

3. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СИГНАЛОВ

3.1 Ряд и интеграл Фурье

1. Функция $s_T(t)$, заданная на интервале времени $t \in [-T/2, T/2]$, может быть представлена в виде ряда Фурье, который в комплексной форме имеет вид

$$s_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{c}_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t} \quad (3-1)$$

где

$$\dot{c}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_T(t) e^{-jk \frac{2\pi}{T} t} dt \quad (3-2)$$

Величина $\omega_1 = 2\pi/T$ - наименьшая частота синусоидальной компоненты ряда. Компоненты с большими номерами имеют частоты $2\omega_1, 3\omega_1, 4\omega_1$ и т.д.

Строго говоря, величины типа ω являются угловой скоростью, им приписывают размерность радиан/сек, а соответствующие частоты $f = \omega/2\pi$ имеют размерность Герц. Традиция состоит в том, что формулы пишут и графики спектров рисуют как функции угловой скорости ω , которая должна являться аргументом тригонометрических функций, а расчеты выполняют, и параметры спектров обсуждают, оперируя частотой f в Герцах. Но в литературе смешаны и формулы, и графики, и обсуждения спектральных параметров. При этом, как правило, обе упомянутые величины называют частотой.

Мы тоже следуем такой практике и привлекаем, по мере необходимости, любую из «частот», полагая, что из контекста всегда понятно, о чем именно идет речь.

Говоря о спектре, чаще всего имеют в виду зависимость величин амплитуд $c_k = \text{abs}(\dot{c}_k)$ от частоты ω . График такой зависимости дискретен, величины c_k расположены в точках, соответствующих частотам гармоник сигнала. При этом график спектра вынужден распространиться и на область «отрицательных» частот $\omega < 0$ только потому, что разложение в ряд содержит компоненты $-\omega_1, (-2)\omega_1, (-3)\omega_1, (-4)\omega_1$ и т.д.

Для действительной функции $s_T(t)$ значения $\dot{c}_k$ и $\dot{c}_{-k}$ взаимно комплексно сопряжены.

2. Есть обстоятельство, которое важно понимать. Разложив сигнал $s_T(t)$, определенный на интервале T , в ряд по семейству тригонометрических функций, для которых T является периодом (не всегда минимальным, но все же

периодом), мы фактически определяем совершенно идентичное разложение для периодической функции $s(t)$, которая бесконечное число раз повторяет сигнал $s_T(t)$ на оси времени (см. рис.3-1). Таким образом, спектр периодического сигнала носит дискретный характер.

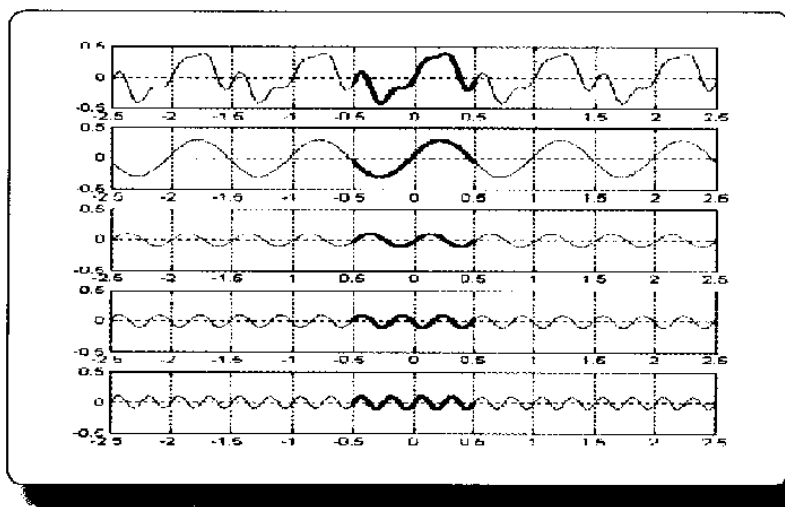


рис.3-1

3. Если сигнал составлен из конечного числа синусоидальных составляющих, то его значения и значения его производной в концевых точках периода совпадают. И наоборот - если не совпадают значения производной на концах интервала периода («угловая» периодическая функция), или не совпадают значения функции (разрыв первого рода), то разложение носит характер бесконечного ряда.

