ТРИАНГУЛЯЦИЯ ДЕЛОНЕ: ИТЕРАТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ТРИАНГУЛЯЦИИ

Пауков Д. П.
ДонНТУ
Кафедра прикладной математики и информатики
paukoff@fromru.com

Abstract

Paukov D. P. Triangulation Delaunay: iterative algorithms of construction of a triangulation. *Base concepts of a triangulation Delaunay, a condition Delaunay, and also two iterative algorithms of construction of a triangulation Delaunay are considered, job evaluations of their complexity are given.*

Введение

Проблема построения триангуляции возникает при решении задач в таких предметных областях как механика, машинная графика, геоинформационные системы. Триангуляция выполняется, в частности, при построении графиков функций, при генерации и моделировании сложных ландшафтов, при расчете тонких плит методом конечных элементов. Все эти задачи требуют разбиения пространства решения на конечные области (элементы). Для плоских задач это могут быть простые плоские фигуры (треугольник), а для пространственных – элементы должны заключать в себе объем, например, шар или куб.

Триангуляцией [1, 2] называется планарное разбиение плоскости на плоские фигуры, из которых одна является внешней бесконечностью, а остальные – треугольниками. Будем рассматривать задачу построения триангуляции по заданному набору S двумерных точек. Эта задача состоит в соединении заданных точек из S прямыми отрезками так, чтобы никакие отрезки не пересекались. Решение этой задачи неоднозначно, поэтому возникает проблема построения оптимальной триангуляции. Оптимальной называют такую триангуляцию, у которой сумма длин всех ребер минимальна, однако построение такой триангуляции имеет сложность $O(e^N)$, то есть является NP-полной задачей [1,3,4]. Это ограничивает применение алгоритмов построения оптимальной триангуляции на практике.

Триангуляция Делоне (см. рисунок 1) – это такая триангуляция, при которой ни одна из точек набора S не попадает внутрь ни одной из описанных вокруг полученных треугольников окружностей. Впервые задача построение подобной триангуляции была поставлена советским математиком Борисом Николаевичем Делоне в 1934 г. [2].

С тех пор разработано множество алгоритмов построения триангуляции Делоне (в работе [1] приводится классификация алгоритмов: алгоритмы прямого построения, алгоритмы слияния, двухпроходные алгоритмы, итеративные алгоритмы), трудоемкость которых составляет $O(N^2)$, для некоторых случаев $O(N \log N)$ или $O(N)$. Однако по настоящее время проблема построения триангуляции является актуальной, что связано с неустойчивостью и неудовлетворительным временем работы многих существующих алгоритмов на современных наборах данных.

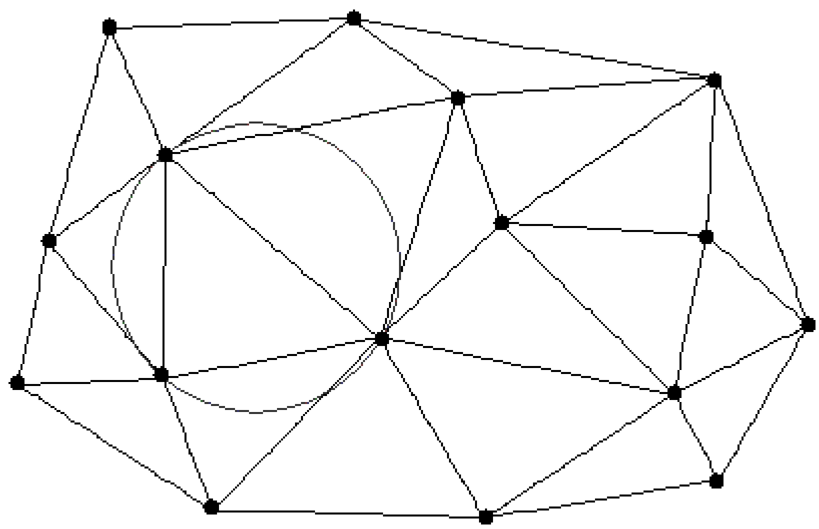

Рисунок 1 – Триангуляция Делоне

Триангуляция Делоне не является оптимальной, но она строит набор треугольников, которые «стремятся к равноугольности» и имеет некоторые важные свойства [1, 5, 6]: триангуляция Делоне обладает максимальной суммой минимальных углов всех своих треугольников среди всех возможных триангуляций на заданном наборе точек; триангуляция Делоне обладает минимальной суммой радиусов окружностей, описанных около треугольников, среди всех возможных триангуляций на заданном наборе точек. Эти свойства можно использовать для построения триангуляции Делоне.

