Мера квантовой запутанности чистых состояний

С. И. Доронин
(Получена 8 мая 2004; опубликована 15 Мая 2004)

Сделана попытка во всех деталях, с максимально подробными пояснениями и примерами показать, как применяется математический формализм при количественном анализе квантовой запутанности. Проанализирована мера запутанности двухсоставных чистых состояний, предложенная Беннеттом (C.H. Bennett) с соавторами, и основанная на понятии энтропии фон- Неймана редуцированных матриц плотности. Рассмотрено также понятие согласованности (concurrence) и аналитический метод для вычисления согласованности, предложенный Вуттерсом (W.K. Wootters) с использованием “spin-flip” преобразования (матрицы “перевернутых спинов”).

Введение

Такие специфические черты квантовых систем[1], как наличие нелокальности (квантовой запутанности), не имеют аналога в классической физике и кажутся удивительными для тех, кто привык иметь дело с классическим описанием.
Первым, кто обратил внимание на эту особенность квантовых систем, был Эйнштейн, который в 1935 г. на примере запутанных состояний ЭПР пары [1] пытался доказать неполноту описания мира квантовой механикой. Возможность существования мгновенного действия на расстоянии ему казалась противоестественной, и в этом контексте он употреблял термин “телепатия” [2]. Эйнштейн исходил из привычных представлений, и ему казалось правильным считать, что если две системы A и B пространственно разделены, тогда при полном описании физической реальности действия, выполненные над системой A, не должны изменять свойства системы B. Этот принцип часто называют *принципом локальности Эйнштейна* [3].
Своим примером с ЭПР парой Эйнштейн пытался доказать, что квантовая механика “ущербна”, что она не способна полностью и однозначно описать реальность в принципе. Отсюда возникло предположение о скрытых параметрах, которые могут помочь вернуться к привычному локальному описанию объектов.

Однако конечный результат исследования этой проблемы оказался противоположным. В итоге оказалось, что более правильным является именно квантовомеханический подход, и результат такого подхода не совместим с предположением, что наблюдаемые локальные свойства объекта существуют до наблюдения (декогеренции) в качестве объективных самостоятельных характеристик объекта.

Первый реальный шаг к такому выводу сделал Белл в 1964 г., когда он, анализируя ситуацию со скрытыми параметрами, сформулировал свои знаменитые неравенства [4]. Он ввел понятие “объективной локальной теории”, которой придерживались Эйнштейн и сторонники скрытых параметров. В этой теории предполагается, что

- физические свойства системы существуют сами по себе, они объективны и не зависят от измерения;
- измерение одной системы не влияет на результат измерения другой системы;

[1] Термин “квантовая система” означает только то, что система описывается методами квантовой теории, т.е. в терминах вектора состояния, матрицы плотности и т.д., при этом размер системы может быть любой, в том числе макроскопический.

- поведение системы зависит лишь от условий в более ранние моменты времени.

Это привычные для всех нас представления об окружающей реальности.

Теорема Белла утверждает, что “объективная локальная теория” и квантовая механика дают разные предсказания для результатов измерения. Поэтому естественно возник вопрос, какой же на самом деле реальный мир, и неравенства Белла помогают ответить на него непосредственно, из анализа результатов эксперимента. Такие эксперименты были проведены А. Аспектом и многочисленными последующими экспериментами. Результаты экспериментов показывают, что окружающая нас реальность является квантовой в своей основе, и все предположения “объективной локальной теории”, сделанные выше, в общем случае несправедливы.
Помимо этого, возможность практической реализации нелокальных запутанных состояний в физическом эксперименте, привлекло пристальное внимание к этому ресурсу.

Чистое запутанное состояние

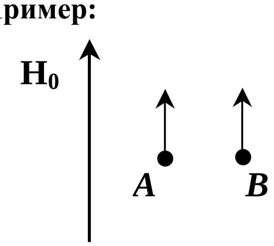
Если обратиться к математическому формализму теории, то наиболее простое определение запутанного состояния можно сформулировать для *чистого запутанного состояния*.

Определение: несепарабельным или *чистым* ***запутанным*** *состоянием* называется такое состояние составной квантовой системы Q, волновую функцию которого нельзя представить в виде тензорного произведения волновых функций составляющих ее частей A, B, … , т.е.

$$\Psi_Q \neq \Psi_A \otimes \Psi_B \otimes \ldots \tag{1}$$

Если волновая функция может быть представлена в виде произведения (1), это означает, что система не содержит вообще никаких корреляций – ни классических, ни квантовых, поскольку усреднение любых операторов в этом случае производится независимо для каждой составной части. Следовательно, чистые квантовые состояния бывают либо квантово-коррелированными (запутанными), либо вообще некоррелированными [5].

