РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ СЛОЖНЫХ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ

Шоробура Н.Н.
ДонНТУ
Факультет КИТА
E-mail: nshorobura@mail.ru

Abstract

N. N. Shorobura. Decision of tasks of multicriteria optimization of complex objects and systems. *This article is devoted to the question of multicriteria optimization of complex systems. The main existing approaches of decision multicriteria tasks and existing problems of multicriteria optimization and the ways of solution of that problems are considered in this article.*

Результаты исследования задач планирования и управления показывают, что в реальной постановке эти задачи являются многокритериальными. Так, часто встречающееся выражение «достичь максимального эффекта при наименьших затратах» уже означает принятие решения при двух критериях. Оценка деятельности предприятий и планирования как системы принятия решений производится на основе более десятка критериев: выполнение плана производства по объему, по номенклатуре, плана реализации, прибыли по показателям рентабельности, производительности труда и т. д.

Ранее, при исследовании проблемы многокритериальности часто все критерии, кроме одного, выбранного доминирующим, принимались в качестве ограничений, оптимизация проводилась по доминирующему критерию. Такой подход к решению практических задач значительно снижает эффективность принимаемых решений.

В задачах математического программирования с одним критерием нужно определить значение целевой функция, соответствующее, например, минимальным затратам или максимальной прибыли. Однако, немного подумав, мы практически в любой реальной ситуации обнаружим несколько целей, противоречащих друг другу.

В связи с этим возникает необходимость использования несколько иного подхода к решению задач данного класса – с помощью методов многокритериальной оптимизации.

Постановка задачи многокритериальной оптимизации [4] имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&max\{f_1(x)=F_1\},\\
&max\{f_2(x)=F_2\}, \qquad\qquad (1)\\
&\vdots\\
&max\{f_k(x)=F_k\}, \text{ при } x \in X, \text{ где}
\end{aligned}
$$

X – множество допустимых значений переменных x;

k – число целевых функций (критериев);

F_i – значение i-го критерия (целевой функции),

“*max*” – означает, что данный критерий нужно максимизировать.

Заметим, что по существу многокритериальная задача отличается от обычной задачи оптимизации только наличием нескольких целевых функций вместо одной. Критерии могут иметь различную важность для ЛПР.

Нужно сказать, что решение такой задачи не даст наилучших значений для каждого критерия, так как зачастую улучшение одного критерия вызывает ухудшение другого. Таким образом, при решении многокритериальной задачи получаем некоторое компромиссное решение [6].

Существующие на сегодняшний день методы многокритериальной оптимизации условно можно разделить на 2 группы [5]. Методы первой группы сводят многокритериальную задачу к однокритериальной путем свертывания векторного критерия в суперкритерий, который оптимизируется одним из методов однокритериальной оптимизации. Существуют различные виды сверток. Наиболее распространенным способом свертывания векторного критерия линейная является свертка вида:

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F_i(x), \; \alpha_i \geq 0. \qquad (2)$$

Существуют различные способы выбора коэффициентов α_i. Одним из них является назначение α_i в зависимости от относительной важности критериев [1]. Такой подбор указанных коэффициентов можно выполнять согласно таблице:

Таблица 1. Шкала относительной важности.

Интенсивность	Определение

относительной важности	
1	Равная важность сравниваемых требований
3	Умеренное (слабое) превосходство одного над другим
5	Сильное (существенное) превосходство
7	Очевидное превосходство
9	Абсолютное (подавляющее) превосходство
2, 4, 6, 8	Промежуточные решения между двумя соседними оценками

В данной работе рассмотрено около 20 методов выбора весовых коэффициентов (α_i), где рассматриваются различные способы построения функционала Ф(x) [2].

Ко второй группе можно отнести остальные методы многокритериальной оптимизации, которые не производят свертывание локальных критериев в скалярный суперкритерий.

