

К вопросу разработки основных вычислительных процедур метода анализа иерархий

Трофимец В. Я. (zemifort@inbox.ru)

Ярославский военный финансово-экономический институт

В настоящее время среди методов решения задач многокритериального выбора, имеющих, с одной стороны, признанную теоретическую обоснованность, а с другой стороны, удовлетворяющих требованию универсальности, наибольшее распространение получили методы теории полезности [10], методы теории нечетких множеств [2, 3, 6], методы векторной стратификации [4] и метод анализа иерархий Саати [9].

Теория многомерной полезности позволяет для задач многокритериального выбора получить функцию многомерной полезности, максимальное значение которой соответствует наиболее предпочтительному варианту. Многомерная функция полезности обычно получается как аддитивная или мультипликативная комбинация одномерных функций, которые строятся на основании опроса экспертов и позволяют провести ранжирование возможных исходов без взаимного сравнения альтернатив. При этом делается допущение о взаимной независимости критериев по полезности. Процедура построения функции полезности требует привлечения значительных объемов информации и является достаточно трудоемкой. Достоинством этого подхода является возможность оценки любого количества альтернативных вариантов с использованием полученной функции. В случае неустойчивой исходной информации применение методов теории полезности становится малоэффективным.

Теория нечетких множеств, предложенная Л. Заде [6], позволяет представить знания о предпочтительности альтернатив по различным критериям с помощью нечетких множеств. Формирование нечетких множеств является более простой и менее трудоемкой процедурой, чем построение функций полезности. Для выявления лучших вариантов по совокупности критериев необходимо иметь в распоряжении информацию о важности критериев и типах возможных отношений между ними. Теория нечетких множеств предоставляет различные средства для учета взаимных отношений критериев: использование весовых коэффициентов, нечеткие отношения предпочтения, нечеткий логический вывод на правилах определения лучшей альтернативы и т. д. Основной проблемой многокритериального выбора с применением нечетких моделей является представление информации о взаимоотношениях между критериями и способы вычисления интегральных оценок. Методы, базирующиеся на разных подходах, дают различные результаты [2]. Каждый подход имеет свои ограничения и особенности, и эксперт-аналитик должен получить о них представление, прежде чем применять тот или иной метод принятия решения.

Методы векторной стратификации основаны на процедурах построения структурированного многокритериального пространства и разбиения его на заданное число упорядоченных слоев (страт). Для этого на множестве оцениваемых объектов задается отношение стратификации. Это отношение для элементов одной страты является толерантностью, а для элементов из разных страт – отношением строгого порядка. Это означает, что внутри страты объекты, хотя и могут отличаться по некоторым показателям, будут, тем не менее, почти равноценными. Объекты, принадлежащие к разным стратам, будут упорядочены по степени их соответствия заданной цели (по значимости, приоритетности).

Методы векторной стратификации дают возможность проводить комплексную оценку и выбор лучших из рассматриваемых объектов на основе как количественной, так и качественной исходной информации. При этом исходная информация может быть получена из статистики, в результате моделирования, а также от привлекаемых экспертов. Система критери-

ев комплексного оценивания формулируется в процессе конкретизации заданной цели. Применяемое решающее правило комплексной оценки использует матрицы логической свертки значений частных показателей (оценок).

Метод анализа иерархий (МАИ), предложенный Т. Саати [9], является замкнутой логической конструкцией, обеспечивающей с помощью простых правил анализ сложных проблем во всем их разнообразии. Метод основан на парных сравнениях альтернативных вариантов по различным критериям с использованием девятибалльной шкалы и последующим ранжированием набора альтернатив по всем критериям и целям. Взаимоотношения между критериями учитываются путем построения иерархии критериев и применением парных сравнений для выявления важности критериев и подкритериев. Применение МАИ позволяет включить в иерархию все имеющиеся у эксперта-аналитика по рассматриваемой проблеме знания и воображение. Метод отличается простотой и дает хорошее соответствие интуитивным представлениям.

Последние свойства метода позволяют рассматривать его в качестве базового метода решения многокритериальных задач в процессе информационно-аналитической подготовки специалистов финансово-экономического профиля, как правило, не обладающих специальными углубленными математическими знаниями. Метод также может быть быстро реализован на программном уровне в среде табличного процессора MS Excel, что для учебного процесса имеет немаловажное значение, так как позволяет в приемлемые сроки создавать учебные фрагменты автоматизированных систем поддержки принятия решений.

