слова: теория моделей, разрешимость элементарных теорий.

Настоящая статья относится к исследованиям разрешимости теорий многоосновных алгебраических систем, которые основатель Иркутской алгебро-логической школы, профессор А. И. Кокорин считал важным направлением современной математики [1].

Элементарная (универсальная) элементно-подгрупповая теория абелевых групп (а.г.) сигнатуры $\sigma = \langle +, \in \rangle$ неразрешима (соответственно, разрешима) [1], где $+$ — групповая операция, $\in$ — отношение принадлежности элемента а.г. подгруппе.

В статье доказывается разрешимость элементно-подгрупповой теории абелевых групп без кручения сигнатуры σ с универсальными кванторами по элементам и произвольными кванторами по подгруппам.

Кроме того, авансируется более сильный результат о разрешимости всей элементно-подгрупповой теории абелевых групп сигнатуры σ с универсальными кванторами по элементам и произвольными кванторами по подгруппам. Приводится схема доказательства с пропуском некоторых технических результатов (лемм).

Для понимания техники доказательства результатов полезно знакомство со статьей [4].

Предполагаем также, что читатель знаком с основами теории абелевых групп [6], теории моделей [5] и алгебраических систем [3]. Отметим также, что для простоты изложения, ряд технических результатов будем формулировать для классов одноосновных моделей, а не для многоосновных алгебраических систем, что связано эквивалентностью этих определений с точки зрения теории моделей [3], так как операции стандартным образом можно заменить на отношения, а основные множества заменить сортами переменных, т. е. от многоосновной модели перейти к одноосновной.

1. Введение

Приведем ряд необходимых определений и результатов. В общем случае многоосновные алгебраические системы определяются как

$$M = \langle A_1, A_2, \ldots, A_n;\ f_1, f_2, \ldots, f_k;\ h_1, h_2, \ldots, h_m \rangle, \tag{1.1}$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — основные множества;

$f_1, f_2, \ldots, f_k$ — функции (операции);

$h_1, h_2, \ldots, h_m$ — отношения (предикаты).

Совокупность функций и отношений, определенных на многоосновной алгебраической системе M, называется *сигнатурой* и обычно будет обозначаться $\sigma = \langle f_1, f_2, \ldots, f_k;\ h_1, h_2, \ldots, h_m \rangle$. Мы сознательно не останавливаемся на арности (количестве аргументов или переменных отношений и функций) и на типизации переменных (областях значений переменных и функций, которыми являются основные множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$), так как необходимые для этого "всеобщие" обозначения весьма громоздки, а в нашем конкретном случае арность и типизация аргументов и областей значения операций и отношений будет очевидна.

Для элементно-подгрупповой теории абелевых групп многоосновные алгебраические системы (1.1) имеют вид $M = \langle A_1, A_2; +; \in \rangle$, где A_1 — множество элементов а.г., A_2 — множество подгрупп а.г., $+$ — групповая операция, $\in$ — отношение принадлежности элемента а.г. подгруппе.

Формулы узкого исчисления предикатов (УИП) сигнатуры σ без свободных переменных будем называть *предложениями.* Совокупность предложений сигнатуры σ будем обозначать L_σ. *Элементарной теорией* $\mathrm{Th}\,(A)$ алгебраической системы A будем называть совокупность предложений истинных на A.

Элементарной теорией $\mathrm{Th}\,(K)$ *класса* алгебраических систем K будем называть совокупность предложений истинных на *всех* алгебраических системах A из K. В дальнейшем вместо "*элементарная теория*" для краткости будем использовать термин "*теория*".

Алгебраические системы A_1 и A_2 будем называть *элементарно эквивалентными*, если $\mathrm{Th}\,(A_1) = \mathrm{Th}\,(A_2)$.

Следуя [4], множество χ формул языка L_σ сигнатуры σ назовем *элементарным признаком эквивалентности теории* $\mathrm{Th}\,(K)$ *класса алгебраических систем* K, если для любых $\mathrm{Th}\,(K)$-моделей A_1 и A_2:

$$\mathrm{Th}\,(A_1) = \mathrm{Th}\,(A_2) \Leftrightarrow \mathrm{Th}\,(A_1) \cap \chi = \mathrm{Th}\,(A_2) \cap \chi.$$

Будем говорить, что класс алгебраических систем K *полон относительно множества* χ *формул языка* L_σ *сигнатуры* σ тогда и только тогда, когда для любых моделей A_1 и A_2 из K : $\mathrm{Th}\,(A_1)\cap\chi = \mathrm{Th}\,(A_2)\cap\chi$.