Пример:



Предположим, что у нас есть два спина A и B, которые находятся во внешнем магнитном поле и направлены по полю. Предположим также, что они никогда ранее не взаимодействовали между собой, и сейчас не взаимодействуют. В этом случае, измерение одного спина не влияет на состояние другого спина, и при измерении любого из них мы всегда получим, что каждый из спинов направлен по полю. Такое состояние может быть описано волновым вектором $|\psi\rangle = |00\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B$. Квадрат амплитуды, т.е. 1, дает вероятность нахождения в данном состоянии (Макс Борн 1926 г.). В данном случае оба спина всегда с вероятностью 1 направлены “вверх”. Такое состояние называется *сепарабельным*, оно может быть факторизовано, т.е. представлено в виде тензорного произведения волновых функций составляющих ее подсистем, как это показано выше.
В этом случае работает “объективная локальная теория”, т.е. классическая физика, и мы можем считать каждую частицу локальным объектом со своими характеристиками. Но,

как можно было заметить, здесь сделано одно очень сильное предположение – о том, что частицы *не взаимодействуют* между собой.

Если это не так, начинает работать квантовая механика, и тогда возникают состояния другого типа, например, одно из возможных состояний:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle). \qquad (2)$$

Это суперпозиция состояний, которые не могут быть реализованы одновременно. Спины не могут быть одновременно направлены и “вверх” и “вниз”. А согласно предыдущему выражению это именно так – каждый из двух спинов с равной вероятностью 1/2 находится в положении “вверх” и “вниз”. Спины уже нельзя считать независимыми друг от друга, как в первом случае, даже если они находятся на большом расстоянии. Говорят, что они находятся в запутанном состоянии и связаны *нелокальными* квантовыми корреляциями. Непосредственно из (2) следует, что если мы измерим первый спин и определим, что он находится в состоянии $|0\rangle_A$ (“вверх”), то второй спин тоже *мгновенно* окажется в состоянии $|0\rangle_B$ (“вверх”), и наоборот, если при измерении первого спина мы получим $|1\rangle_A$ (“вниз”), то второй спин тоже будет в состоянии $|1\rangle_B$ (“вниз”). Состояний $|01\rangle$ и $|10\rangle$, когда два спина направлены в противоположные стороны, в векторе состояния (2) нет.

Такая система уже не может быть описана в рамках “объективной локальной теории”. В этом случае подсистемы A и B не существуют в виде реальных локальных объектов, и они не имеют фиксированных физических характеристик. Такая система может “проявиться” и принять какой-то конкретный вид только при взаимодействии с другой системой (измерительным прибором, наблюдателем). Этот процесс называется *декогеренцией* или нарушением когерентной квантовой суперпозиции состояний при взаимодействии системы с окружением.

Другим широко известным примером чистого запутанного состояния является упомянутая ранее ЭПР пара. Которая образуется при распаде одной частицы со спином 0 на две частицы со спинами 1/2 каждая, которые удаляются друг от друга на любое расстояние. Вектор состояния такой системы после распада имеет вид

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle). \qquad (2')$$

Состояния (2), (2') и еще два аналогичных состояния с другим знаком принято называть *Белловским базисом*. Это следующая четверка векторов:

$$|\psi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle),\ |\phi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle). \qquad (3)$$

Из этой четверки векторов состояние ЕПР пары (2') является синглетным состоянием двух частиц со спином 1/2, остальные три – триплетным состоянием.

пояснение:

$$|0\rangle = |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad |1\rangle = |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$|01\rangle = |0\rangle\otimes|1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad |10\rangle = |1\rangle\otimes|0\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Каждое из чистых запутанных состояний (3) обладает дополнительным свойством. Оно является не просто запутанным, а *максимально* запутанным.

По определению: *максимально запутанным состоянием* двухсоставной квантовой системы Q (состоящей из подсистем A и B) называются чистые состояния, для которых частичные (редуцированные) матрицы плотности пропорциональны единичной матрице.

Частичные матрицы плотности получаются после взятия частичного следа (частичного усреднения) по одной из составляющих частей квантовой системы. Они описывают состояния частей квантовой системы, рассматриваемых по отдельности.

