01

Экранирование низкочастотного магнитного поля незамкнутой тонкостенной сферической оболочкой

© В.Т. Ерофеенко,[1] И.С. Козловская,[1] Г.Ч. Шушкевич[2]

[1] Белорусский государственный университет,
220050 Минск, Белоруссия
[2] Гродненский государственный университет им. Янки Купалы,
230023 Гродно, Белоруссия
e-mail: g_shu@rambler.ru

(Поступило в Редакцию 31 августа 2009 г. В окончательной редакции 12 января 2010 г.)

Решение задачи о проникновении низкочастотного магнитного поля через полупрозрачную незамкнутую сферическую оболочку сведено к решению системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Численно исследовано влияние угла раствора незамкнутой оболочки, некоторых геометрических параметров экрана и электрофизических свойств материала сферической оболочки на коэффициент ослабления поля внутри сферической оболочки.

Введение

Сегодня актуальна проблема формирования электромагнитной обстановки, обеспечивающей экологическую безопасность и нормальное функционирование различных устройств. Электромагнитная обстановка представляет собой совокупность электромагнитных полей в заданной области пространства, которые могут влиять на функционирование конкретных технических устройств и биологических объектов [1,2]. Для создания благоприятной электромагнитной обстановки производится экранирование электромагнитных полей [3–7].

В работах [3,6,7] предложена методика расчета низкочастотных магнитных полей в случае, когда незамкнутые экраны являются идеально проводящими. В этом случае поле не проникает через стенки экранов. Для экранов с низкой проводимостью материала поле проникает через стенку оболочки. При моделировании таких процессов используются неклассические граничные условия [8].

В настоящей работе показано, что решение поставленной краевой задачи с неклассическими граничными условиями на полупрозрачной незамкнутой сферической оболочке можно свести к решению системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода. В ходе вычислительного эксперимента получены значения коэффициента экранирования низкочастотного магнитного поля внутри оболочки.

Постановка задачи

В пространстве R^3 с диэлектрической проницаемостью ε_0 и магнитной проницаемостью μ_0 расположена полупрозрачная тонкостенная незамкнутая сферическая оболочка Γ толщиной Δ. Оболочка Γ выполнена из материала с электромагнитными параметрами ε, μ, γ: ε — диэлектрическая проницаемость, μ — магнитная проницаемость, γ — удельная электрическая проводимость. Оболочка расположена на поверхности сферы Γ_1 радиусом a, круговое отверстие имеет угол раствора θ_0 (рис. 1).

Для решения задачи с точкой O, центром сферы Γ_1 введем сферические координаты $\{r, \theta, \varphi\}$:

$$x = r\cos\varphi\sin\theta, \quad 0 \le r \le \infty,$$

$$y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

$$z = r\cos\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi,$$

тогда идеализированная оболочка Γ описывается следующим образом:

$$\Gamma = \{r = a,\ \theta_0 < \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}.$$

В пространстве R^3 распространяется первичное низкочастотное магнитное поле с потенциалом u_0, колеблющееся с круговой частотой ω.

Обозначим через u_1 потенциал магнитного поля внутри сферы Γ_1 и через $u_2 = u_0 + \overline{u}_2$ — потенциал вне сферы.

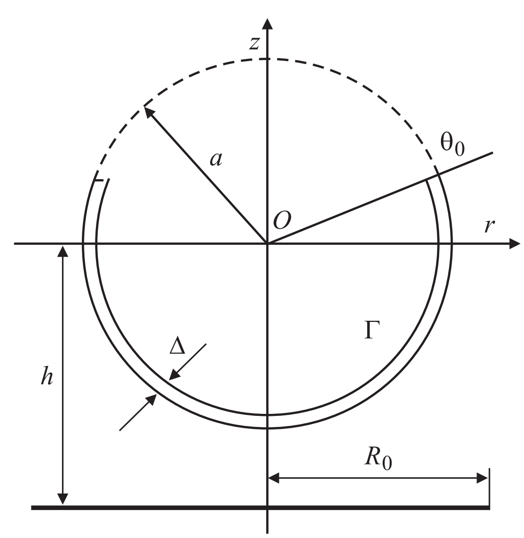

Рис. 1. Осевое сечение экрана.

Для учета краевых эффектов на ребре экрана Γ

$$\gamma_k = \{r = a,\ \theta = \theta_0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$$

введем потенциал источников, распределенных по экрану (см. [12, с. 170]):

$$u^k = \begin{cases} u_1^k = V \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta), & 0 \le r < a, \\ u_2^k = V \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta), & r > a, \end{cases}$$

где

$$b_0 = \frac{1}{\pi}(\theta_2 + \sin\theta_2),$$

$$b_n = \frac{(-1)^n}{\pi}\left(\frac{1}{n}\sin n\theta_2 + \frac{1}{n+1}\sin(n+1)\theta_2\right),$$

$$n \ge 1, \quad \theta_2 = \pi - \theta_0.$$

Для потенциала u^k выполнены условия

$$u_1^k\big|_\Gamma = u_2^k\big|_\Gamma = V, \quad u_1^k\big|_{\Gamma_1\setminus\Gamma} = u_2^k\big|_{\Gamma_1\setminus\Gamma},$$

$$\frac{\partial u_1^k}{\partial r}\bigg|_{\Gamma_1\setminus\Gamma} = \frac{\partial u_2^k}{\partial r}\bigg|_{\Gamma_1\setminus\Gamma}, \quad V = \text{const}. \tag{1}$$

