III. МЕТОДЫ РАЗРАБОТКИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

3.1. Системный подход и математическое моделирование, как научная методология решения проблем

Выше уже упоминалось о том, что математическая модель является не самоцелью, а только средством для решения определенной проблемы. В связи с этим необходимость создания математической модели вытекает из выбираемой исследователем методологии решения проблемы. Для решения сложных проблем обычно применяют так называемый **системный поход**, в котором моделирование является основным методом исследования. В целом системный подход предполагает следующие этапы решения проблемы:

* изучение предметной области (обследование),

* выявление и формулирование проблемы,

* математическая (формальная) постановка проблемы,

* натурное и/или математическое моделирование исследуемых объектов и процессов,

* статистическая обработка результатов моделирования,

* формулирование альтернативных решений,

* оценка альтернативных решений,

* формулирование выводов и предложений по решению проблемы.

В общем случае процесс исследования можно представить в виде следующей формальной системы:

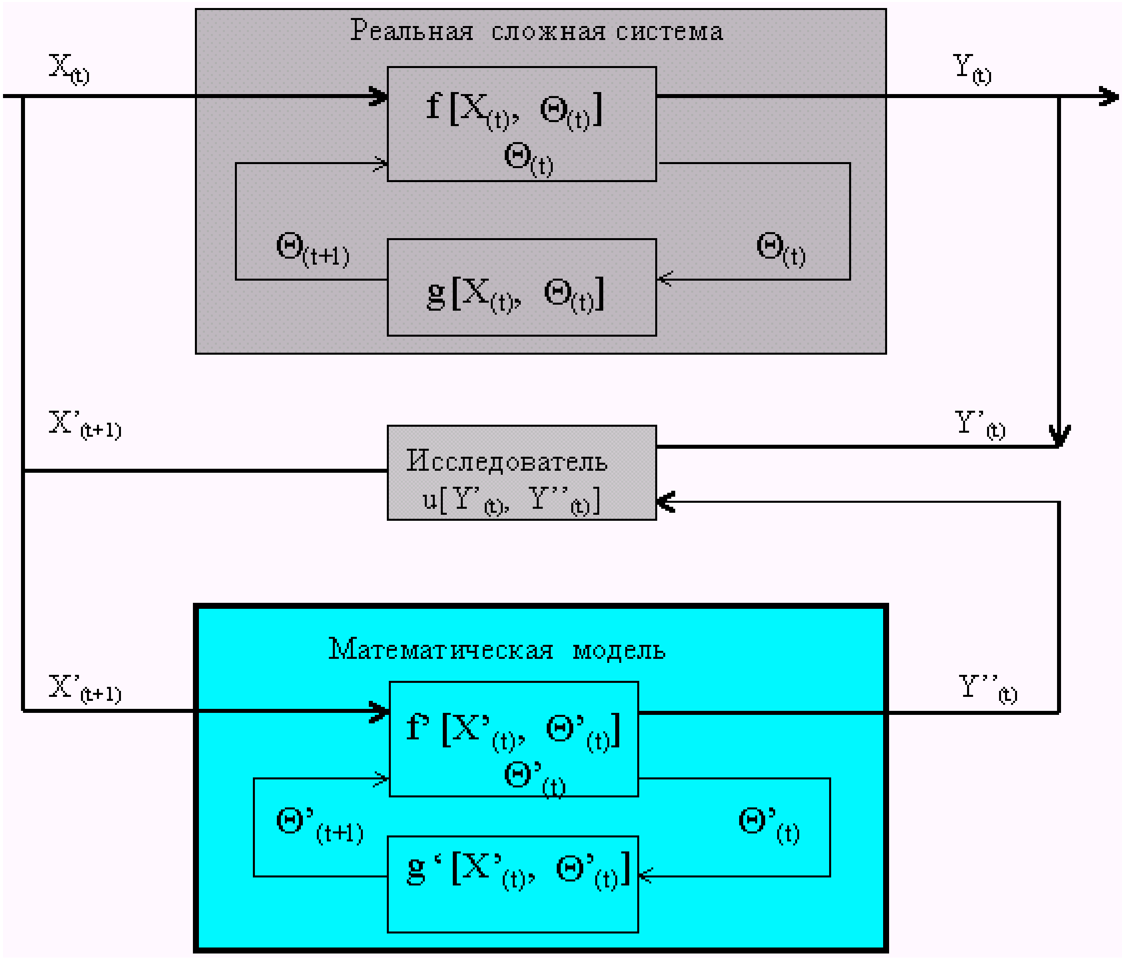
$$\begin{aligned} &Y_{(t)} = f\,[X_{(t)}, \Theta_{(t)}] \ \text{ - функция выходов,} \\ &\Theta_{(t)} = g\,[X_{(t)}, \Theta_{(t-1)}] \ \text{ - функция переходов,} \\ &X_{(t)} = u[Y_{(t-1)}] \ \text{ - функция управления процессом.} \end{aligned} \qquad (3.1)$$

Здесь $X_{(t)}$ - множество значений входных факторов в момент времени t, $\Theta_{(t)}$ - множество значений параметров, характеризующих различные внутренние состояния сложной системы в этот же момент времени, $Y_{(t)}$ и $Y_{(t-1)}$ - множества значений измеряемых показателей изучаемых свойств системы в обозначенные моменты времени. Первые два уравнения моделируют суть изучаемого процесса, а третье уравнение является математическим описанием (моделью) процесса воздействий исследователя на изучаемую систему. Исследователю, как правило, доступно только определенное подмножество $Y'_{(t)}$ наблюдаемых параметров и весьма ограниченное подмножество $X'_{(t)}$ управляемых факторов. Его представление о внутренних состояниях исследуемой системы также ограничено некоторым подмножеством $\Theta'_{(t)}$. Поэтому в представлении исследователя математическая модель исследуемой им системы имеет вид:

$$\begin{aligned} &f'\,[X'_{(t)}, \Theta'_{(t)}] = Y''_{(t)} \\ &g'\,[X'_{(t)}, \Theta'_{(t)}] = \Theta'_{(t+1)}. \end{aligned} \qquad (3.2)$$

В целом формализованная схема процесса исследования сложной системы показана на рис. 3.1.

Рис. 3.1. Схема обобщенной математической модели процесса



Таким образом, необходимость математического моделирования является **основой системного подхода** к решению сложных проблем. Разработка математических моделей представляет собой сложную исследовательскую задачу, процесс решение которой состоит из следующих этапов:

* концептуальное проектирование,

* эскизное проектирование,

* техническое проектирование,

* рабочее проектирование,

* постановка и проведение модельного эксперимента,

* статистическая обработка результатов моделирования,

* формирование альтернативных решений исследуемой проблемы.