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B\,\rho = \mathrm{Tr}_B\,|\psi\rangle\langle\psi| \text{ и } \rho_B = \mathrm{Tr}_A\,\rho = \mathrm{Tr}_A\,|\psi\rangle\langle\psi|. \tag{4}$$

В качестве примера рассмотрим состояние

$$|\psi\rangle = a\,|00\rangle + b\,|11\rangle, \quad |a|^2+|b|^2=1, \tag{5}$$

матрица плотности которого равна

$$\begin{aligned}\rho = |\psi\rangle\langle\psi| &= (a\,|00\rangle + b\,|11\rangle)(a^*\langle 00| + b^*\langle 11|) = \\ &= |a|^2|00\rangle\langle 00| + ab^*|00\rangle\langle 11| + ba^*|11\rangle\langle 00| + |b|^2|11\rangle\langle 11|.\end{aligned} \tag{6}$$

пояснение:

Матрица плотности произвольного чистого состояния $|\psi\rangle$ определяется в виде проектора $|\psi\rangle\langle\psi|$, где справа стоит комплексно-сопряженный вектор, т.е. правильно было бы писать $|\psi\rangle\langle\psi^*|$, но этого обычно не делают.

$$|00\rangle\langle 00| = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, \quad |00\rangle\langle 11| = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$|11\rangle\langle 00| = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}, \quad |11\rangle\langle 11| = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

таким образом, матрица ρ в выражении (6) имеет вид:

$$\rho = \begin{pmatrix} |a|^2 & 0 & 0 & ab^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ ba^* & 0 & 0 & |b|^2 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Чтобы получить частичную матрицу плотности, редуцированную (усредненную), например, по второй частице $\rho_A=\mathrm{Tr}_B|\psi\rangle\langle\psi|$, можно воспользоваться простым правилом: Каждый из элементов матрицы $|\psi\rangle\langle\psi|$ нужно взять в "обкладки" из векторов $\langle 0|\ |0\rangle$ и $\langle 1|\ |1\rangle$ и подействовать ими на второй спин. Из четырех элементов этой матрицы $|a|^2|0\underline{\mathbf{0}}\rangle\langle 0\underline{\mathbf{0}}|$; $ab^*|0\underline{\mathbf{0}}\rangle\langle 1\underline{\mathbf{1}}|$; $ba^*|1\underline{\mathbf{1}}\rangle\langle 0\underline{\mathbf{0}}|$; $|b|^2|1\underline{\mathbf{1}}\rangle\langle 1\underline{\mathbf{1}}|$ останутся только первый и последний, у которых на второй позиции стоят одинаковые вектора. Если говорить простыми словами, чтобы получить частичную (редуцированную) матрицу плотности по одной из частиц (например, по второй частице), нужно оставить только те матричные элементы, у которых на данной позиции (на второй) стоят одинаковые "цифры" (либо 0, либо 1), при этом одинаковые "цифры" нужно просто "вычеркнуть", уменьшая тем самым размерность матрицы. Остальные матричные элементы (у которых на данной позиции стоят разные "цифры") обращаются в нуль.

Очевидно, что в данном случае, как и для любого чистого двусоставного состояния $\rho_A=\rho_B$. Таким образом, мы имеем

$$\rho_A=\rho_B=|a|^2|0\rangle\langle 0|+|b|^2|1\rangle\langle 1|, \qquad (7)$$

или

$$\rho_A=\rho_B=\begin{pmatrix} |a|^2 & 0 \\ 0 & |b|^2 \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

т.е. имеем два собственных значения $\lambda_1=|a|^2$, $\lambda_2=|b|^2$

пояснение:

$$|0\rangle\langle 0|=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \qquad |1\rangle\langle 1|=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

В дальнейшем часто придется находить собственные значения матриц плотности. Проделаем это подробно один раз на примере матрицы (*).

Чтобы найти собственные значения матрицы ρ, нужно решить уравнение $\det(\rho-\lambda E)=0$, где $\boldsymbol{E}$ – единичная матрица. Определитель матрицы $A=[a_{ij}]$ можно найти используя разложение Лапласа

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A_{ij}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A_{ij}\ .$$

Это число, по определению, есть $\det A$. Левая часть данного равенства представляет собой разложение Лапласа по $\boldsymbol{i}$-й строке, а правая – по $\boldsymbol{j}$-му столбцу матрицы A. Любое из них можно использовать для выражения определителя. Здесь A_{ij} – подматрицы, получаемые после удаления $\boldsymbol{i}$-й строки и $\boldsymbol{j}$-ого столбца.