Для суммарного магнитного потенциала $u_1^c = u_1 + u_1^k$ внутри сферы Γ_1 и для суммарного потенциала $u_2^c = u_2 + u_2^k$ вне сферы Γ_1 сформулируем краевую задачу экранирования со специальными граничными условиями на поверхности экрана Γ [8]:

$$\Delta u_1 = 0 \quad \text{в} \quad \mathrm{D}_1 = \{0 \le r < a\},$$

$$\Delta \bar{u}_2 = 0 \quad \text{в} \quad \mathrm{D}_2 = \{r > a\}, \tag{2}$$

$$u_1^c\big|_{\Gamma_1\setminus\Gamma} = u_2^c\big|_{\Gamma_1\setminus\Gamma}, \quad \frac{\partial u_1^c}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\Gamma_1\setminus\Gamma} = \frac{\partial u_2^c}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\Gamma_1\setminus\Gamma}, \quad 0 \le \theta < \theta_0,$$

$$\frac{\partial(u_2^c - u_1^c)}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_\Gamma = -apF(u_2^c + u_1^c)\big|_\Gamma,$$

$$\frac{\partial(u_2^c + u_1^c)}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_\Gamma = aqF(u_2^c - u_1^c)\big|_\Gamma, \quad \theta_0 < \theta \le \pi, \tag{3}$$

где

$$F(u) = (\mathbf{n}, \mathrm{rot}[\mathbf{n}, \mathrm{grad}\, u]) = \Delta u - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right),$$

$$p = \frac{\mu\delta}{2\mu_0 a}, \quad q = \frac{2}{\omega^2 \varepsilon' \mu_0 \delta a}, \quad \delta = \frac{2}{k_\Gamma}\,\mathrm{tg}\,\frac{k_\Gamma \Delta}{2},$$

$$\varepsilon' = \varepsilon + i\,\frac{\gamma}{\omega}, \quad k_\Gamma = \omega\sqrt{\varepsilon'\mu}, \quad 0 \le \arg k_\Gamma < \pi,$$

$\mathbf{n}$ — внешний нормальный единичный вектор к поверхности Γ,

$$r\big(\bar{u}_2(r,\theta) + u_2^k(r,\theta)\big) \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty, \tag{4}$$

r — радиальная координата произвольной точки M в пространстве R^3.

Реальные магнитные потенциалы и магнитные поля определяются формулами

$$U_j = \mathrm{Re}\big(u_j^c e^{-i\omega t}\big), \quad \mathbf{H}_j = -\,\mathrm{grad}\, U_j,$$

i — мнимая единица, $j = 1, 2$.

Первое и второе граничные условия (3) — условия непрерывности потенциала и поля в отверстии сферической оболочки Γ, третье и четвертое граничные условия (3) моделируют проникновение магнитного поля через тонкостенный сферический экран Γ толщиной Δ.

Так как оператор $F(u) = (\mathbf{n}, \mathrm{rot}[\mathbf{n}, \mathrm{grad}\, u])$ выражается через касательные производные вдоль поверхности Γ, то из свойств (1) следует условие

$$F(u_1^k)\big|_\Gamma = F(u_2^k)\big|_\Gamma = 0.$$

Учитывая непрерывность потенциала u^k и его производных на множестве $\Gamma_1\setminus\Gamma$, граничные условия (3) запишем в виде

$$u_1\big|_{\Gamma_1\setminus\Gamma} = u_2\big|_{\Gamma_1\setminus\Gamma}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\Gamma_1\setminus\Gamma} = \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{\Gamma_1\setminus\Gamma}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial(u_2 + u_2^k - u_1 - u_1^k)}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_\Gamma = -apF(u_2 + u_1)\big|_\Gamma,$$

$$\frac{\partial(u_2 + u_2^k + u_1 + u_1^k)}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_\Gamma = aqF(u_2 - u_1)\big|_\Gamma.$$

В качестве первичного магнитного поля возьмем поле кругового витка l ($\rho = R_0,\ z = -h,\ 0 \le \varphi < 2\pi$) с током I:

$$\mathbf{H}_0(\mathrm{M}) = \frac{I}{4\pi}\int\limits_l \frac{[\mathbf{l}_\mathrm{P}, R_\mathrm{PM}]}{R_\mathrm{PM}^3}\, dl_\mathrm{P} = -\,\mathrm{grad}\, u_0(\mathrm{M}),$$

где $\mathbf{l}_\mathrm{P} = \mathbf{e}_\varphi$ — единичный вектор, касательный к контуру l в точке $\mathrm{P} \in l$, R_PM — расстояние между точками P и M.