4. В тех случаях, когда сигнал $s(t)$ задан на всей оси времени t но при этом не является периодическим и обладает конечной энергией, переход к спектральному представлению также возможен. Он осуществляется с помощью интегрального преобразования Фурье, которое так же, как и разложение в ряд, задают парой выражений:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3-3)$$

обратное преобразование Фурье, символически изображаемое как $s(t) = \mathcal{F}^{-1}\{g(\omega)\}$, а также

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3-4)$$

прямое преобразование Фурье, символически изображаемое как $g(\omega) = \mathcal{F}\{s(t)\}$.

5. Дискретизация сигнала $s(t)$, аналитическая модель которой состоит в умножении $s(t)$ на решетку равномерно разнесенных во времени δ -функций, приводит к тому, что спектр дискретизованного сигнала $G_\delta(\omega)$ приобретает вид суммы периодически повторяющейся спектральной функции $g(\omega)$, а именно

$$G_\delta(\omega) = \omega_d \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(\omega - k\omega_d) \quad (3-5)$$

где $\omega_d = 2\pi f_d$ - частота дискретизации сигнала.

Такой характер спектра приводит к необходимости, во избежание спектральных (линейных) искажений, отделить копии функции $g(\omega - k\omega_d)$ на оси частот друг от друга. Это возможно, если, во-первых, энергия сигнала сосредоточена в некоторой ограниченной полосе частот $0..2\pi F_B$, а это, с учетом «отрицательных» частот означает, что спектральная функция сигнала сосредоточена в полосе $-F_B..F_B$ (Гц).

Во-вторых, частота дискретизации должна быть не меньше полосы спектральной функции. В крайнем случае, должно соблюдаться равенство $\omega_d = 2\omega_B$ (или для частот, выражаемых в Гц: $f_d = 2F_B$ - мы обозначили верхнюю граничную частоту спектра сигнала большой буквой F_B из уважения к величине, в пределах которой лежит практически вся энергия сигнала).

6. Заметив, что для периодического сигнала спектр имеет дискретный характер, а для дискретного сигнала спектр имеет периодический характер, мы не удивимся, что для дискретного периодического сигнала спектр имеет дискретный периодический характер.

3.2 Дискретное и Быстрое Преобразование Фурье

1. Если сигнал $s(t)$ составлен из конечного числа синусоидальных компонент, частоты которых кратны некоторой наиминизшей частоте f_1 и сосредоточены в полосе $-F_B..F_B$, то он периодичен с периодом $T=1/f_1$, то есть для разложения $s(t)$ в ряд по этим синусоидальным составляющим достаточно подвергнуть анализу любой фрагмент $s_T(t)$ этого сигнала длительностью T . Выбор начальной точки такого фрагмента определяет только значение начальных фаз синусоидальных компонент, составляющих сигнал.

Если этот фрагмент дискретизовать с частотой $f_d = 2F_B$, то спектр дискретизованного сигнала периодичен - он образует на оси частот примыкающие друг к другу копии дискретного спектра исходного сигнала. Наблюдать

и использовать для восстановления временного образа сигнала можно любой фрагмент спектра шириной $2F_B$, в частности можно выбрать классическое симметричное относительно нулевой частоты положение этого фрагмента $-F_B..F_B$, а можно – асимметричное $0..2F_B$ (рис.3-2). В этом случае интервал $F_B..2F_B$ буквально дублирует «отрицательные» частоты $-F_B..0$, то есть спектральные компоненты в этом интервале в случае действительного (не комплексного) сигнала комплексно сопряжены с соответствующими компонентами «положительных» частот.

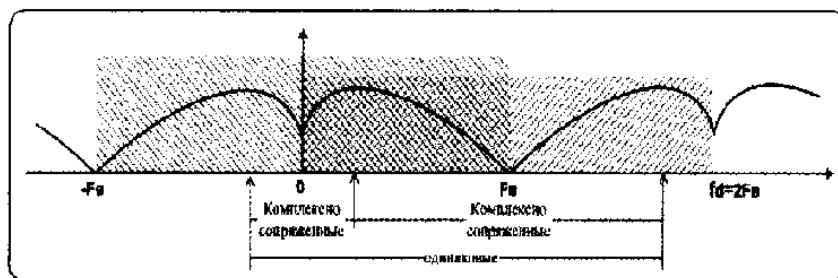


рис.3-2

2. Дискретное Преобразование Фурье (ДПФ) связывает взаимно-однозначным соответствием последовательность N временных отсчетов сигнала с последовательностью N спектральных значений, причем в каждой последовательности нумерация идет от 0 до $N-1$

$$\dot{c}_k = \sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{-jkm \frac{2\pi}{N}}, \quad k = 0..N-1 \quad (3-6)$$