В нашем случае нужно решить уравнение:

$$\det\begin{pmatrix} |a|^2-\lambda & 0 & 0 & ab^* \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ ba^* & 0 & 0 & |b|^2-\lambda \end{pmatrix}=0$$

Используя разложение Лапласа по первой строке, получим уравнение:

$$(-1)^{1+1}(|a|^2-\lambda)\det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & |b|^2-\lambda \end{pmatrix} + 0 + 0 + (-1)^{1+4}ab^*\det\begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \\ ba^* & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$(|a|^2-\lambda)\ \lambda^2\ (|b|^2-\lambda) - ab^*\ \lambda^2\ ba^* = 0$, учтем, что $aa^*= |a|^2$, $bb^*= |b|^2$

$\lambda^2\ (|a|^2|b|^2 - |a|^2\lambda - |b|^2\lambda + \lambda^2) - |a|^2|b|^2\lambda^2 = 0$

$|a|^2|b|^2\lambda^2 - |a|^2\lambda^3 - |b|^2\lambda^3 + \lambda^4 - |a|^2|b|^2\lambda^2 = 0$

$- |a|^2\lambda^3 - |b|^2\lambda^3 + \lambda^4 = 0$

$\lambda^3[\lambda-(|a|^2+|b|^2)] = 0$, вспоминаем, что $|a|^2+|b|^2=1$

$\lambda^3(\lambda-1) = 0$

получаем $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$

Эта матрица имеет одно ненулевое собственное значение $\lambda=1$. (**)
Это свойство характерно для любого чистого состояния, т.е. матрица плотности произвольного чистого состояния имеет только одно ненулевое собственное значение, равное единице.

Количественные характеристики запутанности

В терминах энтропии фон- Неймана

Понятие редуцированной матрицы плотности позволяет перейти к количественной характеристике (мере) запутанности. Это можно сделать на основе энтропии фон-Неймана (квантового аналога классической энтропии Шеннона в квантовой теории информации), которая определяется следующим образом:

$$S(\rho_{A(B)}) = -\,\mathrm{Tr}\{\rho_{A(B)}\log_2\rho_{A(B)}\} \tag{9}$$

Характеристика запутанности двухсоставных чистых состояний выражается количественно с помощью простой меры:

$$E(\psi) = S(\rho_A) = S(\rho_B) \tag{10}$$

Эта мера запутанности была предложена Чарльзом Беннеттом (Charles H. Bennett) с соавторами в 1996 г. [6]

В случае запутанных состояний редуцированные матрицы плотности ρ_A и ρ_B обладают ненулевой квантовой энтропией, в то время как энтропия чистого состояния составной квантовой системы равна нулю.

пояснение:
Чтобы найти след (сумму диагональных элементов) в (9) от произведения двух матриц $\rho_{A(B)}$ и $\log_2\rho_{A(B)}$ необходимо сначала найти логарифм от матрицы. Напомню, для того чтобы найти функцию от матрицы необходимо сначала ее диагонализовать, а затем взять функцию от ее диагональных элементов. Чтобы получить диагональную матрицу достаточно найти ее собственные значения и расположить их на главной диагонали. В случае (*) диагональная матрица ρ^D имеет вид:

$\rho^D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, т.к. она имеет одно ненулевое собственное значение, равное 1 (см. **)

поэтому $\log_2\rho = \begin{pmatrix} \log_2 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$, т.к. $\log_2 1=0$.

Следовательно, энтропия чистого состояния (5) $S(\rho) = -\mathrm{Tr}\{\rho \log_2\rho\}$ равна нулю. Это означает, что никакой информации о чистом состоянии (5) не существует. Это и понятно, поскольку данное состояние никто не измеряет, оно замкнуто, полностью изолировано от внешней среды. У него нет внешнего наблюдателя, в котором бы записывалась информация о взаимодействии, а следовательно и о характеристиках системы. Если бы такой наблюдатель существовал, состояние перестало бы быть чистым запутанным состоянием.

Найдем теперь энтропию частичных матриц плотности ρ_A и ρ_B.
Из (8) мы имеем $\lambda_1=|a|^2$, $\lambda_2=|b|^2$, т.е.