Ниже приведем ряд утверждений (достаточно очевидных) без доказательств.

Предложение 1 ([4]). *Множество* χ *формул языка* L_σ *сигнатуры* σ *будет элементарным признаком эквивалентности теории* $\mathrm{Th}\,(K)$ *класса алгебраических систем* K *тогда и только тогда, когда любой полный относительно множества формул* χ *класс* $\mathrm{Th}\,(K)$*-моделей полон.*

Пусть χ — произвольное множество формул языка L_σ. Введем обозначения:

$$\chi^* = \{\Phi = \&\Phi_i \mid \Phi_i \in \chi \ \text{ или } \ \neg\Phi_i \in \chi\},$$

$$\chi^{**} = \chi^* \cup \{\Phi = \vee\Phi_i \,|\, \Phi_i \in \chi \ \text{ или } \ \neg\Phi_i \in \chi\}.$$

Предложение 2 ([4]). *Пусть рекурсивно перечислимы теории* $\mathrm{Th}\,(K)$ *класса алгебраических систем* K *и его элементарный признак эквивалентности* χ. *Теория* $\mathrm{Th}\,(K)$ *разрешима тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:*

1. *существует алгоритм проверки истинности для формул из* χ^{**} *на классе* K*;*
2. *множество* K*-выполнимых формул из* χ^* *рекурсивно перечислимо.*

На основании этого предложения доказывается

Предложение 3 ([4]). *Если* χ *— элементарный признак эквивалентности класса* Σ*-моделей, то теория класса алгебраических систем* $\mathrm{Th}\,(K)$ *аксиоматизируема со списком* Σ *тогда и только тогда, когда* Σ *включено* $\mathrm{Th}\,(K)$ *и любая* Σ*-выполнимая формула из* χ *является* K*-выполнимой.*

Дальнейшие рассмотрения для простоты изложения будем вести для одноосновных моделей, что, как было отмечено выше, не уменьшает общности результатов.

Пусть модель $A_2 = \langle M_2; \ldots\rangle$ сигнатуры $\sigma = \langle h_1, h_2, \ldots, h_m\rangle$ является расширением модели $A_1 = \langle M_1; \ldots\rangle$. Модель A_2 назовем *элементарным расширением* модели A_1 (обозначение $A_1 \ll A_2$), если для всякой формулы $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ сигнатуры σ не содержащая других свободных переменных, кроме $x_1, x_2, \ldots, x_n$, формула

$$\Phi(a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad (\text{элементы } \ a_1, a_2, \ldots, a_n \ \text{ из } \ M_1)$$

истина на модели A_1 тогда и только тогда, когда она истина на A_2.

Модель A_1 в этом случае будем называть *элементарной подмоделью* модели A_2.

Теорию T назовем *модельно полной*, если любое расширение модели A из $\mathrm{Mod}\,(T)$ является *элементарным.*

Пусть дана модель $A = \langle M; \ldots\rangle$ сигнатуры $\sigma = \langle h_1, h_2, \ldots, h_m\rangle$ теории T. Каждому элементу $a \in M$ поставим в соответствие константу c_a, введем все формулы $c_a \neq c_b$ ($b \in M$ и $a \neq b$); $h_i(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, если атомная формула $h_i(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ истина на модели $A = \langle M; \ldots\rangle$, соответственно, $\neg h_i(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, если атомная формула $h_i(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ложна на модели $A = \langle M; \ldots\rangle$.

Совокупность всех таких формул назовем *диаграммой* модели $A = \langle M; \ldots\rangle$ и обозначим $D(A)$. Важное значение при доказательстве модельной полноты и разрешимости имеет рассмотрение теории $T_1 = T \cup D(A)$ в сигнатуре $\sigma_1 = \sigma \cup \{c_a \mid a \in M\}$.

Критерий А. Робинсона [5]. *Теория T сигнатуры σ модельно полна тогда и только тогда, когда для любых ее моделей $A_1 \ll A_2$, всякое примитивное предложение сигнатуры σ_1, истинное на A_2, истинно на A_1.*

Более удобен при решении задач критерий Робинсона в следующей формулировке.