Потенциал этого поля в окрестности сферической оболочки равен [9]

$$u_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta), \quad 0 \le r < r_0, \tag{6}$$

где

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1} I R_0}{2nr_0}\left(\frac{a}{r_0}\right)^n P_n^1(\cos\theta_1), \quad a_0 = \frac{I}{2}(1 - h/r_0),$$

$$r_0 = \sqrt{h^2 + R_0^2}, \quad \cos\theta_1 = h/r_0, \quad h > a,$$

$P_n(x)$ — полиномы Лежандра, $P_n^k(x)$ — присоединенные функции Лежандра первого рода [10,11].

Выполнение граничных условий

Решение краевой задачи (2), (4), (5) будем искать в виде

$$u_1 \in C^2(\mathrm{D}_1), \quad \bar{u}_2 \in C^2(\mathrm{D}_2).$$

Рассматривая осесимметричную задачу, представим решение задачи в виде рядов по решениям уравнения Лапласа в сферической системе координат так, чтобы выполнялось условие на бесконечности (4):

$$u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta), \quad r < a,$$

$$\bar{u}_2 = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta), \quad r > a,$$

где x_n, y_n — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению из граничных условий.

Подставив выражения для магнитных потенциалов в условия (5), получим следующие системы парных сумматорных уравнений по полиномам Лежандра:

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}(x_n - y_n)P_n(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos\theta), \quad 0 \le \theta < \theta_0; \\ \sum_{n=0}^{\infty}\{n[1+(n+1)p]x_n + (n+1)(1+np)y_n\}P_n(\cos\theta) \\ = \sum_{n=0}^{\infty}\big[n(1-(n+1)p)a_n - (2n+1)Vb_n\big]P_n(\cos\theta), \\ \qquad \theta_0 < \theta \le \pi; \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}\big[nx_n + (n+1)y_n\big]P_n(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n P_n(\cos\theta), \\ \qquad 0 \le \theta < \theta_0; \\ \sum_{n=0}^{\infty}\{n[1-(n+1)q]x_n + (n+1)(nq-1)y_n\}P_n(\cos\theta) \\ = \sum_{n=0}^{\infty}\{n[-1-(n+1)q]a_n + Vb_n\}P_n(\cos\theta), \\ \qquad \theta_0 < \theta \le \pi. \end{cases} \tag{8}$$

Для решения парных уравнений (7), (8) введем новые неизвестные коэффициенты $T_n^{(1)}, T_n^{(2)}$, которые связаны с коэффициентами x_n, y_n соотношениями:

$$T_0^{(1)} = y_0 + Vb_0, \quad T_0^{(2)} = -x_0,$$

$$T_n^{(1)} = \{n[1+(n+1)p]x_n + (n+1)(1+np)y_n$$
$$- n[1-(n+1)p]a_n + (2n+1)Vb_n\}/2n+1, \quad n \ge 1,$$
$$T_n^{(2)} = \{n[1-(n+1)q]x_n + (n+1)(nq-1)y_n$$
$$+ n[1+(n+1)q]a_n - Vb_n\}/2n+1, \quad n \ge 1. \tag{9}$$

Подставив представления (9) в парные уравнения (7), (8), получим

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(1)}T_n^{(1)}P_n(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\big(A_n^{(1)}T_n^{(2)} + B_n^{(1)} + VM_n^{(1)}\big) \\ \qquad \times P_n(\cos\theta), \quad 0 \le \theta < \theta_0, \\ \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)T_n^{(1)}P_n(\cos\theta) = 0, \quad \theta_0 < \theta \le \pi, \end{cases} \tag{10}$$

где

$$G_0^{(1)} = -1, \quad A_0^{(1)} = 1, \quad B_0^{(1)} = a_0, \quad M_0^{(1)} = -b_0,$$

$$G_n^{(1)} = -\frac{2n+1}{\Delta_n}, \quad A_n^{(1)} = -\big[2n+1+2n(n+1)p\big]G_n^{(1)},$$

$$B_n^{(1)} =$$
$$= \left(\frac{-n(n+1)(2n+1)(p+q) - n^2[2+2(n+1)^2pq]}{\Delta_n} + 1\right)a_n,$$

$$M_n^{(1)} = \frac{2n(n+1)}{\Delta_n}pb_n,$$

$$\Delta_n = n(n+1)\big[(2n+1)(q-p) + 2n(n+1)pq - 2\big],$$
$$n \ge 1,$$

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} G_n^{(2)}T_n^{(2)}P_n(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\big(A_n^{(2)}T_n^{(1)} + B_n^{(2)} + VM_n^{(2)}\big) \\ \qquad \times P_n(\cos\theta), \quad 0 \le \theta < \theta_0, \\ -T_0^{(1)} - T_0^{(2)} + \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)T_n^{(2)}P_n(\cos\theta) = 0, \\ \qquad \theta_0 < \theta \le \pi, \end{cases} \tag{11}$$