В методе анализа иерархий для установления относительной важности элементов иерархии используется шкала отношений, приведенная в табл. 1 [9]. Данная шкала позволяет эксперту-аналитику ставить в соответствие степеням предпочтения одного сравниваемого объекта перед другим некоторые числа.

Таблица 1

Шкала отношений метода анализа иерархий

Степень значимости	Определение	Объяснение
1	Одинаковая значимость	Два объекта не имеют преимуществ друг перед другом
3	Некоторое преимущество одного объекта перед другим (слабое преимущество)	Существуют соображения в пользу предпочтения одного из объектов, однако эти соображения недостаточно убедительны
5	Существенное или сильное Преимущество	Имеются надежные данные или логические суждения для того, чтобы показать предпочтительность одного из объектов
7	Очевидное или очень сильное Преимущество	Убедительное свидетельство в пользу одного объекта перед другим
9	Абсолютное преимущество	Свидетельства в пользу предпочтительности одного объекта перед другим в высшей степени убедительны
2, 4, 6, 8	Промежуточные значения между соседними суждениями	Ситуация, когда необходимо компромиссное решение
Обратные величины приведены выше нулевых величин	Если объекту i при сравнении с объектом j приписывается одно из определенных выше ненулевых чисел, то объекту j при сравнении с объектом i приписывается обратное значение	$a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$

Правомочность данной шкалы доказана теоретически при сравнении со многими другими шкалами [9]. При использовании указанной шкалы эксперт-аналитик, сравнивая два объекта в смысле предпочтительности по отношению к критерию, расположенном на вышестоящем уровне иерархии, должен поставить в соответствие этому сравнению число в интервале от 1 до 9 или обратное число.

Поскольку человеческие ощущения нельзя выразить точной формулой, то при сравнении нескольких объектов транзитивная (порядковая) и кардинальная (количественная) однородность могут быть нарушены. Для оценки однородности суждений в методе анализа иерархий используется индекс однородности (ИО) или отношение однородности (ОО), которым соответствуют следующие выражения:

$$\text{ИО} = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}; \quad (1)$$

$$\text{ОО} = \frac{\text{ИО}}{E(\text{ИО})}, \quad (2)$$

где $E(\text{ИО})$ – математическое ожидание индекса однородности случайным образом составленной матрицы парных сравнений A , которое основано на экспериментальных данных, полученных в работе [9] (табл. 2);

n – порядок матрицы A ;

$\lambda_{\max}$ – максимальное собственное значение матрицы A .

Таблица 2

Порядок матрицы n	$E(\text{ИО})$	Порядок матрицы n	$E(\text{ИО})$	Порядок матрицы n	$E(\text{ИО})$
1	0,00	6	1,24	11	1,51
2	0,00	7	1,32	12	1,53
3	0,58	8	1,41	13	1,56
4	0,90	9	1,45	14	1,57
5	1.12	10	1,49	15	1,59

В качестве допустимого используется значение $\text{ОО} \leq 0,10$. Если для матрицы парных сравнений отношение однородности $\text{ОО} > 0,10$, то это свидетельствует о существенном нарушении логичности суждений, допущенных экспертом при заполнении матрицы, поэтому эксперту предлагается пересмотреть данные, использованные для построения матрицы, чтобы улучшить однородность.

При нарушении однородности ранг матрицы отличен от единицы и она будет иметь несколько собственных значений. Однако при небольших отклонениях суждений от однородности одно из собственных значений будет существенно больше остальных и приблизительно равно порядку матрицы. Таким образом, ключевым моментом в процедуре оценки однородности суждений является нахождение максимального собственного значения $\lambda_{\max}$ матрицы парных сравнений. На основании этого значения может быть получен и главный собственный вектор матрицы парных сравнений.

