ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ГРУПП К АНАЛИЗУ НЕКОТОРЫХ ФИЗИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Бутырин Владимир Иванович
Доцент, канд. техн. наук,
Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск

АННОТАЦИЯ

Приведен пример построения группы для анализа физической модели. Определено понятие включающего элемента. На примере показано приложение теории групп к анализу физических моделей. Показано, что математически непротиворечиво существование скоростей больше скорости света.

ABSTRACT

An example of derivation of a group for analysis of a physical model is considered. A concept of including element is defined. An example is given to demonstrate applicability of the group theory to analysis of physical models. The possibility of speed higher than the speed of light is shown to be mathematically not contradictory.

Ключевые слова: *теория групп, включающий элемент, физическая модель, скорость света.*

Keywords: *group theory, including element, physical model, speed of light*

Пример группы для анализа физических моделей

Пусть дана группа G_1 элементов $a_1,\ b_1,\ c_1,\ \ldots$. Рассмотрим множество G_2 $\left(G_1 \bigcap G_2 = \varnothing\right)$ элементов $a_2,\ b_2,\ c_2,\ \ldots$ таких, что для них бинарная операция, заданная на множестве G_1, определена следующим образом:

1. $\forall a_1 \in G_1, \forall a_2 \in G_2 \Rightarrow a_1 \circ a_2 \in G_2$;

2. $\forall a_2, b_2 \in G_2 \Rightarrow a_2 \circ b_2 \in G_1$;

3.

$$\forall a,b,c \in G_1 \bigcup G_2 \Rightarrow$$
$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c.$$

Теорема 1. Множество $G = G_1 \bigcup G_2$ есть группа.

Доказательство: 1. Покажем существование (левого) единичного элемента на множестве G. На множестве G_1 единичный элемент существует по определению. Покажем существование единичного элемента для элементов множества G_2. Пусть $e_1 \in G_1$ левый единичный элемент в G_1. Тогда $\forall a_1 \in G_1,\ \forall a_2 \in G_2$

$$\left(e_1 \circ a_1\right) \circ a_2 = a_1 \circ a_2 = b_2,$$

но $\left(e_1 \circ a_1\right) \circ a_2 = e_1 \circ (a_1 \circ a_2) = e_1 \circ b_2$.

Следовательно $e_1 \circ b_2 = b_2$, т.е. e_1 есть левый единичный элемент в $G = G_1 \bigcup G_2$. Аналогично показывается существование правого единичного элемента.

2. Покажем существование обратных элементов на множестве G. На множестве G_1 обратные элементы существует по определению. Покажем существование обратных элементов для всех элементов множества G_2. Рассмотрим произвольный элемент $a_2 \in G_2$.

$\forall b_2 \in G_2$ $\qquad a_2 \circ b_2 = a_1 \in G_1,$ но

$$\forall a_1 \in G_1 \quad \exists a_1^{-1} \in G_1: \ a_1^{-1} \circ a_1 = e_1$$

$$a_1^{-1} \circ (b_2 \circ a_2) = a_1^{-1} \circ a_1 = e_1.$$

В силу ассоциативности $(a_1^{-1} \circ b_2) \circ a_2 = e_1$.

Следовательно

$$\forall a_2 \in G_2 \quad \exists a_2^{-1} = a_1^{-1} \circ b_2 \in G_2: \ a_2^{-1} \circ a_2 = e_1.$$

Пример 1. $G_1 = \left(0;+\infty\right)$ группа положительных рациональных чисел по умножению, $G_2 = \left(-\infty;0\right)$ множество отрицательных рациональных чисел. Покажем, что множество $G = G_1 \bigcup G_2 = \left(0;+\infty\right) \bigcup \left(-\infty;0\right)$ группа по умножению.

1. $e = 1$ единичный элемент в группе G_1;

2. $\qquad \forall a_2, b_2 \in G_2 \ \ a_2 \circ b_2 \in G_1$

$(a_2 = -2,\ b_2 = -3,\ \ a_2 \circ b_2 = (-2) \circ (-3) = 6 \in G_1)$;

3. $\forall a_1 \in G_1, \forall a_2 \in G_2\ \ a_1 \circ a_2 \in G_2$

$(a_1 = 2,\ a_2 = -2,\ \ a_1 \circ a_2 = 2 \circ (-2) = -4 \in G_2)$;

4 . $\forall a_2 \in G_2\ \ e \circ a_2 = a_2$ $(a_2 = -3,\ \ e \circ a_2 = 1 \circ (-3) = -3 = a_2)$;

5. $\forall a_2 \in G_2\ \ \exists a_2^{-1} \in G_2 :\ \ a_2^{-1} \circ a_2 = e$

$(a_2 = -2,\ a_2^{-1} = -1/2,\ \ a_2^{-1} \circ a_2 = -1/2 \circ (-2) = 1 = e)$.

