УДК 330

МАТЕМЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВСЕНАПРАЛЕННОЙ ПЛАТФОРМЫ НА МЕКАНУМ-КОЛЕСАХ

ОСОКИН НИКИТА СЕРГЕЕВИЧ
студент
ФГБОУ ВО «Астраханский государственный университет»

Научный руководитель: Старов Дмитрий Владимирович
старший преподаватель кафедры электротехники, электроники и автоматики.
ФГБОУ ВО «Астраханский государственный университет»

Аннотация: В статье рассмотрела математическая модель робота с четырех меканум колесами, расположенными вдоль корпуса. Предполагается, что ось роликов относительно осей колес отклонена на 45 градусов. Исследуется функция управления и приведены явные формулы моментов сил, которые нужно приложить к колесам для движения вдоль заданной траектории.
Ключевые слова: математическая модель, мобильная платформа, всенаправленное колесо, меканум-колесо.

MATHEMATICAL MODELING OF AN ALL-TERRAIN PLATFORM ON MECANUM WHEELS.

Osokin Nikita Sergeevich

Scientific adviser: Starov Dmitry Vladimirovich

Abstract: The article considers a mathematical model of a robot with four mecanum wheels located along the body. It is assumed that the axis of the rollers relative to the axes of the wheels is deflected by 45 degrees. The control function is investigated and explicit formulas for the moments of forces that must be applied to the wheels to move along a given trajectory are given.
Key words: mathematical model, mobile platform, omnidirectional wheel, mecanum wheel.

Мобильные роботы на колесах mecanum демонстрируют способность двигаться в любом направлении относительно своего корпуса, например, поступательного движения, по различным траекториям, в том числе сложной формы. Эта способность таких роботов очень важна, когда необходимо построить траекторию движения робота в ограниченных условиях, например, в узких проемах складов и т.д. Обратите внимание, что аналогичные сложные движения могут быть реализованы сложными шагающими роботами, такими как описанные в [2], но они кинематически более сложны.

Если вам также нужно задать произвольные повороты корпуса робота, то наиболее удобными являются так называемые колеса mekanum. Это роликовые колеса, оси роликов которых направлены не ортогонально плоскости колеса и не в плоскости колеса, а под некоторым углом к этой плоскости. Наиболее часто используемым случаем являются углы осей роликов под углом 45 к плоскости колеса. Схема колеса mecanum показана на рис. 1.

Рис. 1. Mecanum колесо

Соответственно, при вращении результирующая сила также направлена под углом. На четырехколесной платформе, комбинируя вращения отдельных колес, можно добиться не только перемещения вправо-влево, вперед-назад, но и диагонального перемещения, а также одновременного перемещения и вращения вокруг собственной оси.

Колеса Mecanum не требуют специальной схемы установки, как того требуют колеса omni, и могут устанавливаться на типичную 4-колесную мобильную платформу вместо обычных колес. Еще одной важной особенностью мобильной платформы на колесах Mecanum является возможность вращения на месте с минимальным трением и низким крутящим моментом.

В литературе [3,4] подробно рассмотрены варианты использования роботов с 4-мя муканум-колесами, варианты использования роботов с большим числом колес практически не исследуется. В настоящей работе рассмотрел вариант четырехколесного робота, оснащенного меканум-колесами.

Построим простую математическую модель подобной платформы:

В абсолютной системе координат (относительно поверхности земли) линейные скорости заданы вектором VB, а угловые скорости вектором V.

$$V = \begin{bmatrix} V_{x,B} \\ V_{y,B} \\ V_{z,B} \end{bmatrix}; w = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (1)$$

При этом $V_{z,B} = 0$, $p = 0$ и $q = 0$

Матрица поворота от абсолютной системы к относительной координатной системе платформы:

$$R = \begin{bmatrix} C_\psi C_\theta & C_\psi S_\theta S_\varphi - S_\psi C_\varphi & C_\psi S_\theta C_\varphi + S_\psi S_\varphi \\ S_\psi C_\theta & S_\psi S_\theta S_\varphi + C_\psi C_\varphi & S_\psi S_\theta C_\varphi - C_\psi S_\varphi \\ -S_\theta & S_\varphi C_\theta & C_\varphi C_\theta \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где $C_x = \cos x$, $S_x = \sin x$.