Отметим, что в типовой процедуре метода анализа иерархий точное решение получается путем возведения матрицы парных сравнений в произвольно большие степени и деления суммы каждой строки на общую сумму элементов матрицы. Умножив матрицу парных сравнений справа на полученную оценку вектора решений, получается новый вектор. Разделив первую компоненту этого вектора на первую компоненту оценки вектора решения, вторую компоненту этого вектора – на вторую компоненту оценки вектора решения и т. д., получаем ещё один вектор. Разделив сумму компонент этого вектора на число компонент, получаем приближение к $\lambda_{\max}$.

Описанная вычислительная процедура является достаточно сложной и громоздкой, главным недостатком которой является возведение матрицы парных сравнений в произвольно большие степени для достижения приемлемой точности результата. Вычисление $\lambda_{\max}$ осуществляется на основе полученной оценки вектора решений, т. е. реализуется схема $(w_1, w_2, \dots, w_n) \rightarrow \lambda_{\max}$.

Ниже предлагается вычислительная процедура нахождения максимального собственного значения и главного собственного вектора матрицы парных сравнений, которая, по крайней мере, не уступает в точности типовой процедуре и превосходит её с точки зрения вычислительной реализации. Последнее превосходство достигается благодаря учету особенностей строения матрицы парных сравнений, что позволяет эффективно использовать обратную схему вычислений, т. е. $\lambda_{\max} \rightarrow (w_1, w_2, \dots, w_n)$.

Под однородностью (согласованностью) суждений эксперта будем понимать соблюдение условий транзитивности и кардинальности этих суждений. Условие транзитивности выражается в соблюдении отношений эквивалентности и порядка относительно сравниваемых объектов. Отношение R является транзитивным, если для любых объектов x, y и z из xRy и yRz следует xRz .

Соблюдение условия кардинальности для матрицы парных сравнений с однородными суждениями $A^{\text{од}}$ (в дальнейшем просто однородной матрицы) выражается в виде выполнения соотношения:

$$a_{rs} = \frac{a_{r-1,s}}{a_{r-1,r}} \text{ при } r > 1, r < s. \quad (3)$$

Из выполнения соотношения (3) следует линейная зависимость между строками однородной матрицы, т. е. её ранг равен единице:

$$r_{A^{од}} = 1, \quad (4)$$

а определитель – равен нулю:

$$\det(A^{од}) = 0. \quad (5)$$

Из условий (4) и (5) следует, что однородная матрица порядка n имеет $n-1$ собственных значений λ , равных 0, и одно собственное значение $\lambda_{\max}$, равное n . Невыполнение соотношения (3) приводит к нарушению однородности суждений и изменению собственных значений матрицы парных сравнений. Причем, чем больше нарушена однородность матрицы, тем больше отклонение $\lambda_{\max}$ от n . При несущественных отклонениях суждений от условия транзитивности $\lambda_{\max}$ будет существенно больше остальных собственных значений и приблизительно равно порядку матрицы n .

Для нахождения собственных значений матрицы парных сравнений воспользуемся характеристическим (вековым) уравнением:

$$p(\lambda)=0, \quad (6)$$

где $p(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$ – характеристический многочлен матрицы A .

Уравнение (6) представляет собой алгебраическое уравнение n -ой степени относительно λ :

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (-\lambda)^n + b_1(-\lambda)^{n-1} + \dots + b_{n-1}(-\lambda) + b_n = 0, \quad (7)$$

где $b_1 = \text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ – след матрицы A ;

$b_m = \sum M^{(m)}$ – сумма всех главных миноров m -го порядка;

$b_n = \det(A)$ – определитель матрицы A .

Ниже предлагается модифицированный метод нахождения коэффициентов характеристического многочлена в уравнении (7), учитывающий особенность строения матриц парных сравнений, применяемых в методе анализа иерархий.

Особенность строения матриц парных сравнений заключается в выполнении следующих двух условий:

$$1) a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 1;$$

$$2) a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}.$$

Данные условия позволяют ускорить нахождение коэффициентов уравнения (7).

Из выражения $b_1 = \text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ и условия $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 1$ следует, что $b_1 = n$.

Для коэффициента b_2 докажем следующую теорему.

Теорема. В характеристическом многочлене матрицы парных сравнений коэффициент $b_2 = 0$.

Доказательство.

Для доказательств теоремы воспользуемся определением главного минора. Главным минором матрицы $\mathbf{A}$ называется минор, если номера строк, в которых он расположен, совпадают с номерами столбцов.