прямое ДПФ соответствует процедуре спектрального анализа сигнала

$$x_m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \dot{c}_k e^{jkm \frac{2\pi}{N}}, \quad m = 0..N-1 \quad (3-7)$$

Обратное ДПФ соответствует синтезу сигнала из спектральных компонент, расположенных в частотной области от 0 до $2F_B$ Гц:

3. Быстрое Преобразование Фурье (БПФ или, в англоязычной литературе, FFT – *Fast Fourier Transform*) представляет собой чрезвычайно экономичный способ вычисления ДПФ – результаты вычисления в точности соответствуют приведенным здесь формулам, но алгоритм вычисления этих формул представляет собой одно из выдающихся достижений прикладной математики.

Классическая и наиболее распространенная форма БПФ требует, чтобы число выборок N являлось степенью двойки (128, 256, 512, 1024, 2048, 4096 и

т.д.), в противном случае, различные программные средства вычисления БПФ либо применяют более сложные алгоритмы вычисления, либо автоматически дополняют сигнал в конце нулями до достижения размера, совпадающего с ближайшей степенью двойки.

На рис.3-3 приведен иллюстративный график временной реализации звука оркестровой трубы, на рис.3-4 отображенный в шкале децибел амплитудный спектр этого сигнала - модуль Дискретного Преобразования Фурье, вычисленного методом Быстрого Преобразования Фурье.

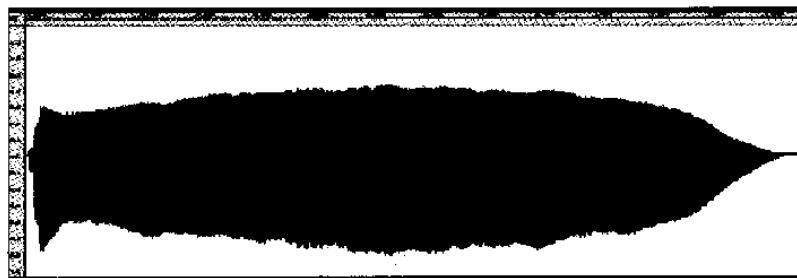


рис.3-3

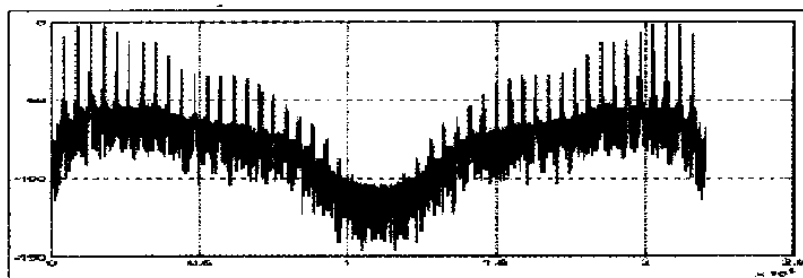


рис.3-4

Вычисление прямого Дискретного Преобразования Фурье методом Быстрого Преобразования Фурье осуществляется функцией Матлаба `fft`, которая в простейшем случае имеет формат вызова $g = \text{fft}(s)$, где s – вектор сигнала, g – вектор спектральных значений. В дальнейшем, следуя сложившейся разговорной традиции, мы будем вычисление спектральной функции называть вычислением БПФ. При этом графически представлять и обсуждать будем почти всегда спектр амплитуд $\text{abs}(\text{fft}(s))$.

Обратное ДПФ реализовано в Матлабе методом БПФ функцией `ifft`(g), где g комплексный вектор спектра сигнала, так что формально $s = \text{ifft}(\text{fft}(s))$.

* неформально верный результат будет получен вычислением $s = \text{real}(\text{ifft}(\text{fft}(s)))$, см. важное замечание в разд.4.7 п.9

Сигнал был дискретизован с частотой 22050 Гц, именно до этой частоты простирается график спектральной функции. Верхняя частота спектра сигнала лежит посредине спектральной картины и равна 11025 Гц.