Так как углы φ и θ не изменяются и равны 0, то:

$$R = \begin{bmatrix} C_\psi & -S_\psi & 0 \\ S_\psi & C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Связь между линейными скоростями в относительной и абсолютной системах задаётся соотношением:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = RV_B = \begin{bmatrix} C_\psi & -S_\psi & 0 \\ S_\psi & C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{x,B} \\ V_{y,B} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\psi V_{x,B} - S_\psi V_{y,B} \\ S_\psi V_{x,B} + C_\psi V_{y,B} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

С помощью матрицы перехода W для угловых скоростей от относительной системы к абсолютной выразим соотношения:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = W \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -S_\theta \\ 0 & C_\phi & S_\phi C_\theta \\ 0 & -S_\phi & C_\phi C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Однако т. к. в нашем случае платформа может вращаться только вокруг оси Oz, а углы φ и θ постоянны и равны 0, то из всего этого соотношения можно выразить только r = φ. Обозначим вектор скорости платформы в относительной системе как v. Тогда:

$$m_t \frac{dv}{dt} = f \quad (6)$$

где m_t – общая масса платформы;

f – вектор суммарной силы, приложенный к нему.

Для перехода из неподвижной системы координат в подвижную (т. е. относительную) перепишем закон в виде:

$$m_t \frac{dv_b}{dt} = m_t\left(\frac{dv}{dt} + \omega \cdot v\right) = f, \quad (7)$$

где $\frac{dv_b}{dt}$ – линейное ускорение аппарата относительно абсолютной системы координат,

ω – угловая скорость вращения абсолютной системы относительно системы платформы (рад/с).

Так как управляющая сила вычисляется и прикладывается в строительной системе координат, то полученное выражение следует записать в этой системе координат:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{x,B} \\ \dot{v}_{y,B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rV_{y,B} \\ -rV_{x,B} \end{bmatrix} + \frac{1}{m_t} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \quad (8)$$

Для вращательного движения в неподвижной системе координат

$$\frac{dL}{dt} = M \quad (9)$$

где $L_B = J\omega_B$, J – тензор инерции

Представим платформу шаром с радиусом R_S = 0,5 м, массой M_S = 100 кг на расстоянии l = 0,8 м (в проекции на плоскость XY) от центра которого расположены материальный точки (двигатели с колёсами, рама и т. д.) с массой M_m = 12,5 кг.

Тогда тензор инерции вокруг оси Z:

$$J_Z = \frac{2M_S R_S^2}{5} + 4l^2 M_m \quad (10)$$

Компоненты J_x и J_y нам не потребуются, т. к. платформа устойчиво стоит на поверхности и не может самостоятельно вращаться вокруг осей x и y, тогда:

$$\dot{r} = \frac{1}{J_Z} \cdot \tau_\psi, \quad (11)$$

$$M_B = \begin{bmatrix} \tau_\phi & \tau_\theta & \tau_\psi \end{bmatrix}^T \quad (12)$$

где τ_ψ – компонента момента вращающей силы.

Теперь необходимость дополнить уравнения, описывающие модель платформы, выражениями, задающими силы и крутящие моменты, действующие на аппарат. Предположим, мы используем коллекторные двигатели постоянного тока для приведения платформы в движение, тогда моменты двигателей будут примерно пропорциональны коэффициенту заполнения.

Тогда выражения для тяги и моментов имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \tau_\psi &= lk\cdot(D_1 - D_2 - D_3 + D_4)\cdot\sin 45^\circ \\ F_x &= k\cdot(D_1 + D_2 + D_3 + D_4) \\ F_y &= k\cdot(D_1 + D_3 - D_2 - D_4)\cdot\sin 45^\circ \end{aligned} \qquad 13)$$

где D – коэффициент заполнения;

l – расстояние от центра до точки опоры;

k – коэффициент пропорциональный номинальному моменту двигателей и обратно пропорциональный радиусу колёс.

Также на платформу действуют внешние силы:

$$F_T = \begin{bmatrix} F_{kx} \\ F_{ky} \\ 0 \end{bmatrix}, F_k = \frac{f}{R}\cdot N = \frac{f}{R}\cdot m_t g \qquad (14)$$

По оси z силы равны нулю т. к. сила тяжести компенсируется силой нормальной реакции опоры.