Предложение 4 ([5]). *Теория T сигнатуры σ модельно полна тогда и только тогда, когда для любых ее моделей $A_1 \ll A_2$, любой конечной подмодели $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ из A_2 такой, что $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \cap A_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, то существуют элементы $\{b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_n\}$ из A_1 такие, что диаграммы подмоделей $D\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и $D\{a_1, a_2, \ldots, a_k, b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_n\}$ изоморфны (при естественном соответствии $a_i \leftrightarrow a_i$; $a_{k+j} \leftrightarrow b_{k+j}$).*

В дальнейшем для наших целей будет удобно использовать

Предложение 5 ([4]). *Если теория T сигнатуры σ модельно полна, то $\exists$-формулы являются элементарным признаком эквивалентности.*

2. Элементно-подгрупповая теория абелевых групп без кручения

При изучении элементно-подгрупповой теории а.г. с универсальными кванторами по элементам и произвольными кванторами по подгруппам удобнее будет рассматривать эквивалентную теорию одноосновных моделей следующего вида

$$M = \langle A; g_1, g_2, \ldots, g_k, \ldots; +; \in\rangle, \tag{2.1}$$

где g_i — константы (элементы а.г.), A — множество подгрупп а.г., $+$ — групповая операция, $\in$ — отношение принадлежности элемента а.г. подгруппе.

Пусть предложения сигнатуры модели (2.1) в пренексной форме имеют вид

$$Q_1q_1 \dots Q_sq_s(\Phi_1(u_1, \dots, u_t, q_1, \dots, q_s) \vee \dots \\ \dots \vee \Phi_w(u_1, \dots, u_t,\, q_1, \dots, q_s)), \tag{2.2}$$

где Q_i — произвольные кванторы по подгруппам, u_i — константы из множества $\{g_1, g_2, \dots, g_k, \dots\}$, бескванторная часть формулы (2.2) приведена к дизъюктивной нормальной форме, т.е. $\Phi_i(u_1, u_2, \dots, u_t, q_1, q_2, \dots, q_s)$ не имеет кванторов, констант, кроме $u_1, u_2, \dots, u_t$, свободных переменных, кроме $q_1, q_2, \dots, q_s$, причем является конъюнкцией атомарных формул сигнатуры $\langle g_1, g_2, \dots, g_k, \dots; +; \in\rangle$, т.е.

$$\Phi_i(u_1, u_2, \dots, u_t,\, q_1, q_2, \dots, q_s) = \psi_1 \,\&\, \psi_2 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_m,$$

где ψ_i — атомарные формулы.

Предложению (2.2) соответствует следующее предложение элементно-подгрупповой теории а.г.

$$\forall x_1 \dots \forall x_t Q_1q_1 \dots Q_sq_s(\Phi_1(x_1, \dots, x_t,\, q_1, \dots, q_s) \vee \dots \\ \dots \vee \Phi_w(x_1, \dots, x_t,\, q_1, \dots, q_s)), \tag{2.3}$$

где $\forall$ — универсальные кванторы по элементам а.г. Понятно, что любому предложению элементно-подгрупповой теории абелевых групп сигнатуры $\langle +, \in\rangle >$ с универсальными кванторами по элементам и произвольными кванторами по подгруппам может однозначно сопоставлена формула вида (2.2), определенная на моделях вида (2.1).

Определим систему аксиом Σ для моделей вида (2.1) (в дальнейшем будет показано, что это система аксиом для элементно-подгрупповой теории абелевых групп сигнатуры $\langle +, \in\rangle$ с универсальными кванторами по элементам и произвольными кванторами по подгруппам).

Система аксиом Σ состоит из двух частей Σ_1 и Σ_2. Формулы из Σ_1 соответствуют истинным формулам универсальной элементно-подгрупповой теории абелевых групп сигнатуры $\langle +, \in\rangle$, отметим, что Σ_1 рекурсивно [1].

Формулы из Σ_2 соответствуют истинным формулам вида (2.3) с кванторной приставкой $\forall_1\forall_2\exists$ элементно-подгрупповой теории абелевых групп сигнатуры $\langle +, \in\rangle$, где $\forall_1$ — блок универсальных кванторов по элементам а.г., $\forall_2$ — блок универсальных кванторов по подгруппам а.г., $\exists$ — блок кванторов существования по подгруппам а.г.