$\log_2\rho_{A(B)} = \begin{pmatrix} \log_2\lambda_1 & 0 \\ 0 & \log_2\lambda_2 \end{pmatrix}$,

$\rho_{A(B)}\log_2\rho_{A(B)}= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \log_2\lambda_1 & 0 \\ 0 & \log_2\lambda_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1\log_2\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\log_2\lambda_2 \end{pmatrix}$,

отсюда

$$E(\psi) = S(\rho_{A(B)}) = -\mathrm{Tr}\{\rho_{A(B)}\log_2\rho_{A(B)}\} = -\sum_{i=1}^{2}\lambda_i\log_2\lambda_i = \qquad (11)$$
$$= -|a|^2\log_2|a|^2 - |b|^2\log_2|b|^2.$$

Очевидно, что в этом случае энтропия, а следовательно и мера запутанности, не равна нулю, т.к. $|a|^2+|b|^2=\lambda_1+\lambda_2=1$. Также очевидно, что эта величина неотрицательная (λ_1 и $\lambda_2\leq 1$, следовательно, логарифм λ меньше или равен нулю).

Если $|a|^2=|b|^2=1/2$, как в случае векторов состояния из Белловского базиса, мы имеем максимальную запутанность, равную 1.

$E(\psi) = S(\rho_{A(B)}) = -[(1/2)\log_2(1/2)+(1/2)\log_2(1/2)] = 1$,
т.к. $\log_2(1/2) = -1$.

Еще раз подчеркну, количественной характеристикой запутанности двухсоставной системы является энтропия частичных, редуцированных матриц плотности. То есть, речь идет о запутанности подсистем между собой. Энтропия, а следовательно и запутанность *с окружением* чистого состояния (замкнутой системы) равна нулю.

Это свидетельствует о том [5], что флуктуации отдельных частей системы взаимосвязаны. При этом степень их корреляции тем больше, чем более случайными они являются по отдельности, поскольку флуктуации в обеих независимо рассматриваемых частях составной системы обусловлены единым источником – чисто квантовыми флуктуациями в составной системе. Можно сказать, что чисто квантовые флуктуации, отвечающие чистому запутанному состоянию $|\psi\rangle$ составной квантовой системы, при независимом рассмотрении отдельных частей системы переходят в классические флуктуации соответствующих частичных распределений вероятности (т.е. частичных матриц плотности) и описываются энтропией этих распределений.

Согласованность

Еще одной широко используемой количественной характеристикой запутанности, непосредственно связанной с предыдущей мерой запутанности, является *согласованность* (concurrence).
Эта характеристика была введена Ч. Беннеттом и В. Вуттерсом с соавторами в работах [7,8]. Определяется она как

$$C(\psi) = \left|\sum_i \alpha_i^2\right|, \qquad (12)$$

где α_i коэффициенты разложения некоторого вектора состояния двухсоставной системы

$$|\psi\rangle = \sum_i^4 \alpha_i\,|e_i\rangle \qquad (13)$$

в следующем “магическом базисе” максимально запутанных состояний:

$$|e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \qquad |e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\,(|00\rangle - |11\rangle), \qquad (14)$$
$$|e_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\,(|01\rangle + |10\rangle), \qquad |e_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle).$$

Заметим, что в (12) входит квадрат комплексного числа α_i, а не его модуля.

Запутанность вектора состояния $|\psi\rangle$ может быть выражена через $C(\psi)$ в виде [7]

$$E(\psi) = H\left[\tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-C^2}\right)\right], \qquad (15)$$

где $H(x)$ – бинарная энтропийная функция:

$$H(x) = -x\log_2(x) - (1-x)\log_2(1-x). \qquad (16)$$

Согласованность характеризует насколько близко наш вектор состояния $|\psi\rangle$ аппроксимируются смесью максимально запутанных состояний.

Докажем равенство (15). Это немного утомительно, но послужит хорошим упражнением.