Кратко рассмотрим некоторые из них. Пусть все локальные критерии имеют одинаковую важность. В таком случае возможно решение задачи многокритериального программирования на основе *принципа справедливого компромисса* [1]. *Справедливым* будем считать такой компромисс, при котором относительный уровень снижения качества по одному или нескольким критериям не превосходит относительного уровня повышения качества по остальным критериям (меньше или равен).

Пусть в области компромиссов Γ_x даны два решения x' и x'', качество которых оценивается критериями $F_1(x)$ и $F_2(x)$. Решение x' превосходит решение x'' по критерию F_1, но уступает ему по критерию F_2. Необходимо сравнить эти решения и выбрать наилучшие на основе принципа справедливого компромисса.

Для сравнения этих решений на основе принципа справедливого компромисса введем меру относительного снижения качества решения по каждому из критериев – цену уступки χ:

$$\aleph_1 = \frac{\Delta F_1(x', x'')}{\max\limits_{x', x''} F_1(x)} \quad \aleph_2 = \frac{\Delta F_2(x', x'')}{\max\limits_{x', x''} F_2(x)} \tag{3}$$

где ΔF_1 и ΔF_2 — абсолютные снижения уровня критериев при переходе от решения x' к решению x'' (для критерия F_1) и при обратном переходе (для критерия F_2).

Если относительное снижение критерия F_1 больше, чем критерия F_2, то следует отдать предпочтение решению x'. Это следует из сравнения цены уступки по каждому критерию.

Алгоритм решения задачи векторной оптимизации, основанный на принципе *справедливого компромисса,* включает следующие шаги.

Шаг 0. Выбираем x' и $x'' \in D_x$.

Шаг 1. Вычисляем χ_1 и χ_2.

Шаг 2. Если $\chi_1 > \chi_2$, то выбираем x', если $\chi_1 < \chi_2$. то выбираем χ_2.

Шаг 3. Если не существует вектора $x \in X$ предпочтительнее x^I или x^{II}, то решение останавливается, иначе выбираем новый вектор x^{III} и переходим к шагу 1.

Принцип приближения по всем локальным критериям к идеальному решению [1].

В основу данного подхода положена идея приближения по всем критериям.

Пусть дана задача многокритериального программирования

$max\{f_1(x)=F_1\}$,

$max\{f_2(x)=F_2\}$,

$\vdots$

$max\{f_k(x)=F_k\}$, $x \in X$,

и заданы граничные условия

$$\alpha_{\alpha 1}x_1 + \alpha_{\alpha 2}x_2 + \ldots + \alpha_{\alpha n}x_n = b_\alpha \, (\alpha = 1, r); \qquad (4)$$

$$\alpha_{r+\beta,1}x_1 + \alpha_{r+\beta,2}x_2 + \ldots + \alpha_{r+\beta,n}x_n \le b_{r+\beta}; (\beta = \overline{1, m-r});$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots,\ x_n \ge 0.$$

Среди решений данной системы требуется отыскать такое значение вектора $x^*(x^*_1, \ldots, x^*_n)$, при котором локальные критерии примут по возможности максимальное (минимальное) значение одновременно.

Рассмотрим каждую отдельную функцию $f_i(x)$ и допустим, что для каждого фиксированного i $(i=1,m)$ решена задача максимизации. Пусть соответствующие оптимальные планы характеризуются векторами

$$x^{oi}(x^o_1, x^o_2, \ldots, x^o_n),\ i=1,m$$

На этих оптимальных планах определим значения критериев соответственно

$$F^o{}_i=(F_i(x^o{}_1),\ F_i(x^o{}_2), \ldots,\ F_i(x^o{}_n))$$

Рассмотрим вектор $F(x)$ с компонентами $F(x)|F^o{}_i$ и составим квадрат евклидовой нормы

$$R(x)=\left\|F(x)-F^o\right\|^2 \qquad (5)$$

вектора $F(x)$ - F^o, определенного для всех $x\in\Omega$.

Заметим, что F^o будет представлять собой единичный вектор в пространстве вектора $F(x)$. Назовем его идеальным значением вектора $F(x)$. Поставленная задача теперь сформулируется так: дана система целевых функций и даны ограничения. Требуется определить точку $x\in\Omega$, в которой функция $R(x)$ достигает минимума.