Докажем, что Σ_2 рекурсивно (т.е. $\forall_1\forall_2\exists$-теория является разрешимым фрагментом элементно-подгрупповой теории абелевых групп сигнатуры $\langle +, \in\rangle$).

Так как блок $\exists$-кванторов по подгруппам может быть пронесен через дизъюнкцию формулы (2.3), то достаточно построить алгоритм проверки истинности для случая, когда бескванторная часть формулы (2.2) примитивная (т.е. конъюнкция атомарных формул).

Таким образом, будем строить алгоритм проверки истинности для примитивных формул сигнатуры $\langle g_1, g_2, \ldots, g_k, \ldots; +; \in\rangle$ вида

$$\begin{gathered}\Phi = \Phi^+(u_1, \ldots, u_t) \,\&\, \Phi^-(u_1, \ldots, u_t) \,\& \\ \&\, \forall\Phi_1(q_1, \ldots, q_s) \,\&\, \exists\Phi_2(v_1, \ldots, v_l),\end{gathered} \tag{2.4}$$

где формула $\Phi^+(u_1, \ldots, u_t)$ ($\Phi^-(u_1, \ldots, u_t)$) — позитивная (соответственно, негативная часть) сигнатуры $\langle +\rangle$ (конечно, u_i являются константами из $\{g_1, g_2, \ldots, g_k, \ldots\}$), $\forall\exists$ — кванторная приставка (универсальные кванторы по подгруппам $q_1, \ldots, q_s$ и кванторы существования по подгруппам $v_1, \ldots, v_l$).

Формула Φ, очевидно, может быть истина только в том случае (необходимое условие), когда истина формула

$$\Phi^+(u_1, \ldots, u_t) \,\&\, \Phi^-(u_1, \ldots, u_t) \,\&\, \forall\Phi_1(q_1, \ldots, q_s). \tag{2.5}$$

Следовательно, задача построения алгоритма проверки истинности формулы (2.4) сводится к нахождению условий истинности формулы $\Phi_3 = \exists\Phi_2(v_1, \ldots, v_l)$ (и проверке их выполнимости) на произвольной а.г. G, на которой выполнена формула (2.5).

Пусть формула $\Phi^+(u_1, \ldots, u_t)$ сигнатуры $\langle +\rangle$ выполнима на некоторой а.г. G. Тогда существует совокупность элементов $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ такая, что истина формула $\Phi(g_1, g_2, \ldots, g_n)$, где $\Phi^+(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — позитивная часть примитивной формулы (атомные формулы без отрицаний), соответственно, $\Phi^-(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — негативная часть примитивной формулы (атомные формулы с отрицанием).

Рассмотрим базис $\Xi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k\}$ а.г. G_Φ, порожденной элементами $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и определяющими соотношениями $\Phi^+(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Тогда (по определению базиса конечно порожденной группы) а.г. $G_\Phi = (\varphi_1) \times (\varphi_2) \times \ldots \times (\varphi_k)$, т.е. а.г. G_Φ является прямым произведением циклических подгрупп (φ_i) без кручения (бесконечного порядка).

Представим константы $u_1, \ldots, u_t$ линейными комбинациями элементов базиса (согласно определяющим соотношениям $\Phi^+(a_1, a_2, \ldots, a_n)$):

$$\begin{aligned} &u_1 = k_{11}\varphi_1 + k_{12}\varphi_2 + \ldots + k_{1k}\varphi_k; \\ &u_2 = k_{21}\varphi_1 + k_{22}\varphi_2 + \ldots + k_{2k}\varphi_k; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &u_t = k_{t1}\varphi_1 + k_{t2}\varphi_2 + \ldots + k_{tk}\varphi_k. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Основным инструментом решения проблемы проверки выполнимости условий в дальнейшем будет следующее, достаточно очевидное

Предложение 6. *Задача проверки линейной зависимости (или независимости) любой константы u_i от любой совокупности $u_{j1}, \dots, u_{j\alpha}$ из множества констант $\{u_1, \dots, u_t\}$ разрешима.*

Выполнимость данного предложения следует из разрешимости задач линейного и целочисленного программирования [2].