Из определения главного минора следует, что его диагональные элементы совпадают с диагональными элементами матрицы $\mathbf{A}$. Так как диагональные элементы матрицы парных сравнений равны 1, то и диагональные элементы главных миноров также будут равны 1.

Из данного свойства и свойства матрицы парных сравнений $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$ следует, что главные миноры 2-го порядка $M^{(2)}$ представляют собой определители вида:

$$M^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & a_{ij} \\ a_{ji} & 1 \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Раскрывая определитель (8), получаем:

$$M^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & a_{ij} \\ \frac{1}{a_{ij}} & 1 \end{vmatrix} = 1 - a_{ij} \frac{1}{a_{ij}} = 0. \quad (9)$$

Применяя выражение $b_m = \sum M^{(m)}$ к характеристическому многочлену матрицы парных сравнений, получаем:

$$b_2 = \sum_{i=1}^{\frac{n!}{2(n-2)!}} M_i^{(2)} = 0. \quad (10)$$

Таким образом, учитывая, что $b_1 = n$, а $b_2 = 0$, характеристический многочлен $p(\lambda)$ матрицы парных сравнений запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (-\lambda)^n + n(-\lambda)^{n-1} + 0 \cdot (-\lambda)^{n-2} \dots + b_{n-1}(-\lambda) + b_n = \\ &= (-\lambda)^n + n(-\lambda)^{n-1} + b_3(-\lambda)^{n-3} \dots + b_{n-1}(-\lambda) + b_n. \end{aligned} \quad (11)$$

В табл. 3 представлены характеристические многочлены от 3-го до 6-го порядка включительно, которыми приходится пользоваться наиболее часто в практике принятия военно-экономических решений на основе метода анализа иерархий.

Таблица 3

Порядок многочлена $p(\lambda)$	Вид многочлена $p(\lambda)$
3	$-\lambda^3 + 3\lambda^2 + b_3$
4	$\lambda^4 - 4\lambda^3 - b_3\lambda + b_4$
5	$-\lambda^5 + 5\lambda^4 + b_3\lambda^2 - b_4\lambda + b_5$
6	$\lambda^6 - 6\lambda^5 - b_3\lambda^3 + b_4\lambda^2 - b_5\lambda + b_6$
n	$(-\lambda)^n + n(-\lambda)^{n-1} + b_3(-\lambda)^{n-3} \dots + b_{n-1}(-\lambda) + b_n$

Исследуем вид аналитического выражения коэффициента b_3 .

Теорема. В характеристическом многочлене матрицы парных сравнений коэффициент b_3 определяется выражением:

$$b_3 = \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j>i}^{n-1} \sum_{r>j}^n \frac{(a_{ij}a_{jr} - a_{ir})^2}{a_{ij}a_{jr}a_{ir}}. \quad (12)$$

Доказательство.

Для матрицы произвольного порядка n коэффициент b_3 будет равен сумме всех главных миноров 3-го порядка:

$$b_3 = \sum_{i=1}^{\frac{n!}{3(n-3)!}} M_i^{(3)}. \quad (13)$$

Так как главные миноры матрицы парных сравнений наследуют её специфические свойства ($a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 1$; $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$), то все главные миноры 3-го порядка будут представлять собой определители вида:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ \frac{1}{a} & 1 & c \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & 1 \end{vmatrix} = \frac{(ac-b)^2}{abc}. \quad (14)$$

Возьмем в качестве опорного элемента главного минора элемент a . Так как, по определению, главный минор располагается в строках и столбцах, номера которых совпадают, то в качестве элемента b могут выступать только элементы этой же строки матрицы, а в качестве элемента c могут выступать только элементы, у которых номер столбца совпадает с номером столбца элемента b , а номер строки совпадает с номером строки элемента $\frac{1}{a}$, т. е. с номером столбца элемента a . Таким образом, принимая $a = a_{ij}$, можно записать:

$$b = a_{ir}, \text{ где } r > j;$$

$$c = a_{jr}, \text{ где } j > i > r;$$

следовательно, все главные миноры 3-го порядка будут иметь вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{ij} & a_{ir} \\ a_{ji} & 1 & a_{jr} \\ a_{ri} & a_{rj} & 1 \end{vmatrix} = \frac{(a_{ij}a_{jr} - a_{ir})^2}{a_{ij}a_{jr}a_{ir}}. \quad (15)$$