Обозначим $\alpha_1 = a$, $\alpha_2 = b$, $\alpha_3 = c$, $\alpha_3 = d$, и найдем проектор
$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{i,j=1}^{4} \alpha_i \alpha_j^* \, |e_i\rangle\langle e_j|$, или

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \{a[\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle)] + b[\frac{i}{\sqrt{2}}(|00\rangle-|11\rangle)] + c[\frac{i}{\sqrt{2}}(|01\rangle+|10\rangle)] + d[\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle-|10\rangle)]\}\times$$
$$\times\{a^*[\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 00|+\langle 11|)] + b^*[\frac{-i}{\sqrt{2}}(\langle 00|-\langle 11|)] + c^*[\frac{-i}{\sqrt{2}}(\langle 01|+\langle 10|)] + d^*[\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 01|-\langle 10|)]\}$$

Распишем это произведение и результат представим в виде таблицы, где в левом столбце запишем слагаемые полученной матрицы плотности, а в правом столбце расположим соответствующие им слагаемые редуцированной матрицы плотности, которая нам необходима, для того чтобы определить запутанность по формуле (10).

Раскрывая скобки в предыдущем выражении, получим $\rho =$	После взятия частичного следа по 1-ой частице, получим редуцированную матрицу плотности $\rho_B = \mathrm{Tr}_A|\psi\rangle\langle\psi| =$
$= aa^*\frac{1}{2}(\|00\rangle\langle 00\| + \|00\rangle\langle 11\| + \|11\rangle\langle 00\| + \|11\rangle\langle 11\|) +$	$= \|a\|^2\frac{1}{2}(\|0\rangle\langle 0\| + \|1\rangle\langle 1\|)+$
$+ ab^*\frac{-i}{2}(\|00\rangle\langle 00\| - \|00\rangle\langle 11\| + \|11\rangle\langle 00\| - \|11\rangle\langle 11\|) +$	$+ ab^*\frac{-i}{2}(\|0\rangle\langle 0\| - \|1\rangle\langle 1\|)+$
$+ ac^*\frac{-i}{2}(\|00\rangle\langle 01\| + \|00\rangle\langle 10\| + \|11\rangle\langle 01\| + \|11\rangle\langle 10\|) +$	$+ ac^*\frac{-i}{2}(\|0\rangle\langle 1\| + \|1\rangle\langle 0\|)+$
$+ ad^*\frac{1}{2}(\|00\rangle\langle 01\| - \|00\rangle\langle 10\| + \|11\rangle\langle 01\| - \|11\rangle\langle 10\|) +$	$+ ad^*\frac{1}{2}(\|0\rangle\langle 1\| - \|1\rangle\langle 0\|)+$
$+ ba^*\frac{i}{2}(\|00\rangle\langle 00\| + \|00\rangle\langle 11\| - \|11\rangle\langle 00\| - \|11\rangle\langle 11\|) +$	$+ ba^*\frac{i}{2}(\|0\rangle\langle 0\| - \|1\rangle\langle 1\|)+$
$+ bb^*\frac{1}{2}(\|00\rangle\langle 00\| - \|00\rangle\langle 11\| - \|11\rangle\langle 00\| + \|11\rangle\langle 11\|) +$	$+ \|b\|^2\frac{1}{2}(\|0\rangle\langle 0\| + \|1\rangle\langle 1\|)+$
$+ bc^*\frac{1}{2}(\|00\rangle\langle 01\| + \|00\rangle\langle 10\| - \|11\rangle\langle 01\| - \|11\rangle\langle 10\|) +$	$+ bc^*\frac{1}{2}(\|0\rangle\langle 1\| - \|1\rangle\langle 0\|)+$
$+ bd^*\frac{i}{2}(\|00\rangle\langle 01\| - \|00\rangle\langle 10\| - \|11\rangle\langle 01\| + \|11\rangle\langle 10\|) +$	$+ bd^*\frac{i}{2}(\|0\rangle\langle 1\| + \|1\rangle\langle 0\|)+$
$+ ca^*\frac{i}{2}(\|01\rangle\langle 00\| + \|01\rangle\langle 11\| + \|10\rangle\langle 00\| + \|10\rangle\langle 11\|) +$	$+ ca^*\frac{i}{2}(\|1\rangle\langle 0\| + \|0\rangle\langle 1\|)+$
$+ cb^*\frac{1}{2}(\|01\rangle\langle 00\| - \|01\rangle\langle 11\| + \|10\rangle\langle 00\| - \|10\rangle\langle 11\|) +$	$+ cb^*\frac{1}{2}(\|1\rangle\langle 0\| - \|0\rangle\langle 1\|)+$
$+ cc^*\frac{1}{2}(\|01\rangle\langle 01\| + \|01\rangle\langle 10\| + \|10\rangle\langle 01\| + \|10\rangle\langle 10\|) +$	$+ \|c\|^2\frac{1}{2}(\|1\rangle\langle 1\| + \|0\rangle\langle 0\|)+$
$+ cd^*\frac{i}{2}(\|01\rangle\langle 01\| - \|01\rangle\langle 10\| + \|10\rangle\langle 01\| - \|10\rangle\langle 10\|) +$	$+ cd^*\frac{i}{2}(\|1\rangle\langle 1\| - \|0\rangle\langle 0\|)+$
$+ da^*\frac{1}{2}(\|01\rangle\langle 00\| + \|01\rangle\langle 11\| - \|10\rangle\langle 00\| - \|10\rangle\langle 11\|) +$	$+ da^*\frac{1}{2}(\|1\rangle\langle 0\| - \|0\rangle\langle 1\|)+$
$+ db^*\frac{-i}{2}(\|01\rangle\langle 00\| - \|01\rangle\langle 11\| - \|10\rangle\langle 00\| + \|10\rangle\langle 11\|) +$	$+ db^*\frac{-i}{2}(\|1\rangle\langle 0\| + \|0\rangle\langle 1\|)+$
$+ dc^*\frac{-i}{2}(\|01\rangle\langle 01\| + \|01\rangle\langle 10\| - \|10\rangle\langle 01\| - \|10\rangle\langle 10\|) +$	$+ dc^*\frac{-i}{2}(\|1\rangle\langle 1\| - \|0\rangle\langle 0\|)+$
$+ dd^*\frac{1}{2}(\|01\rangle\langle 01\| - \|01\rangle\langle 10\| - \|10\rangle\langle 01\| + \|10\rangle\langle 10\|)$	$+ \|d\|^2\frac{1}{2}(\|1\rangle\langle 1\| + \|0\rangle\langle 0\|)$