Итеративный алгоритм

Итеративный процесс предусматривает последовательное пошаговое построение триангуляции, в время которого выполняется добавление нового треугольника, удовлетворяющего условию Делоне, в уже построенную триангуляцию Делоне.

При добавлении точки в уже построенную триангуляцию может возникнуть четыре ситуации.

1. Добавляемая точка попала во внутрь треугольника, принадлежащего триангуляции Делоне.
2. Точка находится за границей триангуляции.
3. Точка лежит на ребре треугольника.
4. Точка совпадает с другой точкой, являющейся одной из вершин треугольника, принадлежащего триангуляции Делоне.

В первом случае треугольник необходимо разбить на части и выполнить проверки условия Делоне, при необходимости перестроить треугольники. Во втором случае необходимо будет построить новые внешние треугольники, проверить условие Делоне. В третьем случае ребро разбивается на две части, вместе с треугольниками, которым принадлежит ребро. В последнем случае – точка просто отбрасывается.

Трудоемкость такого алгоритма состоит из трудоемкости поиска треугольника, к которому добавляется новая точка, трудоемкости построения новых треугольников, проверки условия Делоне и трудоемкости перестроения триангуляции. Трудоемкость поиска треугольника, к которому добавляется новая точка, оценивается как O(N). Построение новых треугольников и проверка условия Делоне в среднем осуществляется за фиксированное число операций. Случай, когда добавляемая точка находится за пределами уже построенной триангуляции можно опустить, если первоначально стартовать с треугольника, охватывающего все точки будущей триангуляции [7]. При каждом добавлении новой точки к триангуляции может возникнуть необходимость перестроения всей триангуляции, трудоемкость такой операции O(N). Общая сложность итеративного алгоритма составляет $O(N^2)$.

Для улучшения показателей сложности можно усовершенствовать алгоритм, путем ускорения поиска треугольника. Например, использовать для хранения треугольников не линейные структуры, а деревья. Тогда сложность поиска составит в среднем O(log N).

Модифицированный итеративный алгоритм

Рассмотрим несколько другой алгоритм, идея которого аналогична предыдущему, но способ добавления точек к триангуляции другой. Этот алгоритм заключается в том, что для добавления берется не любая точка, а ищется такая, которая в совокупности с уже входящими в триангуляцию ребрами не нарушала бы условия Делоне. На рисунке 3 показано несколько шагов алгоритма добавления новых точек к триангуляции Делоне.