В зависимости от изучаемой предметной области, от решаемой проблемы, от математической подготовки исследователя и требований заказчика математические модели могут иметь различные формы и способы представления. В простейшем случае модель может представлять собой однофакторную линейную или нелинейную **функцию с постоянными числовыми коэффициентами** (параметрами модели, отражающими внутренне состояние изучаемой системы). В этом случае показатель эффективности системы $y'_{(t)}$ является однозначной неслучайной функцией от определенного фактора $x'_{(t)}$. Примером такой модели является уже знакомая нам математическая модель электрического контура (рис 1.3). В данной модели исследуемым показателем является напряжение u_c на пластинах конденсатора C, а переменным внешним фактором - фактор времени t. Внутреннее состояние θ данного контура характеризуется значениями его параметров R, C и E. При этом изменение изучаемого показателя $u_{c(t)}$ характеризуется дифференциальным уравнением: $du_{c(t)}/d(t) = (u_{c(t)} - E)/ RC$. Эксперимент с данной математической моделью сводится к решению данного дифференциального уравнения и к формулированию выводов о характере полученного решения. Более сложные случаи представляют собой модели систем, показатели функционирования которых не могут быть представлены детерминированной функцией от факторов, воздействующих на данную систему. Чаще всего показатели функционирования таких систем **являются случайными величинами**, зависящими от известных и неизвестных внешних и внутренних случайных факторов. В общем случае математические модели таких систем представляют собой векторную функцию (или систему случайных величин) вида:

$$Y = \eta (X, \Theta), \qquad (3.3)$$

где Y, X, Θ - соответственно множества показателей функционирования, внешних факторов и внутренних состояний сложной системы. В этих случаях задача математического моделирования поведения изучаемой системы состоит в том, чтобы экспериментально, или логически определить характер уравнения (3.3), оценить его параметры Θ и возможные значения показателей Y в пространстве меняющихся значений факторов X. Обычно функцию $y = \eta (X , \Theta)$ представляют в виде линейного полинома от параметров $\theta_j \in \Theta$:

$$\eta (X , \Theta) = \theta_0 f_0(X) + \theta_1 f_{1}(X) + . . . + \theta_m f_m(X). \qquad (3.4)$$

При этом реальное измерение y_i случайной величины y рассматривается как сумма

$$y_i = \bar{\eta} (X_i, \Theta) + \xi_i, \qquad (3.5)$$

где ξ_i - ошибка i-го измерения случайной величины y, а $\bar{\eta} (X_i, \Theta)$ - ее математическое ожидание в точке X_i. Согласно теории правдоподобия наиболее вероятным значением случайной величины является ее математическое ожидание. Функция $\bar{\eta} (X_i, \Theta)$ характеризует поведение исследуемой системы по показателю y в среднем, то есть является наиболее правдоподобной характеристикой поведения системы. Поэтому задача моделирования состоит в том, чтобы найти коэффициенты $\theta_j \in \Theta$, минимизирующие абсолютное значение ошибок ξ . Для решения этой задачи применяется, как известно, метод наименьших квадратов, суть которого изложена в [9]. Классическим примером математической модели процессов такого типа является модель траектории полета космического аппарата, параметры которой уточняются по траекторным измерениям со станции наблюдения. Еще более сложным классом систем с точки зрения теории математического моделирования являются, так называемые, **системы массового обслуживания**. К ним относятся любые системы, в которых существует один или несколько потоков материальных или информационных объектов, которые обрабатываются определенным способом. Реальными системами массового обслуживания являются, например: телефонные станции, билетные кассы, информационно-вычислительные системы, автозаправочные станции и им подобные. К системам массового обслуживания космических средств относятся центры и пункты управления космическими аппаратами, системы сбора и передачи данных, стартовые комплексы и много других технических и организационных систем. При исследовании и моделировании систем массового обслуживания в качестве основных параметров, характеризующих функционирование этих систем, обычно рассматривают временные показатели: время наступления некоторого события - t_i, интервалы времени между событиями - ζ_i, интенсивность событий - λ_i и соответствующие этим величинам распределения вероятностей. Показателями эффективности функционирования систем массового обслуживания обычно являются:

1. для систем с отказами - среднее число отказов $R(t_0, t)$ за время $(t_0, t_0 + t)$, вероятность $P(t_0, t)$ того, что за определенное время $(t_0, t_0 + t)$ в системе не будет ни одного отказа,
2. для систем с ожиданиями обслуживания показателями эффективности также являются - среднее время ожидания заявки в очереди, среднее количество заявок в очереди, среднее время обслуживания одной заявки и тому подобные величины.

Способы математического моделирования систем массового обслуживания в настоящее время достаточно хорошо изучены и часто применяются на практике. Имеются аналитические формулы для оценки эффективности обслуживания в системах с простейшими (Пуассоновскими) потоками заявок. Они названы по имени их автора формулами Эрланга [5]. Наконец, еще более сложными для исследования являются системы, функционирование которых представляет собой **неоднородные разветвляющиеся процессы**. К таким систем относятся, например: универсальные ЭВМ, центры и пункты управления различного назначения, сложные технические комплексы, в том числе и ракетно-космические. Эти системы имеют сложную внутреннюю структуру, состоящую из элементов (подсистем), выполняющих различные функции, подчиненные некоторой единой цели (целевой функции). Математическая модель сложной системы состоит из математических моделей ее подсистем и математической модели процесса взаимодействия между ними. Цели и задачи сложной системы достигаются в результате выполнения определенной композиции, состоящей из множества целевых функций ее подсистем, то есть:

$$F(S) = \Phi[F_1(S_1), F_2(S_2), \ldots, F_n(S_n)], \qquad (3.6)$$

где S - сложная система, $S_1, \ldots, S_n$ - ее подсистемы, $F_1, \ldots, F_n$ - цели функционирования соответствующих подсистем, Φ - математическое (формальное) описание закономерных связей между перечисленными целями.

Предполагается, что:

1. подсистема S_i сложной системы, как и вся система S в целом, функционирует во времени, и в каждый момент времени t она находится в одном из возможных состояний $\theta_i(t)$;
2. с течением времени подсистема и система в целом под воздействием внешних и внутренних факторов переходят из одного состояния в другое;
3. в процессе функционирования системы (или подсистемы) она взаимодействует с внешней средой и другими системами, получая от них входной поток X(t) и

выдавая выходной поток Y(t) событий, энергетических или материальных объектов.