Так как в главных минорах 3-го порядка у элемента $a = a_{ij}$ максимально возможный номер строки $i_{\max} = n-2$, максимально возможный номер столбца $j_{\max} = n-1$, а $j < r \leq n$, то сумма всех главных миноров 3-го порядка может быть записана в виде выражения:

$$\sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j>i}^{n-1} \sum_{r>j}^n \frac{(a_{ij}a_{jr} - a_{ir})^2}{a_{ij}a_{jr}a_{ir}}, \text{ ч. т. д.}$$

Получить компактное аналитическое выражение коэффициента b_4 через элементы матрицы парных сравнений не удастся, но есть возможность произвести эффективное разложение определителя матрицы парных сравнений (главных миноров) 4-го порядка по определителям 3-го порядка.

Рассмотрим определитель 4-го порядка матрицы парных сравнений:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 1 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Разложим определитель (16) по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 1 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & 1 & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & 1 \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & 1 & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & 1 \end{vmatrix} + \\ + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & 1 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & 1 \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = \frac{(a_{23}a_{34} - a_{24})^2}{a_{23}a_{34}a_{24}} - \\ - \begin{vmatrix} 1 & a_{12}a_{23} & a_{12}a_{24} \\ a_{31} & 1 & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & a_{13}a_{32} & a_{13}a_{34} \\ a_{21} & 1 & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & a_{14}a_{42} & a_{14}a_{43} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{vmatrix}.$$

Легко заметить, что в представленном разложении алгебраические дополнения (миноры 2-ого порядка) первых диагональных единиц равны 0, что существенно упрощает вычисление определителей.

Вместе с тем следует отметить, что для характеристических многочленов 5-ой степени подобное разложение должно быть повторено $C_5^4 = 5$ раз и, кроме того, должен быть рассчитан определитель 5-ого порядка, в разложении которого главный минор 4-го порядка встретится всего один раз и 4 раза встретятся миноры, для которых подобное разложение не приемлемо. Поэтому приходится констатировать, что для нахождения коэффициентов характеристических многочленов 5-ой степени и выше следует использовать более эффективные

вычислительные процедуры, какими являются, например, процедуры Фаддеева или Леверрье.

При написании программных процедур нахождения коэффициентов характеристического многочлена за основу был взят метод Леверрье, суть которого состоит в следующем:

- 1) определяются $S_1, S_2, \dots, S_n$ – следы матрицы $\mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{A}^n$;
- 2) коэффициенты $b_1, b_2, \dots, b_n$ последовательно определяются по формуле $kb_k = S_k - b_1 S_{k-1} - \dots - b_{k-1} S_1$, $k = 1, n$. При $k = n$ значение коэффициента b_n при подстановке в уравнение (7) следует изменить на противоположное.

После составления характеристического многочлена $p(\lambda)$ находятся корни уравнения (7), являющиеся собственными значениями матрицы парных сравнений $\mathbf{A}$.

Согласно теореме Абеля [1], при $n \geq 5$ общее алгебраическое уравнение степени n

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (17)$$

не разрешимо в радикалах, поэтому (за исключением уравнений специального вида) уравнение (17) решается численными методами.

Теория решения уравнений $f(x) = 0$ разработана достаточно подробно и обычно предполагает два основных этапа:

1. Отделение корней, т. е. нахождение достаточно малых окрестностей, в которых содержится одно значение корня.
2. Уточнение корней, т. е. вычисление корней с заданной степенью точности в определенной окрестности.

Для отделения корней уравнения $f(x)=0$ обычно используют следующие очевидные положения:

а) если непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ принимает на его концах значения разных знаков (т. е. $f(a) \times f(b) < 0$), то уравнение имеет на этом отрезке по меньшей мере один корень;

б) если функция $f(x)$ к тому же еще и строго монотонна, то корень на отрезке $[a, b]$ единственный.

Для уточнения корней уравнения $f(x)=0$ используют численные методы, наиболее известными из которых являются метод половинного деления (метод бисекций), метод хорд, метод Ньютона, метод простой итерации [5, 8].