Определение 1. Назовем группу G_1 основной группой, множество G_2 - дополнением к группе G_1, группу $G = G_1 \bigcup G_2$ - объединенной группой.

Построение объединенных групп

Далее будем рассматривать только коммутативные группы.

Теорема 2. Коммутативную группу G с конечным нечетным числом элементов $2n+1$ нельзя разложить на основную группу G_1 и дополнение к ней G_2. Если группу с конечным четным числом элементов $2n$ можно разложить на основную группу G_1, содержащую m элементов, и дополнение к ней G_2, содержащее k элементов, то $k = m = n$.

Доказательство: 1. Пусть группа G содержит $2n+1$ элемента и разложена на основную группу G_1 и дополнение к ней G_2. Рассмотрим элемент $a_i \in G_2$. В G_2 содержится k элементов. $\forall b_j \in G_1\ \ \exists a_j \in G_2 :\ a_i \circ b_j = a_j$. Если $b_{j_1} \neq b_{j_2}$, то $a_{j_1} \neq a_{j_2}$. Следовательно $k \geq 2n+1-k$. Далее $\forall a_j \in G_2\ \ \exists b_j \in G_1 :\ a_i \circ a_j = b_j$. Если $a_{j_1} \neq a_{j_2}$, то $b_{j_1} \neq b_{j_2}$. Следовательно $k \leq 2n+1-k$. Тогда $k = 2n+1-k$ или $2k = 2n+1$, что невозможно. Получили противоречие.

2. Пусть в группе G содержится $2n$ элементов и возможно разложение группы на основную группу G_1 и дополнение к ней G_2. Тогда $2k = 2n$, т.е. $k = n$. Следовательно $k = m = n$.

Число n может быть как четным, так и нечетным.

Пример 2. Рассмотрим множество $G = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, состоящее из четырех элементов. Определим коммутативную бинарную операцию:

$a_1 \circ a_1 = a_1,\ a_1 \circ a_2 = a_2,\ a_1 \circ a_3 = a_3,\ a_1 \circ a_4 = a_4,$

т.е. a_1 есть единичный элемент,

$$a_2 \circ a_2 = a_1,\ a_2 \circ a_3 = a_4,\ a_2 \circ a_4 = a_3,$$
$$a_3 \circ a_3 = a_2,\ a_3 \circ a_4 = a_1,\ a_4 \circ a_4 = a_2.$$

Для a_2 обратным элементом является сам элемент a_2. Элементы a_3 и a_4 являются взаимно обратными. Множество G является группой. Представим множество G как объединение двух множеств $G_1 = (a_1, a_2)$ и $G_2 = (a_3, a_4)$.

Множество G_1 является группой. $\forall a_i \in G_2\ (i = 3, 4)$

1. $\forall j = 1, 2\ \ a_j \circ a_i \in G_2$;

2. $\forall j = 3, 4\ \ a_j \circ a_i \in G_1$,

т.е. G_2 является дополнением к группе G_1, а G является объединенной группой. Здесь n - четное.

Пример 3. Рассмотрим множество $G = (a_1, a_2)$. Определим коммутативную бинарную операцию: $a_1 \circ a_1 = a_1,\ a_1 \circ a_2 = a_2,\ a_2 \circ a_2 = a_1$.

Здесь a_1 является единичным элементом, a_2 есть обратный элемент к самому себе. Множество G является группой. Представим множество G как объединение двух множеств $G = G_1 \bigcup G_2$, где $G_1 = (a_1)$, $G_2 = (a_2)$. Множество G_1 есть группа. Рассмотрим множество G_2:

$a_1 \circ a_2 = a_2 \in G_2,\ a_2 \circ a_2 = a_1 \in G_1,$

т.е. множество G_2 есть дополнение к группе G_1. Следовательно, множество G - объединенная группа.

Здесь n - нечетное.

Следствие 1. В конечной объединенной группе существует, может быть не один, элемент обратный самому себе. Он может принадлежать как основной группе, если n - четное, так и дополнению к ней, если n - нечетное.