В правом столбце мы получили редуцированную матрицу плотности ρ_B размерностью 2×2, четыре элемента которой равны

$$\rho_{11} = \frac{1}{2}(|a|^2 - iab^* + iba^* + |b|^2 + |c|^2 - icd^* + idc^* + |d|^2)$$
$$\rho_{22} = \frac{1}{2}(|a|^2 + iab^* - iba^* + |b|^2 + |c|^2 + icd^* - idc^* + |d|^2)$$
$$\rho_{12} = \frac{1}{2}(-\,iac^* + ad^* + bc^* + ibd^* + ica^* - cb^* - da^* - idb^*)$$
$$\rho_{21} = \frac{1}{2}(-\,iac^* - ad^* - bc^* + ibd^* + ica^* + cb^* + da^* - idb^*)$$

Учитывая, что $|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2 = 1$, и введя обозначения
$\beta = ab^* - ba^* + cd^* - dc^*$,
$\delta = ac^* - ca^* + db^* - bd^*$,
$\gamma = ad^* - da^* + bc^* - cb^*$,

матрицу ρ_B можно записать более компактно
$$\rho_B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - i\beta & \gamma - i\delta \\ -\gamma - i\delta & 1 + i\beta \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения этой матрицы, для этого решим уравнение

$$\det \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - i\beta - \lambda & \gamma - i\delta \\ -\gamma - i\delta & 1 + i\beta - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Находим определитель и приравниваем его к нулю
$$\frac{1}{2}[(1 - i\beta - \lambda)(1 + i\beta - \lambda) + (\gamma - i\delta)(\gamma + i\delta)] = 0$$
$$(1 + \cancel{i\beta} - \lambda - \cancel{i\beta} + \beta^2 + \cancel{i\beta}\lambda - \lambda - \cancel{i\beta}\lambda + \lambda^2 + \gamma^2 + \cancel{i\gamma}\delta - \cancel{i\gamma}\delta + \delta^2) = 0$$
$$(1 - 2\lambda + \lambda^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) = 0$$

Решаем квадратное уравнение

$$(\lambda^2 - 2\lambda + 1 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) = 0$$

Корни его равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)}}{2}, \text{ или}$$
$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{1 - (1 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)}$$
$$\lambda_2 = 1 - \sqrt{1 - (1 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)}$$

Попытаемся понять, что представляет собой выражение в круглых скобках $(1+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)$, стоящее под корнем. Учитывая нашу цель, можно предположить, что это выражение должно быть равно C^2.