Эффективность функционирования системы S, как правило, оценивается условной вероятностью достижения цели F(S) к заданному моменту времени. Целью функционирования системы S обычно является достижение определенного результата: обслуживание заданного количества заявок, поражение заданных объектов, решение заданных задач, производство определенного продукта и так далее. Существует несколько способов математической формализации таких процессов. К ним относятся: Марковские процессы, сети Петри, семантические сети, конечные автоматы и алгоритмы. Перечисленные математические формализмы хорошо изучены и достаточно полно изложены в литературе. Построение математических моделей сложных систем на основе типовых алгоритмических процессов является новым, мало известным, но весьма эффективным методом математического моделирования. Поэтому в дальнейшем основное внимание будет уделено этому методу. Описание алгоритмического процесса (3.6) позволяет воспроизвести этот процесс на ЭВМ с имитацией наиболее существенных событий, происходящих в системе. Замечательно то, что имитация может быть проведена в любом масштабе времени и с различными законами распределения. Порядок проведения эксперимента, перечень входных факторов, измеряемых величин и порядок обработки результатов моделирования определяется на этапе планирования модельного эксперимента. В результате модельного эксперимента получают оценки нескольких альтернативных вариантов решения исследуемой проблемы, или же получают единственное оптимальное решение проблемы, если оно существует. Окончательное решение, как правило, предоставляется уполномоченному лицу.

3.2. Концептуальное проектирование математических моделей

3.2.1. Общие методические положения

Цель концептуального проектирования математической модели состоит в определении принципиальных решений по созданию построению и использованию будущей модели в процессе решения проблемы, стоящей перед исследователем. Для достижения этой цели должны быть решены следующие задачи:

1. определение сути исследуемой системы, которую составляют наименование, состав, структура и целевая функция системы;
2. определение сути каждого элемента системы или ее подсистем;
3. выяснение и описание процесса функционирования системы, как последовательности состояний из множества Θ (t), возникающих под воздействием внешних и внутренних факторов из множества X(t);
4. определение показателя эффективности функционирования системы, как функции выхода системы Y(t);
5. отбор подмножества наиболее существенных факторов и показателей, характеризующих процесс функционирования системы;
6. определение характера взаимосвязей между входом, состоянием и выходом системы, формализация математической модели процесса в общем виде;
7. постановка задачи на разработку технического, программного и информационного обеспечения моделирования данного процесса на ЭВМ.

Методики решения перечисленных задач концептуального моделирования будем рассматривать на следующих примерах:

1. уточнение параметров орбиты космического аппарата по траекторным измерениям с наблюдательных пунктов;
2. определение вероятности безотказной работы сложной системы по заданным средним значениям вероятностей безотказной работы ее элементов;
3. определение показателей функционирования вычислительной системы коллективного пользования с заданной дисциплиной обслуживания;
4. определение эффективности функционирования системы космического наблюдения за наземными объектами.

3.2.2. Проектирование математической модели для уточнения параметров орбиты космического аппарата

В примере рассматриваемся проблема уточнения параметров орбиты космического аппарата (КА) по измерениям с наземной станции наблюдения. В данном случае исследуемая система состоит из космического аппарата, находящегося в полете по околоземной орбите, и наземной измерительной станции. Исследуемым процессом является процесс измерения параметров орбиты КА с целью уточнения их значений. Орбитой КА называется пространственное положение центра масс КА, движущегося по инерции в гравитационном поле Земли. Знание параметров орбиты КА необходимо для управления его полетом и для решения целевых задач в космосе и из космоса. Поэтому в космонавтике большое внимание уделяется проблемам определения, прогнозирования и уточнения параметров орбит космических аппаратов. Для решения этих проблем разрабатываются соответствующие математические модели орбитального движения КА [7]. Обычно математическая модель земной орбиты КА представляется в виде эллипса, связанного с геоцентрической прямоугольной системой координат.

Параметрами орбиты космического аппарата являются:

- *наклонение* (i) плоскости орбиты к плоскости экватора,
- *долгота* восходящего узла орбиты (Ω),
- *аргумент перигея* (ω) (угловое расстояние перицентра орбиты от ее восходящего узла),
- *фокальный параметр* орбиты (p),
- *эксцентриситет* орбиты (e),
- *время* пролета перицентра (t_n);

или же значения координат гринвичской системы: x, y, z, x', y' , z' , t_i . В обобщенном виде эти параметры обозначаются символами x_j, j = 1, ..., m. Однако по техническим причинам непосредственное измерение значений этих параметров невозможно. Поэтому измеряются другие параметры:

- *дальность* (D) от станции наблюдения до КА,
- *азимут* (A) со станции наблюдения на КА,
- *угол места* (γ) КА в точке стояния станции наблюдения,
- *высота* (h) *КА* над уровнем океана,
- *скорости* D' , A' , γ' , и
- *время* ($t_и$) в момент измерения орбиты.

В обобщенном виде эти параметры обозначаются через y_i, i = 1, ..., n . Обычно имеет место функциональная зависимость:

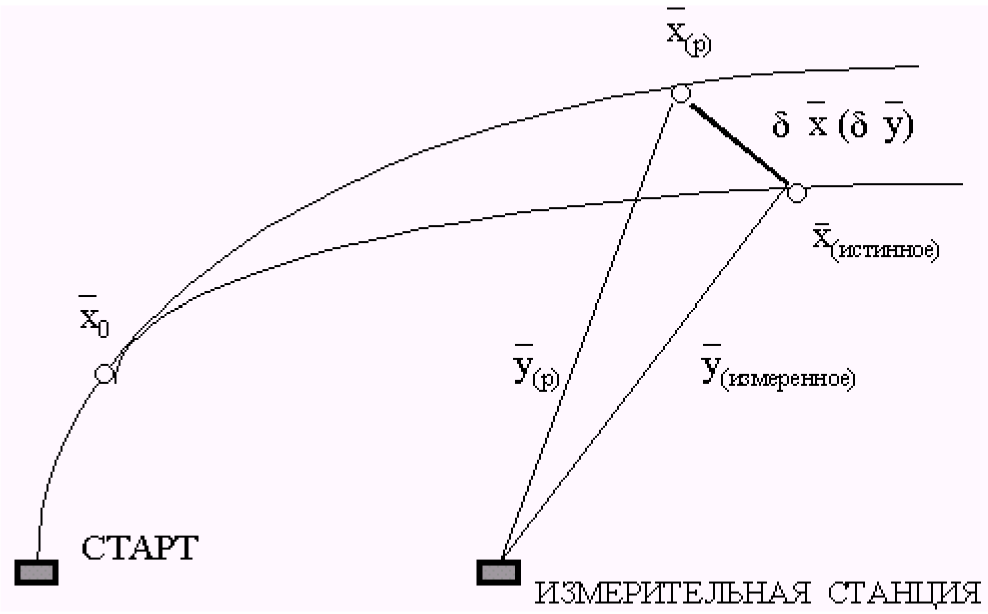
$y_i = F_i(x_1, x_2, ..., x_6, t_i)$. (3.7)