Рассмотрим более детально задачу формирования условий выполнимости формулы

$$\begin{gathered}\Phi_3 = \exists \Phi_2(v_1, \dots, v_l) = \\ = \exists v_1\Big((\theta_{11} \in v_1 \,\&\, \theta_{12} \in v_1 \,\&\, \dots \,\&\, \theta_{1m1} \in v_1) \,\&\\ \&\, (\xi_{11} \in v_1 \,\&\, \xi_{12} \in v_1 \,\&\, \dots \,\&\, \xi_{1d1} \in v_1)\Big) \,\&\\ \&\, \exists v_2\Big((\theta_{21} \in v_2 \,\&\, \theta_{22} \in v_2 \,\&\, \dots \,\&\, \theta_{2m2} \in v_2) \,\&\\ \&\, (\xi_{21} \in v_2 \,\&\, \xi_{22} \in v_2 \,\&\, \dots \,\&\, \xi_{2d2} \in v_2)\Big) \,\&\, \dots \,\&\\ \&\, \exists v_l\Big((\theta_{l1} \in v_l \,\&\, \theta_{l2} \in v_l \,\&\, \dots \,\&\, \theta_{jml} \in v_l) \,\&\\ \&\, (\xi_{l1} \in v_l \,\&\, \xi_{l2} \in v_l \,\&\, \dots \,\&\, \xi_{ldl} \in v_l)\Big).\end{gathered} \tag{2.7}$$

Очевидно, формула Φ_3 (2.7) выполнима тогда и только тогда, когда выполнима каждая конъюнкция

$$\begin{gathered}\exists v_i\Big((\theta_{i1} \in v_i \,\&\, \theta_{i2} \in v_i \,\&\, \dots \,\&\, \theta_{imi} \in v_i) \,\&\\ \&\, (\xi_{i1} \in v_i \,\&\, \xi_{i2} \in v_i \,\&\, \dots \,\&\, \xi_{idi} \in v_i)\Big),\end{gathered} \tag{2.8}$$

где i принимает значения от 1 до l.

Положим подгруппу $v_i = \text{АбГр}\,(\theta_{i1}, \theta_{i2}, \dots, \theta_{imi})$, которая и должна обеспечивать выполнимость формулы (2.8). Позитивная часть формулы (2.8) очевидно будет выполнена, а выполнимость негативной части возможна только при линейной независимости каждого элемента ξ_{ij} от совокупности элементов $\{\theta_{i1}, \theta_{i2}, \dots, \theta_{imi}\}$.

Таким образом, в силу выполнимости предложения 5 доказана

Лемма 1. $\forall_1\forall_2\exists$ *— это элементно-подгрупповая теория абелевых групп сигнатуры $\langle +, \in \rangle$, где $\forall_1$ — блок универсальных кванторов по элементам а.г., $\forall_2$ — блок универсальных кванторов по подгруппам а.г., $\exists$ — блок кванторов существования по подгруппам а.г., разрешима (т.е. совокупность формул Σ_2 рекурсивна).*

Расширим сигнатуру моделей вида (2.1) формульными предикатами:

$$\begin{gathered}\chi(g_{i1}, \dots, g_{ik}) = \exists h(g_{i1} \in h \,\&\, \dots \,\&\, g_{is} \in h \,\&\\ \&\, g_{is+1} \in h \,\&\, \dots \,\&\, g_{ik} \in h),\end{gathered} \tag{2.9}$$

где $g_{i1}, \dots, g_{ik}$ — константы (элементы а.г.).

Лемма 2. *Теория односновных моделей вида*

$$M = \langle A;\, g_1, g_2, \dots, g_k, \dots;\, +;\, \in,\, \{\chi(g_{i1}, \dots, g_{ik})\}\rangle, \tag{2.10}$$

где g_i — константы (элементы а.г.), A — множество подгрупп а.г., $+$ — групповая операция, $\in$ — отношение принадлежности элемента а.г. подгруппе, $\{\chi(g_{i1}, \dots, g_{ik})\}$ — совокупность формульных предикатов (2.9)*, модельно полна.*

Доказательство. Пусть односновная модель

$$M_1 = \langle A_1;\, g_1, g_2, \dots, g_k, \dots;\, +;\, \in,\, \{\chi(g_{i1}, \dots, g_{ik})\}\rangle \tag{2.11}$$

является расширением модели M (2.10). Тогда основное множество A включено в A_1. Для доказательства леммы будем использовать критерий Робинсона в форме предложения 4 [5]. Рассмотрим произвольную конечную подмодель $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ из A_1, такую, что $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \cap A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Докажем существование элементов $\{b_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_n\}$ из A, таких, что диаграммы подмоделей $D\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и $D\{a_1, a_2, \dots, a_k, b_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_n\}$ изоморфны (при естественном соответствии $a_i \leftrightarrow a_i$; $a_{k+j} \leftrightarrow b_{k+j}$).