Таким образом, отыскание векторно-оптимального плана $x\in\Omega$ в данной задаче сведено к минимизации $R(x)$ в области допустимых решений:

$$R(x^*) = \min R(x),\ x\in\Omega. \qquad (6)$$

Таким образом, алгоритм решения задачи состоит из двух основных этапов:

этап 1: $\max F_i(x),\ i=1,\ m;$

этап 2: $\min R(x).$

Метод квазиоптимизации локальных критериев (метод последовательных уступок или метод лексикографии) [1].

В этом случае осуществляется поиск не единственного точного оптимума, а некоторой области решений, близких к оптимальному, – квазиоптимального множества. При этом уровень допустимого отклонения от точного оптимума определяется с учетом точности постановки задачи (например, в зависимости от точности вычисления величины критериев), а также некоторых практических соображений (например, требований точности решения задачи).

Вначале производится качественный анализ относительной важности критериев; на основании такого анализа критерии располагаются и нумеруются в порядке убывания важности, так что главным считается критерий F_1, менее важен F_2, затем следуют остальные локальные критерии $F_3,\ F_4, \ldots, F_m$. Максимизируется первый по важности критерий F_1 и определяется его наибольшее значение M_1. Затем назначается допустимое снижение (уступка) $\Delta_1\geq 0$ критерия F_1. Определим новую допустимую область $X^{(1)}$, как подобласть X вида

$$X^{(1)} = X\cap\{x|F_1(x) \geq M_1\text{-}\Delta_1\} \qquad (7)$$

Такой подход позволяет значительно сузить первоначальную допустимую область X, когда переходим к следующему по важности критерию.

После этого находим наибольшее значение M_2 второго критерия F_2 на множестве $X^{(1)}$, т. е. при условии, что значение первого критерия должно быть не меньше, чем M_1-Δ_1. Снова назначается значение уступки $\Delta_2 \geq 0$, но уже по второму критерию, которое вместе с первым используется при нахождении условного максимума третьего критерия, и т. д. Наконец, максимизируется последний по важности критерий F_m при условии, что значение каждого критерия F_r из $m—1$ предыдущих должно быть не меньше соответствующей величины M_r - Δ_r; получаемые стратегии считаются оптимальными.

Таким образом, оптимальной считается всякая стратегия, являющаяся решением последней задачи из следующей последовательности задач:

1) найти $M_1 = supF_1(x), x \in X$;

2) найти $M_2 = supF_2(x), x \in X$;

…

m) найти $M_m = supF_m(x), x \in X$;

Отметим, что значения уступок Δ_i $(i=1,m)$ последовательно назначаются при изучении взаимосвязи частных критериев.

Учитывая вышеизложенное, можно сделать следующий вывод. Метод последовательных уступок целесообразно применять для решения тех многокритериальных задач, в которых все частные критерии естественным образом упорядочены по степени важности, причем каждый критерий настолько существенно более важен, чем последующий, что можно ограничиться учетом только попарной связи критериев и выбирать допустимое снижение очередного критерия с учетом поведения лишь одного следующего критерия.

Для решения многокритериальных задач также можно использовать генетические алгоритмы. Генетические алгоритмы – адаптивные методы поиска, которые в последнее время часто используются для решения задач функциональной оптимизации. Они основаны на генетических процессах биологических организмов.

Отметим, что эффективность ГА сильно зависит от таких деталей, как метод кодировки решений, операторы, настройки параметров, частный критерий успеха [11]. Теоретическая работа, отраженная в литературе, посвященной ГА, не дает оснований говорить о выработки каких-либо строгих механизмов для четких предсказаний.

В последние годы реализовано много генетических алгоритмов и в большинстве случаев они мало похожи на классический ГА [10]. По этой причине в настоящее время под термином «генетические алгоритмы» скрывается не одна модель, а достаточно широкий класс алгоритмов, подчас мало похожих друг от друга. Исследователи экспериментировали с различными типами представлений, операторов кроссовера и мутации, специальных операторов, и различных подходов к воспроизводству и отбору.