Как правило, после запуска КА имеются приближенные расчетные значения ($x_j^{(0)}$) элементов орбиты x_j, и существует способ прогнозирования этих значений на любой заданный момент времени $t_и$. Поэтому на момент измерения величины y_i всегда можно получить два ее значения: измеренное - $y_{i,и}$ и расчетное - $y_{i,р}$,

$$y_{i,р} = F_i(x_1^{(р)}, x_2^{(р)}, ..., x_6^{(р)}, t_{i,и}). \quad (3.8)$$

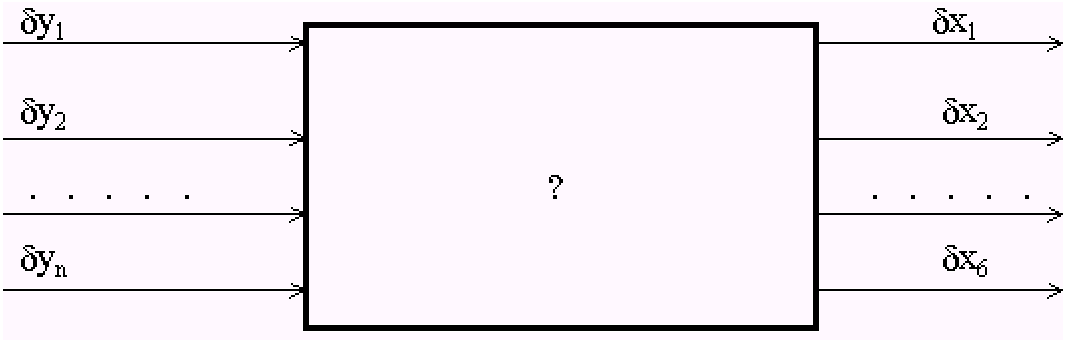
Разности $\delta y_i = y_{i,и} - y_{i,р}$ в дальнейшем используются для определения соответствующих поправок $\delta x_j = x_{j,иск} - x_j^{(р)}$ к расчетным значениям элементов орбиты x_j, $j = 1,...,6$, где $x_{j,иск}$ - неизвестное (искомое) значение элемента x_j. Схема процесса измерения параметров орбиты КА с наземного измерительного пункта показана на рис. 3.2, где $\bar{x}_0$ - вектор начальных значений элементов орбиты, определенных на момент отделения КА от ракеты носителя, $\bar{x}_{(р)}$ - вектор значений тех же элементов орбиты, спрогнозированных на момент $t_и$ проведения траекторных измерений, $\bar{x}_{(искомое)}$ - вектор искомых истинных значений элементов обиты, $\bar{y}_{(измеренное)}$ - вектор значений измеряемых параметров, и $\bar{y}_{(р)}$ - вектор значений тех же параметров, рассчитанных по известным уравнениям связи (3.8), которые могут быть представлены в следующем обобщенном виде: $\bar{y}_{(р)}=F(\bar{x}_{(р)})$.

Рис. 3.2 Схема измерения параметров орбиты КА с наземной измерительной станции



В результате наличия ошибок прогнозирования расчетная траектория орбиты КА не совпадает с истинной. Поэтому имеют место отклонения $\delta \bar{x} = \bar{x}_{(ист)} - \bar{x}_{(р)}$ и $\delta \bar{y} = \bar{y}_{(изм)} - \bar{y}_{(р)}$. Кроме того, в результате ошибок измерения $y_{i(изм)}$ не совпадает с $y_{i(ист)}$, поэтому δy_i содержит в себе и ошибку измерения, и ошибку прогнозирования. Задача математического моделирования в данном случае состоит в том, чтобы найти и решить уравнение, наиболее правдоподобно связывающее случайные величины δy_i со случайными величинами δx_j. Схема этой модели показана на рис. 3.3.

Рис. 3.3. Схема математической модели определения поправок параметров орбиты КА по отклонениям измеряемых параметров



Уравнения, связывающие отклонения δy_i с поправками δx_j получаются в результате дифференцирования уравнений связи (3.7) по параметрам x_j и составления следующих приближенных уравнений:

$$\delta y_i = \frac{\partial F_i}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial F_i}{\partial x_2}\delta x_2 + \ldots + \frac{\partial F_i}{\partial x_6}\delta x_6, \qquad i=1,\ldots,n, \qquad (3.9)$$

где $\partial F_i / \partial x_j$ - частные производные функции F_i по параметрам орбиты x_j, рассчитанные на момент проведения измерений. Количество уравнений в системе (3.9) может быть увеличено до любого значения N за счет измерения одной и той же величины y_i в различные моменты времени. В векторной форме эта система уравнений может быть представлена в следующем виде:

$$\delta \bar{\mathbf{y}} = [\, \partial \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}, t_{i,и})/\partial \bar{\mathbf{x}} \,]\, \delta \bar{\mathbf{x}}, \qquad (3.10)$$

где выражение $[\, \partial \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}, t_{i,и})/\partial \bar{\mathbf{x}} \,]$ представляет собой так называемую структурную, или опорную, матрицу **A** системы уравнений (3.9). Элементы $\mathbf{a_{ij}}$ матрицы **A** представляют собой значения частных производных $\partial F_i(\bar{x}, t_{i,и})/\partial \bar{x}_j$ рассчитанные по уравнениям связи y_i с x_j ($j = 1,...6$) в расчетной точке $\bar{x}_{(p)}$. При этом уравнение (3.9) имеет следующую матричную форму записи: $\delta \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\delta \bar{\mathbf{x}}$. Матрица **A** имеет размер N×m. Принимая во внимание факт существования ошибок ξ_i прогнозирования и измерения параметров y_i, данное уравнение следует представить в виде: $\delta \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\,\delta \bar{\mathbf{x}} + \bar{\xi}$, или в виде:

$$\bar{\xi} = \delta \bar{\mathbf{y}} - \mathbf{A}\,\delta \bar{\mathbf{x}}. \qquad (3.11)$$

Задача состоит в том, чтобы, используя соотношения (3.11) найти наиболее правдоподобные поправки δx_j расчетных значений элементов орбиты x_j. В этом и состоит суть математической формулировки (постановки) решаемой проблемы.Для решения этой проблемы, как известно, применяют метод наименьших квадратов. Согласно этому методу считают, что наиболее правдоподобными являются те значения элементов орбиты (или отклонения δx_j), которые обращают в минимум сумму квадратов ошибок ξ_i измеряемых значений y_i:

$$S = \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \Big(\sum_{j=1}^{6} a_{i,j}\delta x_j - \delta y_i \Big)^2. \qquad (3.12)$$