Доказательство будем вести индукцией по числу $n - k$. Основание индукции при $n = k$ очевидно.

Предположим по индукции, что существуют элементы $\{b_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_{n-1}\}$ из A такие, что диаграммы подмоделей $D\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$ и $D\{a_1, a_2, \dots, a_k,\, b_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_{n-1}\}$ изоморфны. Пусть часть диаграммы $D\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, относящаяся к подгруппе a_n, имеет вид

$$g_{i1} \in a_n \;\&\; \dots \;\&\; g_{is} \in a_n \;\&\; g_{j1} \in a_n \;\&\; \dots \;\&\; g_{jk} \in a_n. \tag{2.12}$$

Сопоставим формуле (2.12) формульный предикат

$$\begin{gathered} \chi(g_{i1}, \dots, g_{is}, g_{j1}, \dots, g_{jk}) = \\ = \exists h(g_{i1} \in h \;\&\; \dots \;\&\; g_{is} \in h \;\&\; g_{j1} \in h \;\&\; \dots \;\&\; g_{jk} \in h). \end{gathered} \tag{2.13}$$

Тогда предикат $\chi(g_{i1}, \dots, g_{is}, g_{j1}, \dots, g_{jk})$ истинен на модели A_1 и, следовательно, истинен на модели A. Тогда элемент из A, который при подстановке вместо h обеспечивает истинность формульного предиката (2.13), и является искомым b_n, что доказывает индукционный шаг и лемму. □

Лемма 3. *Теория односновных моделей вида* (2.1)

$$M = \langle A;\, g_1, g_2, \dots, g_k, \dots;\, +;\, \in\rangle$$

имеет элементарный признак эквивалентности, состоящий из $\exists\forall$-формул.

Доказательство. Непосредственное следствие предложения 5 [4] и леммы 2. □

Теорема 1. *Элементно-подгрупповая теория абелевых групп без кручения сигнатуры σ с универсальными кванторами по элементам и произвольными кванторами по подгруппам разрешима.*

Доказательство. Как было показано выше, достаточно показать разрешимость теории класса K одноосновных моделей вида (2.1)

$$M = \langle A;\, g_1, g_2, \ldots, g_k, \ldots;\, +;\, \in\rangle.$$

По ранее доказанным леммам известно, что $\mathrm{Th}\,(K)$ имеет разрешимые универсальную (совокупность формул Σ_1) и $\forall\exists$-теории (совокупность формул Σ_2), а также рекурсивный элементарный признак эквивалентности χ, состоящий из $\exists\forall$-формул. Положим $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

Для доказательства теоремы достаточно применить предложение 3 [4], где требуется доказать, что любая Σ-выполнимая формула из χ является выполнимой на абелевых группах без кручения сигнатуры σ. Решение этого вопроса сводится к решению *проблемы полноты системы подгрупп.*

Совокупность подгрупп $H = \{H_1, H_2, \ldots, H_m\}$ а.г. G назовем *полной* на совокупности элементов $X = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \subset G$, если для любой подгруппы H из G существует i такое, что $X \cap H = X \cap H_i$. Пусть $D^+\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ — позитивная часть диаграммы элементов в сигнатуре $\langle + \rangle$ (групповая операция а.г.). Представим элементы $g_1, g_2, \ldots, g_n$ линейными комбинациями в некотором базисе $\Xi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k\}$ аналогично (2.6). Тогда вопрос о полноте совокупности подгрупп $H = \{H_1, H_2, \ldots, H_m\}$ решается на основе проверки линейной независимости элементов g_i от совокупностей элементов, принадлежащих подгруппам H_j (соответствии с диаграммой совокупности $D\{g_1, g_2, \ldots, g_n, H_1, H_2, \ldots, H_m\}$ в сигнатуре $\sigma = \langle +, \in\rangle$. Теорема доказана. □

3. Элементно-подгрупповая теория абелевых групп

В настоящем разделе, как отмечалось в начале статьи, авансируется разрешимость всей элементно-подгрупповой теории абелевых групп сигнатуры $\sigma = \langle +, \in\rangle$ с универсальными кванторами по элементам и произвольными кванторами по подгруппам.