Решение задачи многокритериальной оптимизации с помощью ГА можно проводить по приведенной схеме с той особенностью, что определение мер пригодности хромосом можно определять на основе какого-либо метода многокритериальной оптимизации (например, метод справедливого компромисса) или принципа оптимальности либо оптимизировать суперкритерий.

Таким образом, для решения многокритериальной задачи необходимо сделать следующее:

1. Выбрать объект либо процесс для многокритериальной оптимизации.
2. Построить многокритериальную математическую модель вида (1) выбранного объекта.
3. Выбрать метод для решения поставленной задачи.
4. Разработать программное обеспечение для многокритериальной оптимизации выбранного объекта.
5. Провести эксперименты по многокритериальной оптимизации и выполнить анализ полученных результатов.

На сегодняшний день существуют следующие проблемы многокритериальной оптимизации [1].

Первая проблема связана с выбором принципа оптимальности, который строго определяет свойства оптимального решения и отвечает на вопрос, в каком смысле оптимальное решение превосходит все остальные допустимые решения. В отличие от задач однокритериальной оптимизации, у которых только один принцип оптимальности $f(x^o) \geq f(x)$, в данном случае имеется большое количество различных принципов, и каждый принцип может приводить к выбору различных оптимальных решений. Это объясняется тем, что приходится сравнивать векторы эффективности на основе некоторой схемы компромисса. Нами рассмотрены около более 10 принципов оптимальности [7], существующих на сегодняшний день, и можно сказать, что наиболее часто сегодня используют принцип оптимальности по Парето.

Вторая проблема связана с нормализацией векторного критерия эффективности *F*. Она вызвана тем, что очень часто локальные критерии, являющиеся компонентами вектора эффективности, имеют различные масштабы измерения, что и затрудняет их сравнение. Поэтому приходится приводить критерии к единому масштабу измерения, т. е. нормализовать их. Существующие на сегодня способы нормализации рассмотрены в [7].

Третья проблема связана с учетом приоритета (или различной степени важности) локальных критериев. Хотя при выборе решения и следует добиваться наивысшего качества по всем критериям, однако степень совершенства по каждому из них, как правило, имеет различную значимость. Поэтому обычно для учета приоритета вводится вектор распределения важности критериев $\Lambda=(\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n)$, с помощью которого корректируется принцип оптимальности [3] или проводится дифференциация масштабов измерения критериев.

Таким образом, в данной статье рассмотрены основные существующие подходы к решению задач многокритериальной оптимизации, существующие проблемы многокритериальной оптимизации и возможные пути их решения.

Литература

1. Г. М. Уланов и др. Методы разработки интегрированных АСУ промышленными предприятиями. М.: Энергоатомиздат – 1983.
2. А. М. Анохин, В. А. Глотов, В.В. Павельев, А.М. Черкашин. Методы определения коэффициентов важности критериев “Автоматика и телемеханика”, №8, 1997, с3-35.
3. Таха, Хэмди А. Введение в исследование операций – М.:Мир,2001, с354-370.
4. Р. Штойер. Многокритериальная оптимизация: теория, вычисления, приложения. М.:Наука, 1982, с14-29, 146-258.
5. Многокритериальная оптимизация. Математические аспекты. М.:Наука, 1989, с116-123.
6. В.В. Подиновский, В.Д. Ногин. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982, с9-64.
7. В. В. Хоменюк. Элементы теории многокритериальной оптимизации. М.: Наука, 1983, с8-25.
8. С.А.Исаев. Популярно о генетических алгоритмах. Интернет-ресурс http://bspu.ab.ru./Docs/~saisa/ga/ga-pop.html.
9. С.А.Исаев. Обоснованно о генетических алгоритмах. Интернет-ресурс http://bspu.ab.ru/Docs/~saisa/ga/text/part1.html.