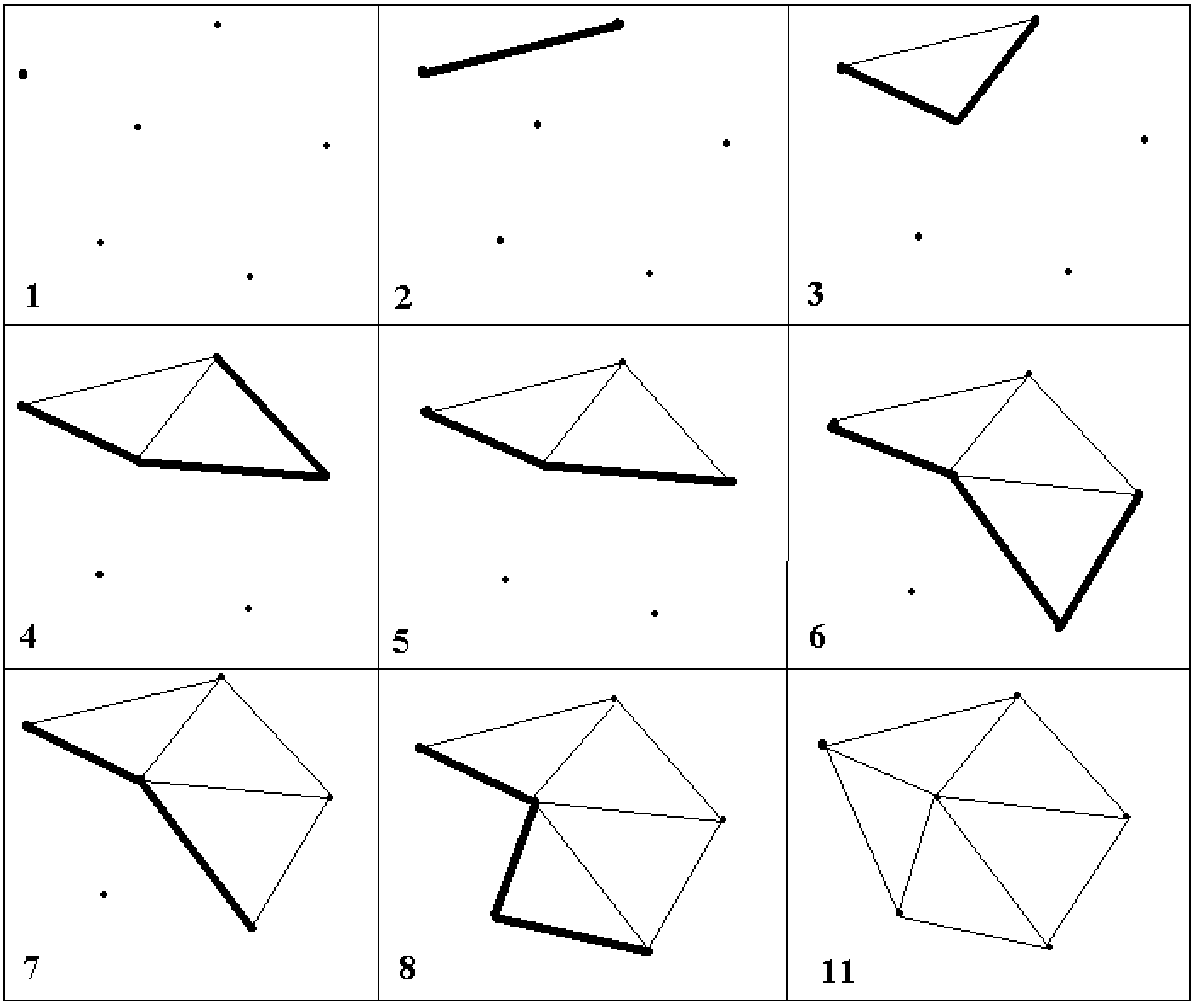

Рисунок 3 – Пошаговое добавление ребер к триангуляции Делоне

Все ребра, образующие триангуляцию можно разделить на три группы.

1. Ребра, которые не принадлежат триангуляции Делоне.
2. Ребра, которые принадлежат только одному треугольнику из построенной триангуляции, второй треугольник еще не найден или еще не обнаружено, что данное ребро принадлежит границе триангуляции, а также, ребра,

являющиеся границей триангуляции, и для которых неизвестен треугольник.

3. Ребра, образующие триангуляцию Делоне.

В начале алгоритма определяется ребро на границе заданного множества точек (см. рис. 3-2). Это ребро относится ко второму типу, потому что для него неизвестен треугольник, которому он принадлежит. На следующем шаге (см. рис. 3-3) определяется точка, образующая треугольник с текущим ребром, удовлетворяющий условию Делоне. Вновь полученные ребра из первой группы переходят во вторую (на рисунке они обозначены толстыми линиями), то есть для них пока не известен второй треугольник или то, что они являются границей. Исходное ребро переходит в третью группу – это означает, что оно является частью триангуляции Делоне. Если найти точку, удовлетворяющую условию Делоне невозможно, то ребро предполагается граничным. В конечном итоге триангуляция состоит из набора ребер третьей группы (см. рис 3-11).

Для выполнения алгоритма триангуляции Делоне определим многоленточную машину Тьюринга [8]

$$T=(K, \sum, \Gamma, \delta, q_0, F),$$

K – конечное множество внутренних состояний;

$\sum$ – входной алфавит;

Г – ленточный алфавит, $\sum \subseteq \Gamma - \{B\},\ B \in \Gamma$;

q_0 – начальное состояние, $q_0 \in K$;

δ – команды, δ: $K x\Gamma \rightarrow Kx(\Gamma\text{-}\{B\})^*\{L, R\}$, где L, R – направление движения головки.

Рассмотрим, что будет храниться на лентах машины Тьюринга (см. рисунок 4). На первую ленту запишем координаты набора исходных точек. Вторая лента будет содержать ребра, которые относятся ко второй группе (см. выше), если они перестают быть таковыми, то они удаляются из этой ленты. На третьей ленте будем хранить координату текущей, добавляемой в триангуляцию, точки, которая вместе с текущим ребром из второй ленты образуют треугольник, удовлетворяющий условию Делоне. Координаты этого треугольника записываются на четвертую ленту. Пятая лента содержит список ребер, образующих триангуляцию Делоне.