где

$$G_0^{(2)} = 0, \quad A_0^{(2)} = -1, \quad B_0^{(2)} = 0,$$

$$G_n^{(2)} = \frac{(2n+1)n(n+1)p}{\Delta_n},$$

$$A_n^{(2)} = -n(n+1)\big[2-(2n+1)q\big]G_n^{(1)},$$

$$M_0^{(2)} = b_0,$$

$$M_n^{(2)} = \frac{n(n+1)}{\Delta_n}\big[(2n+1)^2q - p - 2(2n+1)\big]b_n,$$

$$B_n^{(2)} = \left\{\frac{-n^2(n+1)[(2n+1)(p+q) - 2 - 2(n+1)^2pq]}{\Delta_n}\right.$$
$$\left. + n\right\}a_n, \quad n \ge 1.$$

Коэффициенты $G_n^{(j)}, A_n^{(j)}$ $(j = 1, 2)$ представим в виде

$$G_n^{(j)} = \alpha^{(j)} + \beta^{(j)}\frac{1}{2n+1} + \gamma_n^{(j)},$$

$$A_n^{(j)} = k^{(j)} + l^{(j)} \frac{1}{2n+1} + m_n^{(j)},$$

$$\alpha^{(1)} = \beta^{(1)} = \alpha^{(2)} = 0, \quad \beta^{(2)} = \frac{2}{q}, \quad \gamma_0^{(1)} = -1,$$

$$\gamma_0^{(2)} = -\frac{2}{q}, \quad k^{(1)} = 0, \quad k^{(2)} = -\frac{2}{p}, \tag{12}$$

$$l^{(1)} = \frac{4}{q}, \quad l^{(2)} = \frac{4}{p^2}, \quad m_0^{(1)} = 1 - \frac{4}{q},$$

$$m_0^{(2)} = -1 + \frac{2}{p} - \frac{4}{p^2},$$

$$\gamma_n^{(j)} = 0(n^{-2}), \quad m_n^{(j)} = 0(n^{-2}) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Преобразование парных уравнений

Преобразуем системы парных сумматорных уравнений (10), (11) к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Для этого введем в рассмотрение новые функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, которые связаны с коэффициентами $T_n^{(1)}$ и $T_n^{(2)}$ следующими соотношениями:

$$T_n^{(1)} = \int_0^{\theta_0} \varphi_1(t) \cos(n+0.5)t\,dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$T_n^{(2)} = \int_0^{\theta_0} \varphi_2(t) \cos(n+0.5)t\,dt, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$T_0^{(2)} = C + \int_0^{\theta_0} \varphi_2(t) \cos\frac{t}{2}\,dt, \tag{13}$$

где C — постоянная величина.

Из формул (13) получим условие ограниченности

$$|T_n^{(j)}| \le \int_0^{\theta_0} |\varphi_j(t)| dt < C_1 = \text{const}, \quad j = 1, 2.$$

Разрешив систему (9) относительно x_n, y_n и оценив коэффициенты a_n, b_n, получим неравенства

$$|x_n| < C_2/n, \quad |y_n| < C_2/n, \quad n > 1, \quad C_2 = \text{const},$$

из которых следует $u_1 \in C^2(\mathrm{D}_1)$, $\bar{u}_2 \in C^2(\mathrm{D}_2)$.

Проинтегрируем правую часть $T_n^{(1)}$ по частям

$$T_n^{(1)} = \frac{2}{2n+1}\Bigg[\varphi_1(\theta_0)\sin(n+0.5)\theta_0 - \int_0^{\theta_0} \varphi_1'(t) \sin(n+0.5)t\,dt\Bigg]$$

и подставим полученное представление во второе уравнение (10)

$$2\varphi_1(\theta_0) \sum_{n=0}^{\infty} \sin(n+0.5)\theta_0\, P_n(\cos\theta) - 2\int_0^{\theta_0} \varphi_1'(t) \Bigg[\sum_{n=0}^{\infty} \sin(n+0.5)t\, P_n(\cos\theta)\Bigg] dt = 0. \tag{14}$$

Так как в уравнении (14) $t \le \theta_0 < \theta$, то согласно разложению [12,13]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin(n+0.5)t\, P_n(\cos\theta) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \theta < \pi, \\ \big(2(\cos\theta - \cos t)\big)^{-1/2}, & 0 < \theta < t \le \pi, \end{cases}$$

суммы рядов равны нулю. Таким образом, второе уравнение (10) выполняется тождественно.