Теорема 3. Пусть дана группа G_1, содержащая n элементов a_i, и множество G_2, содержащее n элементов b_i. На множестве G_2 можно построить дополнение к группе G_1, если, выбрав произвольный элемент $b_1 \in G_2$, задать операцию $b_1 \circ b_1 = a_k \in G_1$, выбрать для него обратный элемент $b_1^{-1}: \; b_1^{-1} \circ b_1 = e$ ($a_1 = e$ - единичный элемент) и $\forall i = 1,\dots,n$ определить операцию $b_1 \circ a_i = b_i \in G_2$.

Доказательство: 1.

$\forall i,j \; b_i \circ a_j = (b_1 \circ a_i) \circ a_j = b_1 \circ (a_i \circ a_j) = b_1 \circ a_l \in G_2$. Т.к. $\forall l \; b_1 \circ a_l$ операция определена, то определена и операция $b_i \circ a_j$.

2.

$\forall i,j \quad b_i \circ b_j = (b_1 \circ a_i) \circ (b_1 \circ a_j) = (b_1 \circ b_1) \circ a_i \circ a_j = a_k \circ a_i \circ a_j$, т.е. операция $b_i \circ b_j$ определена.

3. $b_1^{-1} \circ b_1 = b_1^{-1} \circ (a_i^{-1} \circ a_i) \circ b_1 = (b_1^{-1} \circ a_i^{-1}) \circ (a_i \circ b_1) = (b_1^{-1} \circ a_i^{-1}) \circ b_i = e$,

т.е. $\forall i \quad \exists b_i^{-1} = b_1^{-1} \circ a_i^{-1} \in G_2$.

Пример 4. Рассмотрим два множества $G_1 = (a_1, a_2, a_3)$ и $G_2 = (b_1, b_2, b_3)$. Определим на множестве G_1 бинарную операцию

$$a_1 \circ a_1 = a_1, \; a_1 \circ a_2 = a_2, \; a_1 \circ a_3 = a_3,$$

т.е. a_1 - единичный элемент,

$$a_2 \circ a_2 = a_3, \; a_2 \circ a_3 = a_1, \; a_3 \circ a_3 = a_2,$$

т.е. элементы a_2 и a_3 взаимно обратные. Множество G_1 есть группа. Выберем на множестве G_2 элемент b_1. Определим бинарную операцию $b_1 \circ b_1 = a_3$, выберем обратный элемент $b_1^{-1} = b_2: \; b_2 \circ b_1 = a_1$ и определим операции

$$b_1 \circ a_1 = b_1, \; b_1 \circ a_2 = b_2, \; b_1 \circ a_3 = b_3.$$

Покажем, что определены бинарные операции

$$a_1 \circ b_2, \; a_1 \circ b_3, \; a_2 \circ b_2, \; a_2 \circ b_3, \; a_3 \circ b_2,$$
$$a_3 \circ b_3, \; b_1 \circ b_3, \; b_2 \circ b_2, \; b_2 \circ b_3, \; b_3 \circ b_3.$$

Действительно,

$$a_1 \circ b_2 = a_1 \circ (b_1 \circ a_2) = (a_1 \circ b_1) \circ a_2 = b_1 \circ a_2 = b_2,$$

$$a_1 \circ b_3 = a_1 \circ (b_1 \circ a_3) = (a_1 \circ b_1) \circ a_3 = b_1 \circ a_3 = b_3,$$

т.е. a_1 - единичный элемент на множестве G_2. Далее,

$$b_3 \circ b_3 = (b_1 \circ a_3) \circ (b_1 \circ a_3) = (b_1 \circ b_1) \circ (a_3 \circ a_3) = a_3 \circ a_2 = a_1,$$

т.е. b_3 - элемент, обратный самому себе. Также

$$a_2 \circ b_2 = a_2 \circ (b_1 \circ a_2) = b_1 \circ (a_2 \circ a_2) = b_1 \circ a_3 = b_3,$$

$$b_2 \circ b_3 = (b_1 \circ a_2) \circ (b_1 \circ a_3) = (b_1 \circ b_1) \circ (a_2 \circ a_3) = a_3 \circ a_1 = a_3.$$

Аналогично показывается, что

$$a_2 \circ b_3 = b_1, \; a_3 \circ b_2 = b_1,$$
$$a_3 \circ b_3 = b_2, \; b_1 \circ b_3 = a_2, \; b_2 \circ b_2 = a_2$$

Очевидно, что G_2 есть дополнение к группе G_1. Следовательно, G_1 есть основная группа, а $G = G_1 \cup G_2$ - объединенная группа.