Рассматривая характеристическое уравнение $p(\lambda)=0$, заметим, что нас интересует только наибольший действительный корень $\lambda_{\max}$, которому соответствует главный собственный вектор матрицы парных сравнений. Так как корень является наибольшим, то его нахождение целесообразно производить, двигаясь влево от правой границы заданной окрестности. В этом случае возникает задача оценки минимальной правой границы окрестности, в которой гарантированно находился бы корень $\lambda_{\max}$.

Очевидно, что $\lambda_{\max}$ будет располагаться на оси действительных чисел тем правее, чем большей неоднородностью обладает матрица парных сравнений. Тогда задача оценки минимальной правой границы, в которой гарантированно находился бы корень $\lambda_{\max}$, сводится к задаче нахождения $\lambda_{\max}$ для матрицы с максимальной неоднородностью.

Так как для матрицы парных сравнений с полной однородностью выполняется соотношение (3), то для матрицы парных сравнений с полностью неоднородными суждениями будет выполняться соотношение:

$$a_{rs} = \frac{a_{r-1,r}}{a_{r-1,s}} \text{ при } r > 1, r < s. \quad (18)$$

Принимая во внимание, что $\min a_{ij} = \frac{1}{9}$, а $\max a_{ij} = 9$, то матрица с полностью неод-

народными суждениями будет иметь один из следующих возможных видов:

• при нечетном n

$$\begin{array}{cc} \text{a)} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 9 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & 1 & 9 & 9 \\ 9 & \frac{1}{9} & 1 & \frac{1}{9} \\ 9 & \frac{1}{9} & 9 & 1 \end{array} \right| ; & \text{б)} \left| \begin{array}{cccc} 1 & \frac{1}{9} & 9 & 9 \\ 9 & 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & 9 & 1 & 9 \\ \frac{1}{9} & 9 & \frac{1}{9} & 1 \end{array} \right| ; \end{array} \quad (19)$$

• при четном n

$$\begin{array}{cc} \text{a)} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 9 & \frac{1}{9} & 9 \\ \frac{1}{9} & 1 & 9 & \frac{1}{9} \\ 9 & \frac{1}{9} & 1 & 9 \\ \frac{1}{9} & 9 & \frac{1}{9} & 1 \end{array} \right| ; & \text{б)} \left| \begin{array}{cccc} 1 & \frac{1}{9} & 9 & \frac{1}{9} \\ 9 & 1 & \frac{1}{9} & 9 \\ \frac{1}{9} & 9 & 1 & \frac{1}{9} \\ 9 & \frac{1}{9} & 9 & 1 \end{array} \right| . \end{array} \quad (20)$$

Оценим $\lambda_{\max}$, используя приближенную процедуру нахождения максимального собственного значения матрицы парных сравнений через среднее геометрическое. В этом случае $\lambda_{\max}$ будет рассчитываться по формуле:

$$\lambda_{\max} = \sum_{i=1}^n s_i \times w_i, \quad (21)$$

где $s_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$, $i = \overline{1, n}$ – сумма элементов матрицы по столбцам;

$w_i = \frac{p_i}{\sum_{i=1}^n p_i}$ – i -ый элемент главного собственного вектора;

$p_i = \sqrt[n]{a_{i1} \cdot a_{i2} \cdot \dots \cdot a_{in}}$ – среднее геометрическое элементов i -й строки.

Принимая во внимание, что элементы строк матриц являются обратными числами (за исключением $a_{ij} = 1$ при $i=j$), то при нечетном n для матриц (19а) и (19б) будут выполняться следующие соотношения:

$$\begin{aligned} s_i &= 9 \frac{1}{9} \left(\frac{n-1}{2} \right) + 1, \quad p_i = 1, \quad w_i = \frac{1}{n}, \quad \text{откуда} \\ \lambda_{\max} &= n \times \left[9 \frac{1}{9} \left(\frac{n-1}{2} \right) + 1 \right] \times \frac{1}{n} = 9 \frac{1}{9} \left(\frac{n-1}{2} \right) + 1 = 4 \frac{5}{9} n - 3 \frac{5}{9}. \end{aligned} \quad (22)$$