Выполнив аналогичные преобразования для коэффициентов $T_n^{(2)}$ и подставив их во второе уравнение системы (11), получим условие

$$\int_0^{\theta_0} \big(\varphi_1(t) + \varphi_2(t)\big) \cos\frac{t}{2}\,dt = 0. \tag{15}$$

В первые уравнения (10), (11) подставим выражения (13) для $T_n^{(1)}$ и $T_n^{(2)}$, учитывая представления (12) для коэффициентов $G_n^{(j)}$, $A_n^{(j)}$ $(j = 1, 2)$ вида

$$G_n^{(j)} = \alpha^{(j)} - \tilde{G}_n^{(j)}, \quad A_n^{(j)} = k^{(j)} - \tilde{A}_n^{(j)} \tag{16}$$

и интегральное представление Мелера–Дирихле для полиномов Лежандра $P_n(\cos\theta)$ [12,13]:

$$P_n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{\cos\big((n+0.5)x\big)\,dx}{\sqrt{2(\cos x - \cos\theta)}}.$$

В результате эти уравнения примут вид

$$\int_0^{\theta} \Bigg\{\alpha^{(1)}\varphi_1(x) - k^{(1)}\varphi_{(2)}(x) - \int_0^{\theta_0} \varphi_1(t) K_1(x,t) dt + \int_0^{\theta_0} \varphi_2(t) K_2(x,t) dt\Bigg\} \frac{dx}{\sqrt{2(\cos x - \cos\theta)}}$$

$$= C + \sum_{n=0}^{\infty} (B_n^{(1)} + V M_n^{(1)}) P_n(\cos\theta), \quad 0 \le \theta \le \theta_0,$$

$$\int_0^{\theta}\Bigg\{\alpha^{(2)}\varphi_2(x)-k^{(2)}\varphi_{(1)}(x)-\int_0^{\theta_0}\varphi_2(t)K_3(x,t)dt$$

$$+\int_0^{\theta_0}\varphi_1(t)K_4(x,t)dt\Bigg\}\frac{dx}{\sqrt{2(\cos x-\cos\theta)}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(B_n^{(2)}+VM_n^{(2)})P_n(\cos\theta),\quad 0\le\theta\le\theta_0,\quad (17)$$

где

$$K_j(x,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{(j)}\cos(n+0.5)t\cos(n+0.5)x,\quad (18)$$

$$L_n^{(1)}=\tilde G_n^{(1)},\quad L_n^{(2)}=\tilde A_n^{(1)},\quad L_n^{(3)}=\tilde G_n^{(2)},\quad L_n^{(4)}=\tilde A_n^{(2)}.$$

Известно, что функция $\Phi(x)$, удовлетворяющая интегральному уравнению Абеля

$$\int_0^{\theta}\frac{\Phi(x)dx}{\sqrt{2(\cos x-\cos\theta)}}=f(\theta),\quad 0\le\theta<\theta_0,$$

определяется по формуле [12]

$$\Phi(x)=\frac{2}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^{x}\frac{f(\theta)\sin\theta d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos x)}},\quad 0\le x\le\theta_0.\quad (19)$$

Рассматривая соотношения (17) как интегральное уравнение Абеля, согласно формуле (19), получим систему интегральных уравнений:

$$\int_0^{\theta_0}\varphi_1(t)K_{11}(x,t)dt+\int_0^{\theta_0}\varphi_2(t)K_{12}(x,t)dt$$

$$=f_1(x)+Vg_1(x)+Cf_0(x),\quad 0\le x\le\theta_0,$$

$$\varphi_1(x)+\int_0^{\theta_0}\varphi_1(t)K_{21}(x,t)dt+\int_0^{\theta_0}\varphi_2(t)K_{22}(x,t)dt$$

$$=f_2(x)+Vg_2(x),\quad 0\le x\le\theta_0,\quad (20)$$

где

$$K_{11}(x,t)=-K_1(x,t),\quad K_{12}(x,t)=K_2(x,t),$$

$$K_{21}(x,t)=-\frac{1}{k^{(2)}}K_4(x,t),\quad K_{22}(x,t)=\frac{1}{k^{(2)}}K_3(x,t);$$

$$f_0(x)=\frac{2}{\pi}\cos\frac{x}{2},\quad f_1(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(1)}\cos(n+0.5)x,$$

$$f_2(x)=\frac{p}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(2)}\cos(n+0.5)x.$$

$$g_1(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}M_n^{(1)}\cos(n+0.5)x,$$

$$g_2(x)=\frac{p}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}M_n^{(2)}\cos(n+0.5)x.$$

При преобразовании учтено, что имеет место соотношение [11,12]

$$\frac{2}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^{x}\frac{P_n(\theta)\sin\theta d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos x)}}=\cos(n+0.5)x.$$

Из формул (12) и (16) получим представление для коэффициентов $\tilde G_n^{(j)}$, $\tilde A_n^{(j)}$, $n=1,2$,

$$\tilde G_0^{(1)}=1,\quad \tilde G_0^{(2)}=0,\quad \tilde A_0^{(1)}=-1,\quad \tilde A_0^{(2)}=1-\frac{2}{p},$$

$$\tilde G_n^{(1)}=-\gamma_n^{(1)},\quad \tilde G_n^{(2)}=-\frac{2}{q(2n+1)}-\gamma_n^{(2)},$$

$$\tilde A_n^{(1)}=-\frac{4}{q(2n+1)}-m_n^{(1)},\quad \tilde A_n^{(2)}=-\frac{4}{p^2(2n+1)}-m_n^{(2)},$$

$$n=1,2,\dots$$

Используя формулы (18) для представления $K_i(x,t)$, получим

$$K_{11}(x,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n^{(1)}C_n(x,t),$$

$$K_{12}(x,t)=-\frac{2}{\pi q}K(x,t)-\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}m_n^{(1)}C_n(x,t),$$

$$K_{21}(x,t)=-\frac{1}{\pi p}K(x,t)-\frac{p}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}m_n^{(2)}C_n(x,t),$$

$$K_{22}(x,t)=\frac{p}{2\pi q}K(x,t)+\frac{p}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n^{(2)}C_n(x,t),$$