Теорема 4. В коммутативной группе G с конечным нечетным числом элементов не существует элемента обратного самому себе, кроме нулевого.

Доказательство: Пусть $\exists a_1 \in G: \; a_1 \neq e, \; a_1 \circ a_1 = e$. Тогда $\exists a_2 \in G: \; a_2 \neq a_1, \; a_2 \neq e, \; a_2 \circ a_2 = e$. Рассмотрим элемент $a_3 \in G: \; a_3 = a_1 \circ a_2$. Тогда $a_3 \neq e, \; a_3 \neq a_1, \; a_3 \neq a_2, \; a_3 \circ a_3 = e$. Отсюда $\exists a_4 \in G: \; a_4 \neq a_i \; (i = 1,2,3), \; a_4 \neq e, \; a_4 \circ a_4 = e$. Пусть существует последовательность $2k$ элементов обратных самому себе $a_i \circ a_i = e \; (i = 1,\dots,2k)$. Покажем, что эта последовательность бесконечная. Рассмотрим элемент $a_{2k+1} = a_1 \circ a_{2k}$. Очевидно, что $a_{2k+1} \neq e,\ a_{2k+1} \neq a_1,\ a_{2k+1} \neq a_{2k}$. Покажем, что $a_{2k+1} \neq a_j \quad (j = 2,...,2k-1)$. Пусть $j = 2i \ (i = 1,...,k-1)$. Тогда $a_1 \square\ a_{2k} = a_{2i}$ или $a_1 \square\ a_1 \square\ a_{2k} = a_1 \square\ a_{2i}$, т.е. $a_{2k} = a_1 \square\ a_{2i} = a_{2i+1}$, что неверно. Пусть $j = 2i+1 \ (i = 1,...,k-1)$. Тогда $a_1 \square\ a_{2k} = a_{2i+1}$. Отсюда $a_1 \square\ a_{2k} = a_1 \square\ a_{2i}$, т.е. $a_{2k} = a_{2i}$, что тоже неверно. Следовательно $\forall k \quad \exists a_{2k+1}: \ a_{2k+1} \square\ a_{2k+1} = e$. Следовательно, последовательность бесконечна. Получили противоречие.

Определение 2. Группу G с бесконечным числом элементов назовем нечетной группой (группой содержащей нечетное число элементов), если в ней не существует элемента, обратного самому себе кроме нулевого. В противном случае группу назовем четной (группой содержащей четное число элементов).

Пример 5. Рассмотрим множество $G = \left(-\infty;0\right) \bigcup \left(0;+\infty\right)$, на котором задана операция умножения. Множество G является группой. Его можно представить как объединение множеств $G = G_1 \bigcup G_2 \quad \left(G_1 = \left(0;+\infty\right),\ G_2 = \left(-\infty;0\right)\right)$. Множество G_1 является основной группой, множество G_2 есть дополнение к группе G_1, множество G есть объединенная группа (см. пример 1). Каждому элементу множества $a \in G_1$ можно поставить в соответствие элемент множества $b \in G_2: \quad b = -a$, т.е. множество G является четной группой. И, действительно, $\exists b = -1 \in G_2: \ b \square\ b = (-1) \square\ (-1) = 1 = e \in G_1$, т.е. в G существует элемент обратный самому себе и отличный от единичного элемента. Т.к. $b = -1 \in G_2$, то n - нечетное (см. следствие 1). Действительно, каждому элементу $a \in G_1$ можно поставить в соответствие элемент $a^{-1} \in G_1: \quad a^{-1} \square\ a = e$ и дополнительно существует единичный элемент e.

Включающий элемент

Рассмотрим объединенную группу $G = G_1 \bigcup G_2$, где G_1 - основная группа, G_2 - дополнение к G_1 и некоторый элемент $A \quad \left(A \bigcap G = \varnothing\right)$ такой, что

1. $A \square\ A = A$,

2. $\forall a \in G \Rightarrow a \square\ A = A \square\ a = A$;

3 $\forall a,b \in G \Rightarrow (a \square\ b) \square\ A = a \square\ (b \square\ A) = a \square\ A = A$.

Лемма 1. Объединение $A \bigcup G$ не является группой.