1	X_1	Y_1	X_2	Y_2	X_3	Y_3	X_4	Y_4	…	…	X_N	Y_N	B	
2	X^*_1	Y^*_1	X^*_2	Y^*_2	B									
3	X	Y	B											
4	X^*_1	Y^*_1	X^*_2	Y^*_2	X^*_3	Y^*_3	B							
5	X^*_1	Y^*_1	X^*_2	Y^*_2	X^*_1	Y^*_1	X^*_3	Y^*_3	X^*_2	Y^*_2	X^*_3	Y^*_3	B	

Рисунок 4 – Ленты машины Тьюринга

Входной алфавит ∑ для этой машины Тьюринга состоит из множества действительных чисел. Конечное множество состояний К и команды δ определяют переходы машины Тьюринга от состояния к состоянию. Работа машины начинается из начального состояния q_0, в котором третья, четвертая и пятая ленты пусты, первая лента содержит координаты исходного набора точек, вторая лента содержит координаты начального ребра на границе триангуляции. Множество конечных состояний определяется множеством состояний из К, при которых вторая лента становится пустой.

Из начального состояния машина путем перехода в новые состояния выполняет поиск точки, которая удовлетворяет условию Делоне вместе с текущим ребро на второй ленте. Для этого машине необходимо прочитать все содержимое первой ленты и проверять условие Делоне для всех возможных точек, сложность этой операции составит O(N), где N – размерность задачи. После того как машина определит такую точку (она будет записана на третьей ленте), необходимо выполнить фиксированное число С операций:

- на четвертую ленту переписать координаты треугольника;
- на вторую ленту записать те ребра из этого треугольника, которые принадлежат второй группе (см. выше);
- удалить со второй ленты ребро, принадлежащее триангуляции, записать его на пятую ленту;
- очистить третью ленту.

После этого действия машина повторяет поиск точки, которую необходимо записать на третью ленту. Количество таких повторов характеризуется оценкой O(N), так как любая триангуляция содержит не более O(N) ребер.

Фиксированное число операций C существенно не влияет на время решения задачи, поэтому сложность алгоритма составляет $O(N^2)$.

Проверка условия Делоне

Любой алгоритм построения триангуляции Делоне использует процедуру проверки треугольника на соответствие условию Делоне.

В работе [9, 10] рассматривается проверка, использующая сумму противолежащих углов треугольника.

Рассмотрим метод проверки условия Делоне на основании определения триангуляции Делоне (см. выше). Выполним проверку попадания точки во внутреннюю область описанной вокруг треугольника окружности.

На рисунке 2 изображен треугольник, вершинами которого являются точки (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3).

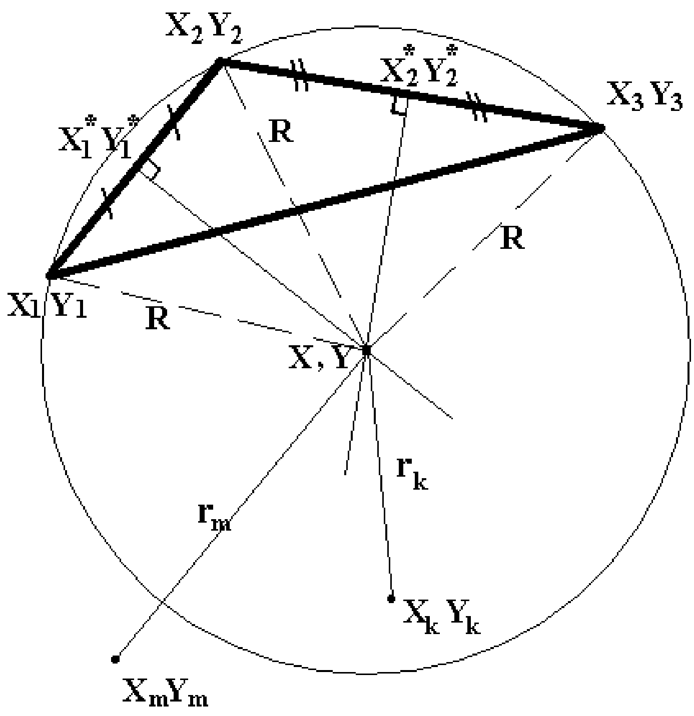

Рисунок 2 – Описанная вокруг треугольника окружность

Рассмотрим задачу проверки попадания любой другой точки из набора S в область описанной окружности. Для этого вычислим координаты центра описанной окружности (X, Y). Известно, что центр описанной окружности находится в точке пересечения прямых, перпендикулярных серединам сторон треугольника. На этом основании, получим систему уравнений

$$\begin{cases}(X_3 - X_2)\left(\dfrac{X_2 + X_3}{2} - X\right) + (Y_3 - Y_2)\left(\dfrac{Y_2 + Y_3}{2} - Y\right) = 0;\\[2mm] (X_2 - X_1)\left(\dfrac{X_1 + X_2}{2} - X\right) + (Y_2 - Y_1)\left(\dfrac{Y_1 + Y_2}{2} - Y\right) = 0,\end{cases}$$