где

$$C_n(x,t)=\cos(n+1/2)t\cos(n+1/2)x,$$

$$K(x,t)=\ln\mathrm{ctg}\left(\frac{x+t}{4}\right)+\ln\mathrm{ctg}\left(\frac{|x-t|}{4}\right)=4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n(x,t)}{2n+1}.$$

Решение φ_1,φ_2 системы (20) запишем в операторном виде

$$L\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1+Vg_1+Cf_0\\ f_2+Vg_2\end{pmatrix}.\quad (21)$$

Рассмотрим следующие системы уравнений:

$$L\begin{pmatrix}\varphi_1^0\\ \varphi_2^0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix},\quad L\begin{pmatrix}\varphi_1^*\\ \varphi_2^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_0\\ 0\end{pmatrix},$$

$$L\begin{pmatrix}\bar\varphi_1\\ \bar\varphi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_1\\ g_2\end{pmatrix}.\quad (22)$$

В результате получим, что $\varphi_1=\varphi_1^0+C\varphi_1^*+V\bar\varphi_1$, $\varphi_2=\varphi_2^0+C\varphi_2^*+V\bar\varphi_2$ — решение системы (21).

Заметим, что условие (4) для потенциала $\bar{u}_2 + u_2^k$ выполнено, если $y_0 + Vb_0 = 0$, либо, согласно (9),

$$T_0^{(1)} = \int\limits_0^{\theta_0} \varphi_1(t) \cos\frac{t}{2}\, dt = 0. \tag{23}$$

Для выполнения условия (15) потребуем выполнения условия

$$\int\limits_0^{\theta_0} \varphi_2(t) \cos\frac{t}{2}\, dt = 0. \tag{24}$$

Предполагая, что решения системы уравнений (22) существуют, из соотношений (23), (24) получим систему алгебраических уравнений для определения потоянных C и V:

$$\begin{cases} C\int\limits_0^{\theta_0} \varphi_1^*(t)\cos\frac{t}{2}dt + V\int\limits_0^{\theta_0} \bar{\varphi}_1(t)\cos\frac{t}{2}dt = -\int\limits_0^{\theta_0} \varphi_1^0(t)\cos\frac{t}{2}dt,\\ C\int\limits_0^{\theta_0} \varphi_2^*(t)\cos\frac{t}{2}dt + V\int\limits_0^{\theta_0} \bar{\varphi}_2(t)\cos\frac{t}{2}dt = -\int\limits_0^{\theta_0} \varphi_2^0(t)\cos\frac{t}{2}dt. \end{cases} \tag{25}$$

Определив C и V из (25), вычислим суммарный магнитный потенциал внутри оболочки Γ по формуле

$$u_1^c = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta), \quad X_n = x_n + Vb_n. \tag{26}$$

Из (9), с учетом (13), следует, что коэффициенты x_n связаны с решением системы (21) формулой

$$x_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{\Delta_n}\left[(nq-1)\int\limits_0^{\theta_0} \varphi_1(t)\cos(n+0.5)t\, dt\right.$$

$$\left. - (1+np)\int\limits_0^{\theta_0} \varphi_2(t)\cos(n+0.5)t\, dt\right] + \frac{n(n+1)(2n+1)}{\Delta_n}$$

$$\times (p+q)a_n - \frac{(n+1)}{\Delta_n}\left[2n^2q + n(p+q) - 2n\right]Vb_n.$$

Вычислительный эксперимент

Изменение напряженности магнитного поля в произвольной точке M_0 области D_1 в течение периода $T = 2\pi/\omega$ определяется по формуле

$$\mathbf{H}_1(M_0,\bar{t}) = -\frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\big(X_n \exp(-2\pi i\bar{t})\big)\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}$$

$$\times \big(nP_n(\cos\theta)\mathbf{e}_r + P_n^1(\cos\theta)\mathbf{e}_\theta, \big),$$

где $0 \le \bar{t} \le 1$, $\bar{t} = t/T$ — безразмерное время.