Доказательство: Пусть $\exists A^{-1}: \quad A^{-1} \square\ A = e$. Но тогда $\forall a \in G \ (a \neq e) \Rightarrow A^{-1} \square\ A = A^{-1} \square\ \left(A \square\ a\right) = \left(A^{-1} \square\ A\right) \square\ a = e \square\ a$, т.е. $e \square\ a = e$. Получили противоречие.

Определение 3. Назовем элемент A - включающим элементом, а объединение $G_1 \bigcup G_2 \bigcup A$ - объединенной группой с включающим элементом.

Можно ввести понятие объединенных групп с n включающими элементами, но для них операция $A_i \square\ A_j \quad (i \neq j)$ не определена.

Пример 6. Рассмотрим объединенную группу по умножению $G = G_1 \bigcup G_2 \ \left(G_1 = (0;+\infty),\ G_2 = (-\infty;0)\right)$ (см. пример 5) и элемент $A = 0$. Покажем, что A - включающий элемент. $\forall a \in G \Rightarrow a \square\ A = a \square\ 0 = 0$. Далее, не существует $A^{-1}: \quad A^{-1} \square\ A = e = 1$. Т.е. A включающий элемент и множество $G_1 \bigcup G_2 \bigcup A$ есть объединенная группа с включающим элементом.

Пример применения теории групп к анализу физических моделей

Пусть задано одномерное пространство скоростей $v \in V = \left(-\infty;+\infty\right)$ на котором задана операция сложения [1, с. 58] $v = \dfrac{v_1 + v_2}{1 + \dfrac{v_1 v_2}{c^2}}$, где c - скорость света.

Покажем, что V есть объединенная группа с включающими элементами.

Рассмотрим множество $V_1 = (-c;c)$.

1. $\forall v_1 = k_1 c, v_2 = k_2 c \quad \left(\left|k_1\right| < 1, \left|k_2\right| < 1\right)$

$$v = v_1 \square\ v_2 = \frac{k_1c + k_2c}{1 + \frac{k_1ck_2c}{c^2}} = \frac{k_1 + k_2}{1 + k_1k_2}c = k_3c \in V_1$$
,

т.к. $|k_3| < 1$, что легко проверяется $\forall k_1, k_2$. Например, $k_1 = k_2 = 0,5$. Тогда

$$k_3 = \frac{0,5 + 0,5}{1 + 0,5 \cdot 0,5} = \frac{1}{1,25} < 1.$$

2. Существует нулевой (единичный) элемент $e = 0:\ \forall v_1 = k_1c\ \left(|k_1| < 1\right)$ т.к.

$$v = e \square\ v_1 = \frac{e + v_1}{1 + \frac{ev_1}{c^2}} = \frac{0 + k_1c}{1 + \frac{0k_1c}{c^2}} = k_1c = v_1.$$

3. Для всякого элемента $v = kc\ \left(|k| < 1\right)$ существует обратный элемент $v^{-1} = -kc$ такой, что

$$v = v \square\ v^{-1} = \frac{kc - kc}{1 - \frac{kckc}{c^2}} = \frac{k - k}{1 - k^2}c = 0 = e.$$

Итак, множество $V_1 = (-c; c)$ есть группа.

Рассмотрим множество $V_2 = \left(-\infty; -c\right) \cup \left(c; +\infty\right)$.

1. $\forall v_1 = k_1c, v_2 = k_2c \quad \left(|k_1| < 1, |k_2| > 1\right)$

$$v = v_1 \square\ v_2 = \frac{k_1c + k_2c}{1 + \frac{k_1ck_2c}{c^2}} = \frac{k_1 + k_2}{1 + k_1k_2}c = k_3c \in V_2$$

, т.к. $|k_3| > 1$.

2. $\forall v_1 = k_1c, v_2 = k_2c \quad \left(|k_1| > 1, |k_2| > 1\right)$

$$v = v_1 \square\ v_2 = \frac{k_1c + k_2c}{1 + \frac{k_1ck_2c}{c^2}} = \frac{k_1 + k_2}{1 + k_1k_2}c = k_3c \in V_1$$

, т.к. $|k_3| < 1$.

3. $\forall v_1 = k_1c\ \left(|k_1| > 1\right)\ \exists v_1^{-1} = -k_1c:$

$$v = v_1 \square\ v_1^{-1} = \frac{k_1c - k_1c}{1 + \frac{k_1ck_1c}{c^2}} = \frac{k_1 - k_1}{1 + k_1^2}c = 0 = e \in V_1$$
,

т.е. существует обратный элемент.