Выразим условие ускорения:

$$\begin{bmatrix} \ddot\varphi \\ \ddot\theta \\ \ddot\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot p \\ \dot q \\ \dot r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_x}\tau_\varphi \\ \frac{1}{J_y}\tau_\theta \\ \frac{1}{J_z}\tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_z}\tau_\psi \end{bmatrix} \qquad (15)$$

Выразим линейные ускорения:

$$\begin{bmatrix} \ddot x \\ \ddot y \\ \ddot z \end{bmatrix} = -\frac{1}{m}\begin{bmatrix} F_{kx} \\ F_{ky} \\ 0 \end{bmatrix} * \left(\Theta\begin{bmatrix} \dot x \\ \dot y \\ \dot z \end{bmatrix}\cdot 2 - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} C_\psi & -S_\psi & 0 \\ S_\psi & C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{m_t} \qquad (16)$$

Θ - функция Хевисайда:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases} \qquad (17)$$

В итоге математическая модель платформы имеет вид:

$$\begin{cases} \ddot x = -\frac{F_{kx}}{m}\cdot(2\Theta(\dot x) - 1) + (F_x C_\psi - F_y S_\psi)\cdot\frac{1}{m_t} \\ \ddot y = -\frac{F_{ky}}{m}\cdot(2\Theta(\dot y) - 1) + (F_x C_\psi + F_y S_\psi)\cdot\frac{1}{m_t} \\ \ddot\psi = \frac{1}{J_z}\tau_\psi \end{cases} \qquad (18)$$

$$F_{kx} = \frac{f}{R}mg\cdot\frac{\dot x^2}{\dot x^2+\dot y^2}, F_{ky} = \frac{f}{R}mg\cdot\frac{\dot y^2}{\dot x^2+\dot y^2}.$$

где f – коэффициент трения качения, для силикона (твёрдость по Шору 90А) и бетона f ≈ 15. R - радиус скругления ролика; R ≈ 0,03.

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{f}{R}\cdot\left(\frac{2}{[illegible]}\right)\cdot(2\Theta(\dot{x})-1) + (k(D_1+D_2+D_3+D_4)\cos\psi - \\ -\sin\psi\cdot k(D_1+D_2-D_3-D_4)\cdot\sin 45^\circ)\frac{1}{m_t} \\ \ddot{y} = -\frac{f}{R}\cdot\left(\frac{2}{[illegible]}\right)\cdot(2\Theta(\dot{y})-1) + (k(D_1+D_2+D_3+D_4)\sin\psi + \\ +\cos\psi\cdot k(D_1+D_2-D_3-D_4)\sin 45^\circ)\frac{1}{m_t} \\ \ddot{\psi} = \frac{[illegible](D_1-D_2-D_3+D_4)\sin 45^\circ}{[illegible]} \end{cases} \quad (19)$$

где D - коэффициент заполнения;

f –коэффициент трения качения;

R – радиус скругления ролика;

$m_t = M_S + 4M_m$ – общая масса платформы;

M_S – масса центральной части;

M_m – масса блока двигателя с колесом.

Полученная система уравнений полностью задаёт связь между скоростями вращения колёс и ускорениями платформы.

Список литературы

1. Павлов В.С., Чупров С.Г. Стабилизация движения автономной платформы на соосных колесах Mecanum // Неделя науки СПбПУ Научный форум с международным участием, материалы научно-практической конференции. Институт металлургии, машиностроения и транспорта СПбПУ. 2015. С. 401-404.
2. L. Lin and H. Shih. Modeling and Adaptive Control ofan Omni-Mecanum-Wheeled Robot. Intelligent Control and Automation, Vol. 4 No. 2, 2013, pp. 166-179.
3. Gfrerrer, A. Geometry and kinematics of the Mecanum wheel. Comput. Aided Geom. Design 25 (2008), no. 9, 784-791
4. Hamid Taheri, Bing Qiao and Nurallah Ghaeminezhad. Kinematic Model of a Four Mecanum Wheeled Mobile Robot. International Journal of Computer Applications 113(3):6-9, March 2015