Если точка M_0 находится на оси Oz, то $|z| < a$, $\theta = 0$ $(\cos\theta = 1,\ P_n(1) = 1)$ или $\theta = \pi$ $(\cos\theta = -1,\ P_n(-1) = (-1)^n)$, то в этом случае

$$\mathbf{H}_1(M_0,\bar{t}) = \begin{cases} \mathbf{H}_1^{(+)}(M_0,\bar{t}), & \text{если} \quad 0 \le z < a,\ \theta = 0,\\ \mathbf{H}_1^{(-)}(M_0,\bar{t}), & \text{если} \ -a < z \le 0,\ \theta = \pi, \end{cases}$$

где

$$\mathbf{H}_1^{(+)}(M_0,\bar{t}) = -\frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{Re}\big(X_n\exp(-2\pi i\bar{t})\big)\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}\mathbf{e}_r,$$

$$\mathbf{H}_1^{(-)}(M_0,\bar{t}) = -\frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\,\mathrm{Re}\big(X_n\exp(-2\pi i\bar{t})\big)$$

$$\times \left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}\mathbf{e}_r, \quad r = |z|.$$

Коэффициенты экранирования (ослабления) поля в точке M_0, расположенной на оси Oz в области D_1, вычисляем по формуле

$$K^{(\pm)}(M_0,\bar{t}) = \frac{|\mathbf{H}_1^{(\pm)}(M_0,\bar{t})|}{|\mathbf{H}_0(M_0,\bar{t})|}, \tag{27}$$

где

$$\mathbf{H}_0(M_0,\bar{t}) = -\frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty} a_n n\cos(2\pi\bar{t})\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} P_n(\cos\theta)\mathbf{e}_r,$$

$$0 \le r < a.$$

Для численного решения систем интегральных уравнений (22) использовался метод коллокации. Разбиваем отрезок $[0,\theta_0]$ на N частичных отрезков $[\theta_0^0,\theta_0^1], [\theta_0^1,\theta_0^2], \ldots, [\theta_0^{N-1},\theta_0^N]$ длиной $h = \theta_0/N$, $\theta_0^i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$. Приближенное решение, например, первой системы (22) ищем в виде линейной комбинации

$$\varphi_1^0(t) = \sum_{n=1}^{N} C_n\psi_n(t), \quad \varphi_2^0(t) = \sum_{n=1}^{N} D_n\psi_n(t),$$

где $\psi_n(t)$ — базисные функции.

В качестве базисных функций выбираем систему функций Хаара [14], а в качестве точек коллокации — точки $x_m = (\theta_0^{m-1} + \theta_0^m)/2$ — середины частичных отрезков. В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов C_n, D_n:

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{N}\big[C_nA_{nm}^{11} + D_nA_{nm}^{12}\big] = f_m^1,\\ \sum\limits_{n=1}^{N}\big[C_nA_{nm}^{21} + D_nA_{nm}^{22}\big] = f_m^2, \quad m = 1,\ldots,N, \end{cases} \tag{28}$$

где $f_m^i = f_i(x_m)$,

$$A_{nm}^{ij} = \begin{cases} \delta_{nm} + \int\limits_{\theta_0^{n-1}}^{\theta_0^n} K_{ij}(x_m, t)dt, & i = 2, \; j = 1, \\ \int\limits_{\theta_0^{n-1}}^{\theta_0^n} K_{ij}(x_m, t)dt & \text{для остальных индексов.} \end{cases}$$

Кроме того, для получения достоверного решения системы линейных алгебраических уравнений (28) необходимо проверить обусловленность системы. Матрица, соответствующая системе, считается хорошо обусловленной, если число обусловленности матрицы более или равно единице [15].

Проведен вычислительный эксперимент. Число обусловленности системы линейных алгебраических уравнений в L_1, L_2 [16] для рассмотренных параметров задачи не превышало 80. При выполнении расчетов бесконечные суммы, входящие в представление интегральных уравнений (22), вычислялись с точностью 10^{-5}, шаг $h = 0.05$.

В ходе вычислений были получены значения коэффициента экранирования $K^{(+)}(\mathrm{M}_0, 0)$ для некоторых углов раствора θ_0 незамкнутой полупрозрачной сферической оболочки Г и следующих параметров:

$$a = 1\,\mathrm{m}; \;\; R_0 = 0.5\,\mathrm{m}; \;\; h = 1.3\,\mathrm{m}; \;\; \Delta = 0.01\,\mathrm{m};$$

$$f = 1000\,\mathrm{Hz}; \;\; \varepsilon = \varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}; \;\; \gamma = 10^5\,\mathrm{Sm/m};$$

$$\mu = 100\,\mu_0; \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Hn/m}.$$

На рис. 2 сплошными кривыми представлены графики $K^{(+)}(\mathrm{M}_0, 0)$, $0 < r/a < 1$, для углов раствора: *1* — $\theta_0 = \pi/4$, *2* — $\theta_0 = \pi/2$, *3* — $\theta_0 = 2\pi/3$. Пунктиром изображены графики $K^{(+)}(\mathrm{M}_0, 0)$ для идеально проводящей оболочки Г при тех же значениях угла раствора θ_0: *4* — $\theta_0 = \pi/4$, *5* — $\theta_0 = \pi/2$, *6* — $\theta_0 = 2\pi/3$.