Для матриц (20а) и (20б) подобные соотношения будут являться более сложными, так как n является четным. Приведем такие соотношения для матрицы (20а):

$$\begin{aligned}
s_i &= \frac{n}{18} + 4,5(n-2) + 1, \text{ если столбец нечетный;} \\
s_i &= 4,5n + \frac{1}{18}(n-2) + 1, \text{ если столбец четный;} \\
p_i &= \sqrt[n]{9}, \text{ если строка нечетная;} \\
p_i &= \sqrt[n]{\frac{1}{9}}, \text{ если строка четная;} \\
w_i &= \frac{2\sqrt[n]{9}}{n(\sqrt[n]{9} + \sqrt[n]{\frac{1}{9}})}, \text{ если строка нечетная;} \\
w_i &= \frac{2\sqrt[n]{\frac{1}{9}}}{n(\sqrt[n]{9} + \sqrt[n]{\frac{1}{9}})}, \text{ если строка четная;} \\
\lambda_{\max} &= \frac{n}{2}(s^{\text{неч}} w^{\text{неч}} + s^{\text{чет}} w^{\text{чет}}). \tag{23}
\end{aligned}$$

Для матрицы (20б) выполняются аналогичные соотношения, отличие состоит только в обратном порядке четности (нечетности) строк и столбцов.

Корень $\lambda_{\max}$ был рассчитан для матриц порядка $n=3\dots 15$ по выражениям (22), (23), а также получен на основании решения характеристического уравнения (7) (см. табл. 4).

ка $m=n-1$, поэтому для его нахождения может быть использована любая процедура расчета определителя. Учитывая особенность строения обратносимметричных матриц, в качестве эффективного алгоритма расчета алгебраического дополнения $|X_k|$ предлагается алгоритм, основанный на идее представления матрицы в виде произведения двух треугольных матриц. Суть данного алгоритма состоит в следующем [8].

Пусть имеется алгебраическое дополнение $|X|$, соответствующее квадратной матрице X m -го порядка:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mm} \end{pmatrix}.$$

Представим матрицу X в виде:

$$X = Y \times Z,$$

где

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & 0 & \dots & 0 \\ y_{21} & y_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1} & y_{m2} & \dots & y_{mm} \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & z_{12} & \dots & z_{1m} \\ 0 & 1 & \dots & z_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & z_{m2} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Из линейной алгебры известно, что определитель произведения матриц равен произведению определителей перемноженных матриц. Поэтому

$$|X| = |Y| \times |Z|.$$

Но определитель матрицы Z равен 1, а определитель матрицы Y равен произведению её диагональных элементов. Таким образом, имеет место равенство:

$$|X| = y_{11} \times y_{22} \times \dots \times y_{mm}.$$

Перемножая матрицы Y и Z и приравнивая элементы матрицы-произведения соответствующим элементам матрицы X , получаем следующие вычислительные формулы:

$$y_{i1} = x_{i1}; \quad y_{ij} = x_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} y_{ik} \times z_{kj} \quad \text{при } j \leq i;$$

$$z_{1j} = \frac{x_{1j}}{y_{11}}; \quad z_{ij} = \frac{x_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} y_{ik} \times z_{kj}}{y_{ii}} \quad \text{при } i < j.$$