Длительность T сигнала равна 1.376 сек. Это значит, что наименьшая частота f_1 и расстояние $f_i - f_{i-1} = df$ между спектральными частотами в спектре равны $1/T$, что составляет $1/1.376 = 0.727$ Гц. Величина $df = 1/T$ называется шагом по частоте или разрешением по частоте в спектре. Это та точность, с которой отображается спектральная функция вдоль оси частот.

4. Рассмотрим детали представления графика БПФ. На нем отчетливо видна гармоническая структура музыкального звука — звук трубы весьма богат обертонами. Правая половина графика, в соответствии с рис.3-2, является зеркальным отражением левой. Напомним, что свойство комплексной сопряженности спектра в области «положительных» и «отрицательных» частот справедливо для моделей действительных (не комплексных) сигналов.

В формулах ДПФ отсчеты спектра нумерованы числами от 0 до $N-1$. В спектральном массиве Матлаба отсчеты нумеруются числами от 1 до N , поскольку это общее правило Матлаба. Вычисленный элемент БПФ с первым номером соответствует отсчету спектра на нулевой частоте — постоянной составляющей. Таким образом, формированию вектора оси частот для спектральной картины могут соответствовать операторы $n=1:\text{length}(s)$; $f=df*(n-1)$; либо $f=0:df:df*(\text{length}(s)-1)$.

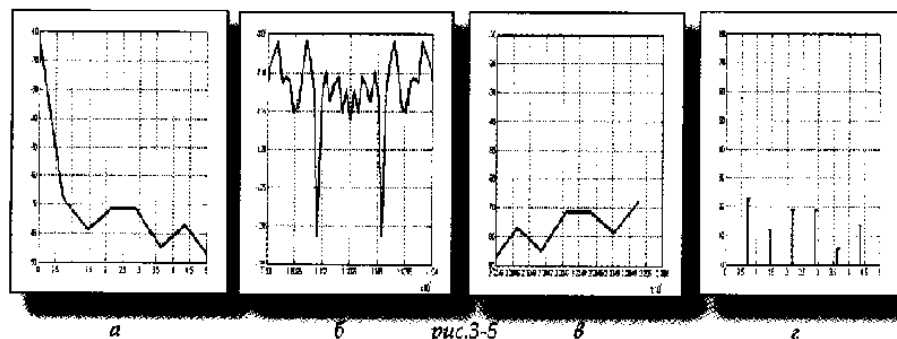


рис.3-5

На рис.3-5 показаны фрагменты спектра звука трубы. Начальный фрагмент содержит значение постоянной составляющей и первых компонент спектра, разделенных промежутком 0.72686 Гц. Фрагмент рис.3-5(б) показывает середину спектра, симметричную относительно частоты 11025 Гц. Фрагмент рис.3-5(в) показывает последние отсчеты БПФ, зеркально отражающие первые отсчеты без постоянной составляющей.

5. В ряде случаев спектральная картина выглядит более естественно, если ее отсчеты не соединены кусочно-ломаной линией, а отрисованы индивидуально. Это достигается командой **stem**, синтаксис которой практически совпадает с синтаксисом команды **plot**. Результат выполнения команды **stem(f,g,'*')** к начальному участку спектра показан на рис.3-5(г).

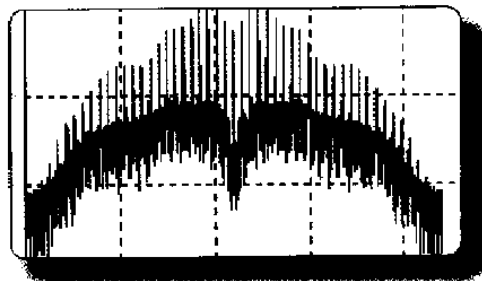


рис.3-6

6. Заметим, что спектральная картина БПФ может быть представлена в виде, соответствующем традиционным иллюстрациям разложений в ряд, когда «отрицательные» частоты располагаются слева от «положительных». Такую перестановку половинок массива выполняет команда **fftshift**. На рис.3-6 показан резуль-

тат выполнения команды **fftshift(abs(fft(s)))**. Разумеется, это всего лишь иная форма представления того же графического материала, при этом вектор для оси частот должен быть сформирован с учетом сделанной перестановки.