где X, Y – неизвестные. Если точки (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3) не лежат на одной прямой, то существует единственное решение

$$X = \frac{X_3^2(Y_1 - Y_2) + X_2^2(Y_3 - Y_1) + (Y_2 - Y_3)(X_1^2 + Y_1^2 - Y_1Y_2 - Y_1Y_3 + Y_2Y_3)}{2(X_3Y_1 - X_2Y_1 + X_1Y_2 - X_3Y_2 - X_1Y_3 + X_2Y_3)};$$

$$Y = \frac{X_1(X_3^2 - X_2^2 - Y_2^2 + Y_3^2) + X_1^2(X_2 - X_3) - X_2(X_3^2 - Y_1^2 + Y_3^2) + X_2^2X_3 + X_3(Y_2^2 - Y_1^2)}{-2(X_3Y_1 - X_2Y_1 + X_1Y_2 - X_3Y_2 - X_1Y_3 + X_2Y_3)}.$$

Радиус описанной окружности можно вычислить как расстояние от её центра до любой из вершин треугольника, например, так

$$R = \sqrt{(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2}.$$

Тогда, чтобы проверить попадание любой точки (X_k, Y_k) во внутрь описанной окружности, достаточно проверить следующее условие

$$\sqrt{(X - X_k)^2 + (Y - Y_k)^2} < R.$$

Заключение

Рассмотрены базовые понятия триангуляции Делоне, итерационные алгоритмы построения триангуляции Делоне, а также метод проверки условия Делоне. Даны оценки сложности описываемых алгоритмов.

Современные задачи механики требуют оптимального разбиения пространства решения и накладывают на элементы разбиения жесткие ограничения. В задачах механики твердого деформируемого тела в близи концентраторов напряжений возникают области, в которых напряжения резко изменяются. Поэтому современные задачи такого класса требуют оптимизации построения триангуляции. Одна из таких попыток оптимизации осуществлена в работе [11], необходимо продолжать исследования в этом направлении.

Литература

1. Скворцов А. В. Обзор алгоритмов построения триангуляции Делоне // Вычислительные методы и программирование. 2002. Т.3.
2. Делоне Б. Н. О пустоте сферы // Изв. АН СССР, ОМЕН. 1934, 4. 793-800.
3. Lloyd E. On triangulation of a set of points in the plain. MIT Lab. Comp. Sc. Tech. Memo. N 88 Boston, 1977.
4. Manacher G., Zobrist A. Neither the Greedy nor the Delaunay triangulation of planar point set approximates the optimal triangulation // Inf. Proc. Let. 1977. 9, N 1. 31-43.
5. Ильман В. М. Экстремальные свойства триангуляции Делоне // Алгоритмы и программы. Выпуск 10. М., 1985. с. 57-66.
6. Lee D., Proximity and reachability in the plane. Techn. Report R-831. Coordinated Sci. Lab., University of Illinois at Urbana. Urbana, 1978.
7. Скворцов А. В., Костюк Ю. Л. Эффективные алгоритмы построения триангуляции Делоне // Геоинформатика. Теория и практика. Выпуск 1. Томск: Издательство Томского университета, 1998. 22-47.
8. Трахтенброт Б. А. Алгоритмы и вычислительные автоматы, М.: Сов. радио, 1974.
9. Midtbo T. Spatial modeling by Delaunay networks of two and three dimensions. Dr. Ing. thesis. Department of Surveying and Mapping, Norwegian Institute of Technology, University of Trondheim, 1993.
10. Guibas L., Stolfi J., Primitives for the manipulation of general subdivisions and the computation of Voronoi diagrams// ACM Transactions on Graphics. 1985. 4. N 2. 74-123.
11. J. Ruppert A Delaunay Refinement Algorithm for Quality 2-Dimensional Mesh Generation. NASA Ames Research Center, Submission to Journal of Algorithms February 2, 1994.