где N - число измерений параметров орбиты, проведенных со станции наблюдения. Обычно N>m. Необходимые значения δx_j находят, приравнивая нулю частные производные $\partial S/\partial \delta x_j$ и решая полученную при этом систему из m дифференциальных уравнений. В матричном виде эти преобразования имеют следующий вид:

$$\mathbf{S} = \bar{\boldsymbol{\xi}}' \ \bar{\boldsymbol{\xi}},$$

$$\mathbf{S} = (\delta \ \bar{\mathbf{y}} - \mathbf{A}\delta \ \bar{\mathbf{x}})'(\delta \ \bar{\mathbf{y}} - \mathbf{A}\delta \ \bar{\mathbf{x}}),$$

$$\mathbf{S} = \delta \ \bar{\mathbf{y}}'\delta \ \bar{\mathbf{y}} - 2\delta \ \bar{\mathbf{x}}'\mathbf{A}'\delta \ \bar{\mathbf{y}} + \delta \ \bar{\mathbf{x}}'\mathbf{A}'\mathbf{A}\delta \ \bar{\mathbf{x}},$$

$$\partial \mathbf{S}/\partial \ \bar{\mathbf{x}} = -2\mathbf{A}'\delta \ \bar{\mathbf{y}} + 2\mathbf{A}'\mathbf{A}\delta \ \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}, \text{ или}$$

$$(\mathbf{A}'\mathbf{A})\delta \ \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}'\delta \ \bar{\mathbf{y}}. \qquad (3.13)$$

Данная система имеет следующее решение:

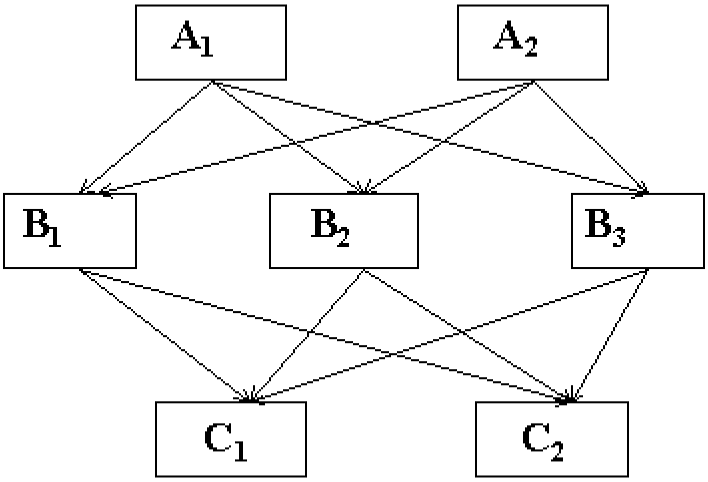
$$\delta \ \bar{\mathbf{x}}\hat{} = (\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\delta \ \bar{\mathbf{y}} \qquad (3.14)$$

Таким образом, мы нашли то выражение, которое должно быть поставлено на место знака вопроса в математической модели на рис. 3.3. В данном случае нас не интересует технология получения измерений δy_i и технология вычислений по формуле (3.14). Поэтому можно считать, что математическая модель имеет всего одно внутреннее состояние θ , в котором реализуются вычисления по формуле (3.14). На этом этап концептуального моделирования процесса решения данной проблемы может быть закончен. Следующим является этап эскизного проектирования, на котором проводится детализация математического метода и алгоритма решения системы (3.14).

3.2.3. Проектирование модели для оценки надежности сложной информационно-вычислительной системы

Рассматривается проблема определения вероятности безотказного функционирования сложной информационно-вычислительной системы (ИВС). Назначение системы следует из ее наименования. Структура системы показана на рис. 3.4, где буквами A_1, A_2 обозначены устройства ввода информации в систему, B_1, B_2, B_3 - процессоры обработки информации и буквами C_1, C_2 - устройства вывода информации.

Рис. 3.4. Функциональная структура информационно-вычислительной системы



Процесс функционирования ИВС организован таким образом, что система успешно решает свои задачи при условии, если в исправном состоянии находится хотя бы одно устройство ввода информации, хотя бы одно устройство вывода информации и не менее двух процессоров. Данное условие выполнения целевой функции системы можно наглядно представить в форме логической функции:

$$F(ИВС)=[F_1(A_1)\vee F_1(A_2)]\vee[F_2(B_{1Y}B_2)\vee F_2(B_{1Y}B_3)\vee F_2(B_{2Y}B_3)]\vee F_3(C_{1Y}C_2), \quad (3.15)$$

где выражение F(*) означает, что устройство, указанное в скобках, работает исправно. Представляет интерес также логическая зависимость, описывающая условия не выполнения системой своих целевых функций:

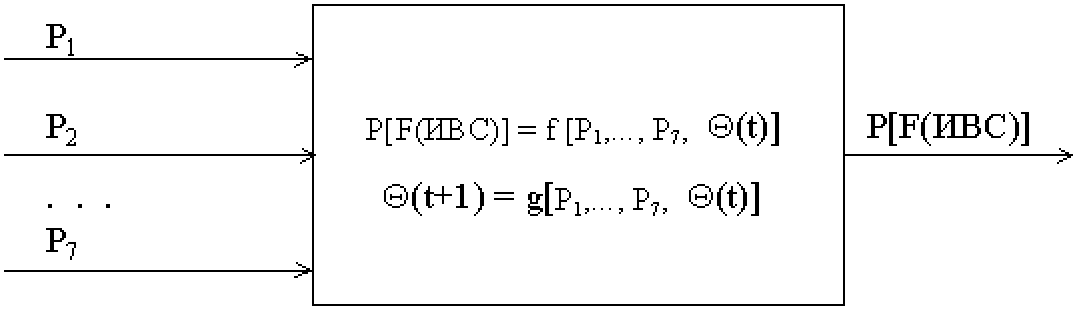
$$F(ИВС)=\neg F_1(A_1\wedge A_2)\vee \neg F_2(B_1\wedge B_2)\vee \neg F_2(B_1\wedge B_3)\vee \neg F_2(B_2\wedge B_3)\vee \neg F_3(C_1\wedge C_2), \quad (3.16)$$

Последнее выражение может оказаться более удобным для решения поставленной проблемы с учетом того, что

$$P[F(*)] = 1- P[\neg F(*)], \qquad (3.17)$$

где P[F(*)] - вероятность истинности условия F(*),а P[$\neg$F(*)] - вероятность истинности отрицания истинности данного условия. Перечисленные элементы ИВС имеют различное функциональное назначение и соединены так, что надежность каждого из них оказывает непосредственное влияние на работоспособность всей системы в целом. Поэтому в качестве факторов для оценки надежности функционирования ИВС следует взять вероятности P_i (i=1,...,7) безотказного функционирования устройств в процессе решения системой поставленных задач. В общем случае вероятности P_i могут иметь различные значения. Вероятность P[F(ИВС)] безотказного функционирования ИВС в целом есть функция от вероятностей безотказного функционирования всех ее элементов, вытекающая из условий (3.15) или (3.16). Следовательно, обобщенная схема математической модели, характеризующей безотказность функционирования ИВС, имеет вид, показанный на рис. 3.5.