Схема доказательства не отличается от случая а.г. без кручения до построения алгоритма проверки истинности для примитивных формул вида (2.4) сигнатуры $\langle g_1, g_2, \ldots, g_k, \ldots;\, +;\, \in\rangle$.

Действительно, для случая а.г. с кручением, базис $\Xi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k\}$ состоит из двух частей: $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_w\}$ — элементы конечного порядка, $\{\varphi_{w+1}, \phi_{w+2}, \ldots, \varphi_k\}$ — элементы бесконечного порядка.

В этом случае рассмотрения должны вестись для а.г. вида

$$(\varphi_1) \times (\varphi_2) \times \ldots \times (\varphi_w) \times (\varphi_{w+1}) \times (\varphi_{w+2}) \times \ldots \times (\varphi_k), \tag{3.1}$$

где $(\varphi_1) \times (\varphi_2) \times \ldots \times (\varphi_w)$ — конечная а.г., а все остальные циклические подгруппы $(\varphi_{w+1}) \times (\varphi_{w+2}) \times \ldots \times (\varphi_k)$ — имеют бесконечное количество элементов.

Представим а.г. G_Φ (3.1) прямым произведением конечной а.г. $G_1 = \varphi_1) \times (\varphi_2) \times \ldots \times (\varphi_w)$ и а.г. без кручения $G_2 = (\varphi_{w+1}) \times (\varphi_{w+2}) \times \ldots \times (\varphi_k)$, т.е. $G_\Phi = G_1 \times G_2$.

Предположим, что все конечные циклические (φ_i) имеют порядки, являющиеся степенями простых чисел (в частности, неразложимы далее в произведение циклических групп).

Рассмотрим множество а.г. Ξ, на которых выполнима формула $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (2.4), т.е. $\Xi = \{H \mid H = \text{АбГр}\,(g_1, g_2, \ldots, g_n)$, формула $\Phi(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ истина$\}$. С точностью до изоморфизма множество а.г. Ξ групп конечно и имеет ранг не более k в соответствии с представлением (3.1).

Таким образом, задача проверки линейной зависимости (или независимости) любой константы u_i от любой совокупности $u_{j1}, \ldots, u_{j\alpha}$ (предложение 5) из множества констант $\{u_1, \ldots, u_t\}$ существенно осложняется и требует довольно сложных рассмотрений. Тем не менее, эта задача разрешима, и на основании этого могут быть доказаны аналоги лемм 1–3, а затем и аналог теоремы.

Список литературы

1. Кокорин А. И. Вопросы разрешимости расширенных теорий / А. И. Кокорин, А. Г. Пинус // Успехи мат. наук. – М., 1978. – № 3. – С. 25–56.
2. Корбут А. А. Дискретное программирование / А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельщтейн. – М. : Наука, 1969. – 245 с.
3. Мальцев А. И. Алгебраические системы / А. И. Мальцев. – М. : Наука, 1967. – 324 с.
4. Мартьянов В. И. О теории абелевых групп с предикатами, выделяющими подгруппы, и операциями эндоморфизмов / В. И. Мартьянов // Алгебра и логика. – 1975. – № 5. – С. 536–542.
5. Робинсон А. Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры / А. Робинсон. – М. : Наука, 1967. – 287 с.
6. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы / Л. Фукс. – М. : Мир, 1977. – Т. 2. – 415 с.

V. I. Martyanov

About the element-subgroup theory of Abelian groups

Abstract. The solvability of the theory of element-subgroup of Abelian torsion-free groups with universal quantifiers over the elements and arbitrary quantifiers over subgroups is proved.

Keywords: model theory, elementary theories decidability.

Мартьянов Владимир Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, Национальный исследовательский Иркутский государственный технический университет, 664047, ул. Лермонтова, 83 (ad@istu.edu)

Vladimir Martyanov, professor, National Research Irkutsk State Technical University, 83, Lermontov St., Irkutsk, 664047 (ad@istu.edu)