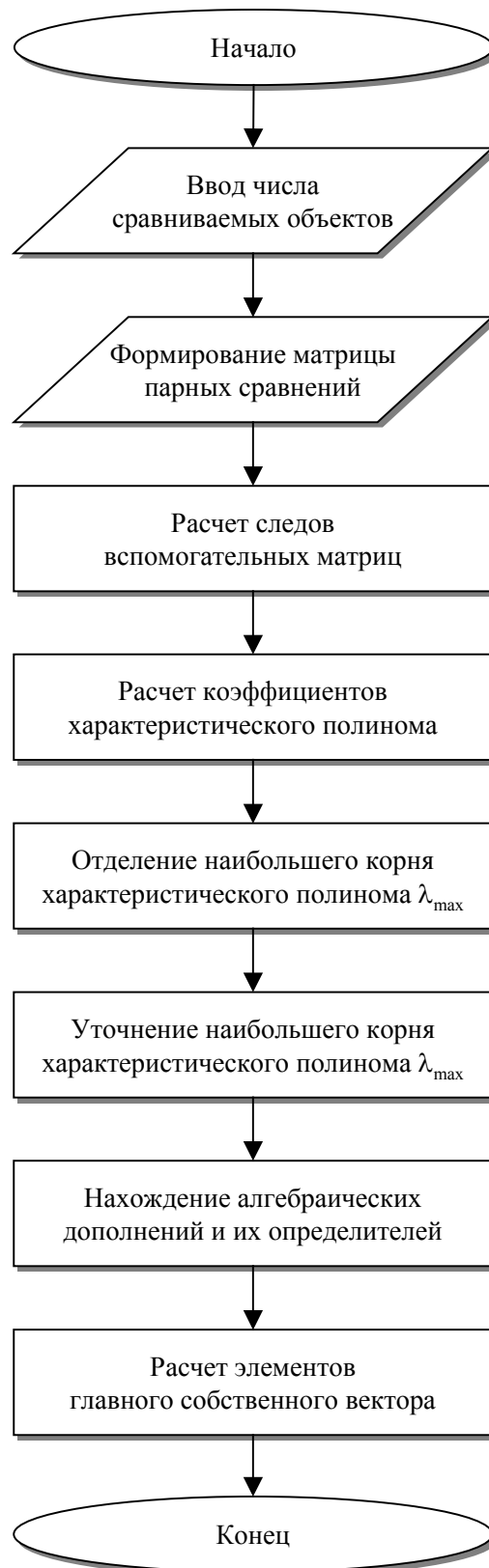


Рис. 1. Укрупненный алгоритм нахождения главного собственного вектора матрицы парных сравнений в методе анализа иерархий

Таким образом, получены и теоретически обоснованы вычислительные процедуры нахождения максимального собственного значения и главного собственного вектора матрицы парных сравнений, учитывающие её специфическое строение. Укрупненный алгоритм нахождения главного собственного вектора матрицы парных сравнений представлен на рис. 1.

Разработанные вычислительные процедуры позволяют получить точные значения для максимального собственного значения и главного собственного вектора матрицы парных сравнений. Вместе с тем, следует заметить, что точные вычислительные процедуры реализуются, как правило, только в специализированных программах. Для построения фрагментов СППР на основе офисных приложений их реализация может вызвать существенные затруднения. В этом случае решение вопроса видится в двух направлениях.

Первое направление связано с написанием библиотеки пользовательских функций, реализующих точные процедуры. Библиотека таких функций может затем распространяться и подключаться стандартным образом к офисным приложениям. Например, в MS Excel такая библиотека может быть реализована в виде специальной надстройки (файла с расширением *xla*), которая легко подключается в диалоговом окне "Надстройки". Однако само написание библиотеки пользовательских функций требует привлечения программистов-математиков или, как минимум, очень квалифицированных пользователей.

Второе направление связано с применением приближенных методов, которые, как правило, бывают существенно проще точных методов. В работе [9] предложены четыре приближенные вычислительные процедуры нахождения главного собственного вектора матрицы парных сравнений, который после нормализации становится вектором приоритетов. Предложенные процедуры отличаются как точностью получаемых оценок, так и сложностью вычислительных действий. Если погрешность приближенного метода допустима для решения практических задач, то его реализация является вполне оправданной.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Алексеев В. Б. Теорема Абеля в задачах и решениях. – М.: Наука, 1976.
2. Андрейчиков А. В., Андрейчикова О. Н. Анализ, синтез, планирование решений в экономике. – М.: Финансы и статистика, 2000.
3. Борисов А. Н., Крумберг О. А., Федоров И. П. Принятие решений на основе нечетких моделей. – Рига: Зинатне, 1990.
4. Глотов В. А., Павельев В. В. Векторная стратификация. – М.: Наука, 1984.
5. Заварыкин В. М., Житомирский В. Г., Лапчик М. П. Численные методы. – М.: Просвещение, 1991.
6. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976.
7. Макеев С. П., Шахнов И. Ф. Упорядочение объектов в иерархических системах // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1991. – № 3.
8. Ракитин В. И., Первушин В. Е. Практическое руководство по методам вычислений с приложением программ для персональных компьютеров. – М.: Высш. шк., 1998.
9. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. – М.: Радио и связь, 1989.
10. Фишберн П. С. Теория полезности для принятия решений. – М.: Наука, 1977.