Рис. 3.5. Схема математической модели для оценки надежности функчионирования информационно-вычислительной системы



Проблема состоит в том, как из логических условий (3.15) или (3.16) получить соответствующее выражение для количественного значения вероятности P[F(ИВС)]. Дело в том, что вероятность P[F(ИВС)] определяется на множестве состояний ИВС$\Theta(t)$. Число состояний в данном множестве равно $2^n=N$, где n - число структурных элементов ИВС. В данном примере N=128. Условия функционирования ИВС (3.15) определяют подмножество состояний системы, обеспечивающих выполнение системой заданных целевых функций, а условия (3.16) определяет подмножество состояний, в которых система оказывается не работоспособной. Для вычисления вероятности P[F(ИВС)] в нашем примере необходимо использовать теорему сложения вероятностей в следующем виде:

$P[F(ИВС)] = \sum_{e=1}^{s} \prod_{i}^{k} P_i \prod_{j}^{(7-k)} Q_j,$ где $Q_i=1-P_i$, k -число исправных элементов в системе, а s -число состояний системы, удовлетворяющих условиям работоспособности (3.15). Очевидно, для решения данной задачи таким способом придется осуществить полный перебор всех N состояний системы, или же придумать более эффективный способ определения работоспособных состояний, особенно если учесть, что число состояний системы находится в степенной зависимости от числа ее элементов. Проблема полного перебора состояний становится практически неразрешимой уже при увеличении числа элементов системы всего на один порядок. Для преодоления этого “проклятия размерности” можно предложить два способа. Первый основан на идее имитационного моделирования состояний сложных систем с учетом интенсивности отказов их элементов. В процессе моделирования осуществляется случайный выбор состояний системы и производится оценка вероятности ее исправного функционирования в данном состоянии. Работоспособность системы оценивается по соотношению работоспособных и не работоспособных состояний получаемых из серии опытов. Точность решения задачи данным способом зависит от числа проведенных опытов. Второй способ основан на идее формализованного перехода от логических функций, описывающих условия безотказной работы системы, к соответствующим формулам вероятности сложных событий. При этом для сокращения перебора используется операция ортогонализации форм представления логических функций. Один из подходов к реализации этого метода изложен в книге И. А. Рябинина и Г. Н. Черкасова [10], другой подход, основанный на применении теории исчисления обобщенных кодов подмножеств, изложен в докторской диссертации автора [14].

Применительно к данному примеру суть этого подхода состоит в следующем.

- В качестве исходной формы описания условий работоспособности ИВС выбираем выражение (3.16):

$\urcorner F(ИВС)=\urcorner F_1(A_1\wedge A_2)\vee\urcorner F_2(B_1\wedge B_2)\vee\urcorner F_2(B_1\wedge B_3)\vee\urcorner F_2(B_2\wedge B_3)\vee\urcorner F_3(C_1\wedge C_2).$

- Преобразуем его в правильную сокращенную дизъюнктивную нормальную форму логической функции υ F(ИВС):

$\rceil F(ИВС)=\rceil F_1(A_1)\wedge\rceil F_2(A_2)\vee\rceil F_3(B_1)\wedge\rceil F_4(B_2)\vee\rceil F_3(B_1)\wedge\rceil F_5(B_3)\vee\rceil F_4(B_2)\wedge\rceil F_5$
$(B_3)\vee\rceil F_6(C_1)\wedge\rceil F_7(C_2)$,   где $\rceil F_i(*)$ – факт отказа устройства

*I { $A_1, A_2, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2$} соответственно, i=1,…,7.

- Для упрощения записи заменим переменнуюυ $F_i(*)$ на переменную $\overline{X}_i$:

$\rceil F(ИВС)= \overline{X}_1\wedge \overline{X}_2\vee \overline{X}_3\wedge \overline{X}_4\vee \overline{X}_3\wedge \overline{X}_5\vee \overline{X}_6\wedge \overline{X}_7$. Здесь X_i логическая переменная, соответствующая высказыванию "элемент №i исправен", а $\overline{X}_i$ логическая переменная, соответствующая высказыванию "элемент №i не исправен".

- Преобразуем полученную дизъюнктивную нормальную форму в таблицу 3.1:

Таблица 3.1.

№ОК	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	F(ИВС)
1	0	0	-	-	-	-	-	0
2	-	-	0	0	-	-	-	0
3	-	-	0	-	0	-	-	0
4	-	-	-	0	0	-	-	0
5	-	-	-	-	-	0	0	0

В этой таблице переменные $\overline{X}_i$ представлены значением "0" соответствующих переменных X_i, и каждая строка таблицы представляет собой обобщенный код определенного подмножества неработоспособных состояний ИВС. Легко заметить, что все обобщенные коды данной таблицы описывают пересекающиеся между собой подмножества состояний ИВС, т.е. обобщенные коды не ортогональны между собой.

- Применяя формулу $K_i\cup K_j= K_i\cup(K_j\setminus K_i)$, проведем ортогонализацию всех обобщенных кодов таблицы 3.1. В результате получим таблицу 3.2, которая не содержит повторяющихся ситуаций в описании всех возможных неработоспособных состояний системы.   Таблица 3.2.