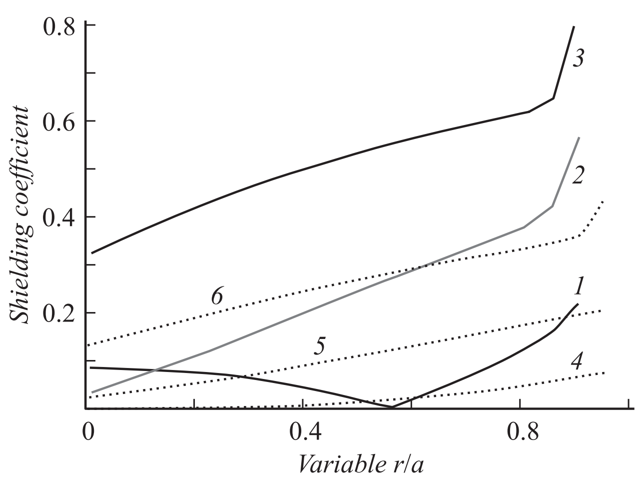

Рис. 2. Зависимости коэффициентов экранирования $K^{(+)}(\mathrm{M}_0, 0)$ от r/a для незамкнутой полупрозрачной сферической оболочки (кривые *1–3*) для углов раствора θ_0: *1, 4* — $\pi/4$; *2, 5* — $\pi/2$; *3, 6* — $2\pi/3$. Кривые *4–6* — для идеально проводящей оболочки.

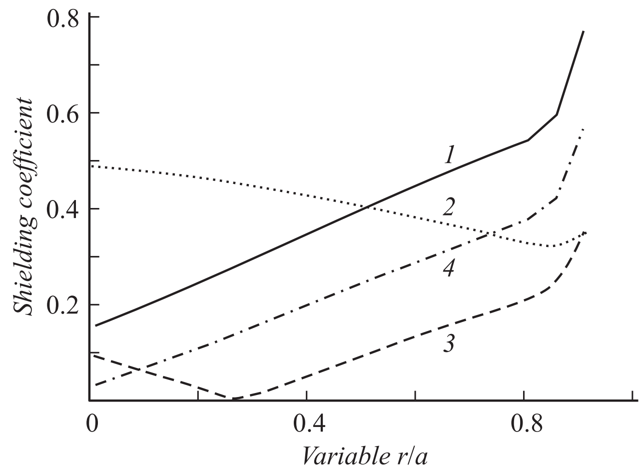

Рис. 3. Зависимости коэффициентов экранирования $K^{(+)}(\mathrm{M}_0, t)$ от r/a при угле раствора $\theta_0 = \pi/2$. Значения $\bar{t} = t/T$: *1* — 0.1, *2* — 0.3, *3* — 0.4, *4* — 0.5.

На рис. 3 представлены графики $K^{(+)}(\mathrm{M}_0, \bar{t})$, $0 < r/a < 1$, для угла раствора $\theta_0 = \pi/2$ и различных значений $\bar{t}$.

Заключение

Предложена методика решения задачи экранирования низкочастотного магнитного поля незамкнутым полупрозрачным сферическим экраном. Из вычислительного эксперимента следует, что полупрозрачная незамкнутая сферическая оболочка ухудшает экранирующие свойства по сравнению с идеально проводящей оболочкой.

Список литературы

[1] *Павлов А.Н.* Воздействие электромагнитных излучений на жизнедеятельность. М.: Гелиос АРВ, 2002. 224 с.

[2] *Аполлонский С.М.* Внешние электромагнитные поля электрооборудования и средства их снижения. СПб.: Безопасность, 2001. 620 с.

[3] *Apollonskii S.M., Erofeenko V.T., Shushkevich G.Ch.* // Proc. of St. Petersburg IEEE Chapters. 2003. P. 68–72.

[4] *Аполлонский С.М., Ерофеенко В.Т.* Электромагнитные поля в экранирующих оболочках. Минск: БГУ, 1988. 246 с.

[5] *Canova A., Gruosso G., Repetto M.* // The Int. J. for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Eng. 2004. N 1. P. 173–186.

[6] *Ерофеенко В.Т., Шушкевич Г.Ч.* // Электромагнитные волны и электронные системы. 2002. Т. 7. № 9. С. 40–48.

[7] *Ерофеенко В.Т., Шушкевич Г.Ч.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 3. С. 10–15.

[8] *Аполлонский С.М., Ерофеенко В.Т.* Эквивалентные граничные условия в электродинамике. СПб.: Безопасность, 1999. 415 с.

[9] *Ерофеенко В.Т., Козловская И.С.* Основы математического моделирования. Минск: БГУ, 2002. 196 с.

[10] *Справочник* по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 840 с.
[11] *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. М.–Л.: ГИТТЛ, 1953. 380 с.
[12] *Уфлянд Я.С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. М.: Наука, 1977. 220 с.
[13] *Шушкевич Г.Ч.* Расчет электростатических полей методом парных, тройных уравнений с использованием теорем сложения. Гродно: ГрГУ, 1999. 238 с.
[14] *Дмитриев В.И., Захаров Е.В.* Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. М.: МГУ, 1987. 168 с.
[15] *Каханер Д., Моулер К., Нэш С.* Численные методы и программное обеспечение. М.: Мир, 1998. 576 с.
[16] *Бержбицкий В.М.* Основы численных методов. М.: Высш. школа, 2002. 848 с.