Итак, множество V_2 есть дополнение к группе V_1.

Рассмотрим элементы $v_1 = k_1c \in V_2,\ v_2 = k_2c \in V_2$ $(k_1 \to +\infty,\quad k_2 \to -\infty)$.

$$\forall v_3 = k_3c \in V_1 \cup V_2 \quad \left(|k_3| \neq 1\right)$$

$$v = v_1 \square\ v_3 = \lim_{k_1 \to +\infty} \frac{k_1c + k_3c}{1 + \frac{k_1ck_3c}{c^2}} = \lim_{k_1 \to +\infty} \frac{k_1 + k_3}{1 + k_1k_3}c = \frac{c}{k_3}$$
,

$$v = v_2 \square\ v_3 = \lim_{k_2 \to -\infty} \frac{k_2c + k_3c}{1 + \frac{k_2ck_3c}{c^2}} = \lim_{k_2 \to -\infty} \frac{k_2 + k_3}{1 + k_2k_3}c = \frac{c}{k_3}$$
,

т.е. элементы $v_1 = k_1c\ \left(k_1 \to +\infty\right),\ v_2 = k_2c\ \left(k_2 \to -\infty\right)$ эквивалентны.

Рассмотрим бинарные операции

$$v = v_1 \square\ v_1 = \lim_{k_1 \to +\infty} \frac{k_1c + k_1c}{1 + \frac{k_1ck_1c}{c^2}} = \lim_{k_1 \to +\infty} \frac{2k_1}{1 + k_1^2}c = 0 = e,$$

$$v = v_2 \square\ v_2 = \lim_{k_2 \to -\infty} \frac{k_2c + k_2c}{1 + \frac{k_2ck_2c}{c^2}} = \lim_{k_2 \to -\infty} \frac{2k_2}{1 + k_2^2}c = 0 = e,$$

$$v = v_1 \square\ v_2 = \lim_{\substack{k_1 \to +\infty \\ k_2 \to -\infty}} \frac{k_1 c + k_2 c}{1 + \frac{k_1 c k_2 c}{c^2}} = \lim_{\substack{k_1 \to +\infty \\ k_2 \to -\infty}} \frac{k_1 + k_2}{1 + k_1 k_2} c = 0 = e \cdot$$

Следовательно, элементы v_1 и v_2 суть эквивалентные и обратные самим себе.

Значит, множество V_1 есть основная нечетная группа (см. следствие 1), множество V_2 является дополнением к ней, множество $\tilde{V} = V_1 \bigcup V_2$ есть объединенная четная группа (т.к. существует элемент обратный самому себе и не равный нулевому). Группа V_1 содержит нечетное число элементов.

Рассмотрим элементы

$$\tilde{n}_1 \neq\ ,\quad {}_2c = - \quad \cdot\ \forall v_3 = k_3 c \in G_1 \bigcup G_2 \quad \left(|k_3| \neq 1\right)$$

$$v = v_1 \square\ v_3 = \frac{c + k_3 c}{1 + \frac{c k_3 c}{c^2}} = \frac{1 + k_3}{1 + k_3} c = c = v_1,$$

$$v = v_2 \square\ v_3 = \frac{-c + k_3 c}{1 - \frac{c k_3 c}{c^2}} = \frac{-1 + k_3}{1 - k_3} c = -c = v_2 .$$

Следовательно, элементы $\tilde{n}_1 \neq$, ${}_2c = -$ являются включающими элементами. Необходимо отметить, что операция $v_1 \square\ v_2$ не определена.

Значит, множество V есть объединенная группа с включающими элементами c и $-c$.

Заключение

1. Полученные результаты говорят о том, что теория групп позволяет анализировать структуру физических моделей. В частности, математически непротиворечиво существование скоростей больше скорости света.
2. Проводя аналогичные рассуждения можно прийти к понятию радиуса вселенной (включающий элемент), расстояниям меньше радиуса вселенной (основная группа) – наша вселенная и расстояниям больше радиуса вселенной (дополнение к основной группе) – альтернативная вселенная.
3. Аналогичные построения могут привести к понятию абсолютного ускорения (аналог скорости света).
4. Значение включающего элемента A в каждой точке пространства может быть различным и зависеть от физических характеристик точки измерения.

Список литературы

1. Трофимова Т.И. Курс физики: учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа, 2001. – 542с.