№ОК	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	F(ИВС)
1	0	0	-	-	-	-	-	0
2	1	-	0	0	-	-	-	0
3	0	1	0	0	-	-	-	0
4	1	-	0	1	0	-	-	0
5	0	1	0	1	0	-	-	0
6	1	-	1	0	0	-	-	0
7	0	1	1	0	0	-	-	0
8	1	-	1	1	-	0	0	0
9	1	-	0	1	1	0	0	0
10	0	1	1	1	-	0	0	0
11	1	-	1	0	1	0	0	0
12	0	1	0	1	1	0	0	0
13	0	1	1	0	1	0	0	0

Поэтому от данной таблицы можно перейти непосредственно к формуле вычисления вероятности отказа ИВС:

$$P[\neg F(ИВС)] = \sum_{e=1}^{m} \prod_{i}^{k} P_i \prod_{j}^{h} Q_j,$$

где m – число ортогональных обобщенных кодов в таблице 3.2,
k - число символов «1» в обобщенном коде № e,
h - число символов «0» в том же обобщенном коде,
P_i – вероятность исправного состояния элемента №i, т.е. $P_i = P(X_i="1")$,
Q_j - вероятность не исправного состояния элемента №j,
т.е. $Q_j = P(X_j="0") = 1 - P_j$.

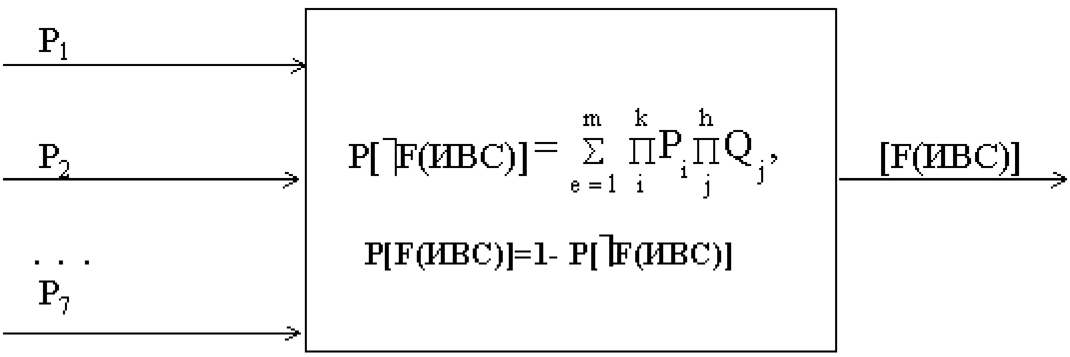
- Для данного примера

$P[\neg F(ИВС)]=(1- P_1)(1- P_2)+ P_1(1- P_3)(1- P_4)+\ldots+ (1- P_1) P_2 P_3(1- P_4) P_5(1- P_6)(1- P_7).$

$P[F(ИВС)]=1- P[\neg F(ИВС)].$

Предлагаемый подход позволяет существенно уменьшить трудоемкость вычисления вероятностей сложных событий. Так в данном примере, оказалось, достаточно вычислить сумму из тринадцати произведений вероятностей P_i, Q_j. Каждое произведение вероятностей определяется одним обобщенным кодом таблицы 3.2. При полном переборе неработоспособных состояний ИВС в данном примере необходимо было бы вычислить сумму из 92 полных произведений вероятностей, т.е. по 7 элементов в каждом произведении. Необходимым требованием для решения поставленной проблемы в любом случае является наличие априорных данных о значениях вероятностей P_i безотказной работы элементов сложной системы. При наличии статистических данных об отказах элементов ИВС математическая модель для оценки работоспособности заданного структурного варианта ИВС может быть сведена к строгому аналитическому виду, показанному на рис. 3.6.

Рис. 3.6. Схема математической модели для оценки надежности функционирования информационно-вычислительной системы

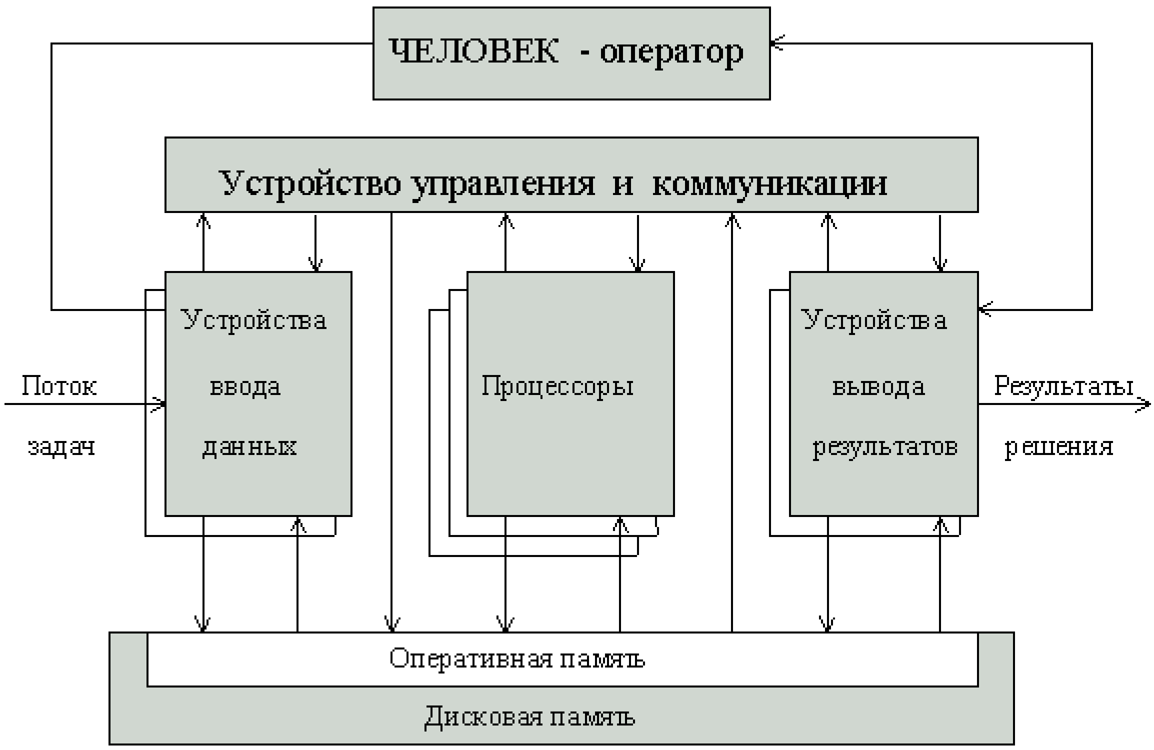


В качестве технического и математического обеспечения для моделирования и решения данной проблемы достаточно иметь современную персональную ЭВМ со штатным (общим) математическим обеспечением. На этом концептуальное проектирование данной модели заканчивается. Результаты обычно помещают в специальный отчет и используют на следующих этапах моделирования.

3.2.4. Математическая модель для оценки производительности сложной информационно-вычислительной системы

Рассматривается информационно-вычислительная система, предназначенная для массового решения (обслуживания) задач, поступающих на ее вход. Каждая задача характеризуется значениями определенных свойств, которыми являются: допустимое время пребывания заявки в системе - $t_{(доп.)}$, объем исходных данных - $d_{(вход.)}$, объем необходимой дисковой памяти - $c_{(диск.)}$, объем необходимой оперативной памяти - $c_{(опер.)}$, объем вычислений - $v_{(выч.)}$, объем выдаваемых результатов $d_{(вых.)}$, коэффициент сложности решаемой задачи $s_{(реш.)}$, время поступления задачи в систему $t_{(пост.)}$ и частость решения задачи в системе - $f_{(реш,)}$. Обобщенная функциональная структура технического обеспечения данной ИВС показана на рис. 3.7. Она включает в себя: два устройства ввода данных, три процессора, два устройства вывода данных, устройство системной коммуникации, устройства оперативной и дисковой памяти.

Рис. 3.7. Фунциональная структура технического обеспечения информационно-вычислительной системы



Программное обеспечение системы располагается в постоянной памяти, встроенной в каждое устройство, и на дисковой памяти. Оно состоит из штатного (общего), системного (базового) и специального программного обеспечения. Управление функционированием ИВС осуществляется программной операционной системой через аппаратно-программные средства, встроенные во все перечисленные выше устройства.

Структурные элементы ИВС обладают следующими свойствами:

- устройства ввода-вывода - пропускной способностью ($r_{(ввод.)}$, $r_{(вывод.)}$);
- устройства памяти - объемом памяти ($C_{(опер.)}$, $C_{(диск.)}$);
- процессоры - быстродействием ($r_{(проц.)}$).

И все устройства обладают надежностью, которая задается показателями интенсивности ($\lambda_{(устр).}$) или вероятности ($p_{(устр.)}$) отказов для каждого устройства. Основными учитываемыми свойствами программного обеспечения ИВС являются: корректность, оцениваемая количеством ($q_{(ошиб.)}$) или вероятностью ($p_{(ошиб.)}$) ошибок в программах; точность, оцениваемая величиной методической погрешности ($\xi_{(метод.)}$) и объем памяти, необходимый для хранения и реализации программ. Показатель эффективности функционирования ИВС ($W_{(ИВС)}$) является функцией перечисленных свойств элементов системы, потока поступающих задач, свойств программных средств, используемых для решения поступающих задач, и структуры данной системы. В качестве показателя эффективности ИВС можно принять ее производительность, которая оценивается средним количеством эталонных задач, успешно решенных системой за определенное время. Процесс функционирования ИВС можно разделить на три последовательные фазы обслуживания поступающих заявок:

- ввод исходных данных,
- вычисление,
- вывод результатов.

Задача считается решенной, если она успешно прошла все три фазы за время не превышающее $t_{(доп.)}$.

Определение принципов построения математической модели данного процесса следует начать с определения характера потока задач, поступающих на вход системы и принципов его математического описания. В данном примере все решаемые задачи можно разделить на две группы: к первой группе отнесем случайно возникающие задачи, требующие одноразового решения, а ко второй группе - задачи, требующие периодического решения с учетом новых исходных данных. Другими словами, входной поток задач ИВС складывается из двух параллельных потоков X_1 и X_2. Потока X_1 является случайным пуассоновским потоком с интегральным значением показателя интенсивности λ_1, средними значениями $\mu(z_j)$ и дисперсиями $\sigma(z_j)$ вышеперечисленных параметров z_{jI} $\{t_{(доп.)}, d_{(вход.)}, c_{(диск.)}, c_{(опер.)}, v_{(выч.)}, d_{(вых.)}, s_{(реш.)}, t_{(пост,)}\}$. Поток X_2 характеризуется интегральной периодичностью $f_{(x)}$ решения задач с усредненными значениями параметров z_j. Данные положения принимаются как допущения, упрощающие процесс математического моделирования исследуемой системы.

Таким образом, в итоге концептуального проектирования модели процесса функционирования ИВС установлено следующее:

1. каждая поступающая на вход системы заявка на решение задачи представляется вектором $\mathbf{x_i}= (i, z_{1i}, \ldots, z_{8i})$, где i - номер заявки а z_{ji} - конкретное значение j-того параметра i-той задачи,
2. заявки поступают на вход системы двумя потоками: пуассоновским - X_1 с интенсивностью λ_1 и равномерным - X_2 с периодичностью заявок $f_{(x)}$,
3. множества задач из X_1 и X_2 характеризуются средним значениями $\mu(z_i)$ и дисперсиями $\sigma(z_i)$ значений параметров z_i задач, определенными отдельно для X_1 и X_2,
4. на выходе системы результаты решения задач представляются вектором $\mathbf{y_i}=(i,t_{(реш.)i}, t_{ki})$, где $t_{(реш.)i}$ - время затраченное системой на решение i -той задачи а t_{ki} - время окончания решения этой задачи,
5. в процессе моделирования определяются и запоминаются количество $h_{(пост.)}$ поступивших на вход системы и количество $h_{(реш.)}$ решенных задач за время моделирования $t_{(мод.)}$, интегральные объемы данных, поступивших в систему,

$V_{(вход.)}$ и выданных системой $V_{(выд.)}$ за время $t_{(мод.)}$, а также максимальные значения объемов оперативной $C_{(max,опер.)}$ и дисковой $C_{(max.\ диск.)}$ памяти,

6. в данной модели не существует аналитических уравнений связывающих ее входные факторы с выходными показателями, поэтому функция выхода системы представляет собой логический алгоритм $A_1[X_{(t)}, \Theta_{(t)}]=Y_{(t)}$, описывающий процесс преобразования входного потока заявок $X_{(t)}=\{X_{1E}\,X_2\}$ в поток $Y_{(t)}$ результатов функционирования системы и оценок $W_{(t)}$ этих результатов,
7. внутреннее состояние ИВС $\Theta_{(t)}$ определяется показателями надежности и занятости устройств системы а также способом объединения этих устройств в систему, то есть структурой системы, поэтому $\Theta_{(t+1)}= A_2[X_{(t)}, \Theta_{(t)}]$, где $\Theta_{(t)}$ декартово произведение множеств θ_i текущих состояний устройств системы, $\theta_i=\{$исправно, неисправно$\}\times\{$свободно, занято$\}$, A_2 -алгоритм, описывающий функцию переходов $\Theta_{(t)} \to \Theta_{(t+1)}$.

С учетом этих положений обобщенная концептуальная математическая модель процесса функционирования ИВС может быть представлена в виде, показанном на рис. 3.8. Детализация и алгоритмизация этой модели осуществляется на этапе ее эскизного проектирования.

Рис. 3.8. Обобщенная схема математической модели функционирования ИВС