Распишем, чему равны β^2, γ^2 и δ^2 .

$$\beta^2 = [(ab^* - ba^*) + (cd^* - dc^*)]^2 = (ab^* - ba^*)^2 + 2(ab^* - ba^*)(cd^* - dc^*) + (cd^* - dc^*)^2 =$$
$$= a^2b^{*2} - 2|a|^2|b|^2 + b^2a^{*2} + 2ab^*cd^* - 2ab^*dc^* - 2ba^*cd^* + 2ba^*dc^* + c^2d^{*2} - 2|c|^2|d|^2 + d^2c^{*2},$$

$$\gamma^2 = [(ad^* - da^*) + (bc^* - cb^*)]^2 = (ad^* - da^*)^2 + 2(ad^* - da^*)(bc^* - cb^*) + (bc^* - cb^*)^2 =$$
$$= a^2d^{*2} - 2|a|^2|d|^2 + d^2a^{*2} + 2bc^*ad^* - 2bc^*da^* - 2cb^*ad^* + 2cb^*da^* + b^2c^{*2} - 2|b|^2|c|^2 + c^2b^{*2},$$

$$\delta^2 = [(ac^* - ca^*) + (db^* - bd^*)]^2 = (ac^* - ca^*)^2 + 2(ac^* - ca^*)(db^* - bd^*) + (db^* - bd^*)^2 =$$
$$= a^2c^{*2} - 2|a|^2|c|^2 + c^2a^{*2} + 2db^*ac^* - 2db^*ca^* - 2bd^*ac^* + 2bd^*ca^* + d^2b^{*2} - 2|d|^2|b|^2 + b^2d^{*2}.$$

При суммировании слагаемые, отмеченные соответствующими линиями, сокращаются, и мы будем иметь:

$$1+\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1 + a^2b^{*2} - 2|a|^2|b|^2 + b^2a^{*2} + c^2d^{*2} - 2|c|^2|d|^2 + d^2c^{*2} +$$
$$+ a^2d^{*2} - 2|a|^2|d|^2 + d^2a^{*2} + b^2c^{*2} - 2|b|^2|c|^2 + c^2b^{*2} +$$
$$+ a^2c^{*2} - 2|a|^2|c|^2 + c^2a^{*2} + d^2b^{*2} - 2|d|^2|b|^2 + b^2d^{*2}.$$

Это выражение можно немного свернуть

$$1+\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1 + (ab^* - ba^*)^2 + (cd^* - dc^*)^2 +$$
$$+ (ad^* - da^*)^2 + (bc^* - cb^*)^2 +$$
$$+ (ac^* - ca^*)^2 + (db^* - bd^*)^2,$$

но, все равно, не совсем понятно, что делать дальше. Здесь помогает один небольшой трюк, который не сразу приходит в голову. Вспомним, что $1 = |a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2$, очевидно, что квадрат единицы тоже дает единицу, поэтому попробуем возвести единицу в квадрат

$$1^2 = (|a|^2+|b|^2+|c|^2+|d|^2)^2 = [(|a|^2 + |b|^2) + (|c|^2 + |d|^2)]^2 =$$
$$= (|a|^2 + |b|^2)^2 + 2(|a|^2 + |b|^2)(|c|^2 + |d|^2) + (|c|^2 + |d|^2)^2 =$$
$$= |a|^4 + 2|a|^2|b|^2 + |b|^4 + 2|a|^2|c|^2 + 2|a|^2|d|^2 + 2|b|^2|c|^2 + 2|b|^2|d|^2 + |c|^4 + 2|c|^2|d|^2 + |d|^4.$$

Таким образом, если в выражении $1+\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$ мы распишем единицу, как это сделано выше, то все слагаемые с множителем 2 у нас сократятся, и мы получим

$$1+\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = |a|^4 + |b|^4 + |c|^4 + |d|^4 + a^2b^{*2} + b^2a^{*2} + c^2d^{*2} + d^2c^{*2} + a^2d^{*2} + d^2a^{*2} +$$
$$+ b^2c^{*2} + c^2b^{*2} + a^2c^{*2} + c^2a^{*2} + d^2b^{*2} + b^2d^{*2}.$$

Сгруппируем слагаемые, в соответствии с подчеркиванием, и вынесем за скобки квадраты комплексно- сопряженных величин

$$1+\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = a^{*2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + b^{*2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + c^{*2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + d^{*2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

Вынесем за скобку общий множитель $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$ и получим

$$1+\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a^{*2} + b^{*2} + c^{*2} + d^{*2}).$$

Согласно (12) $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = C$, очевидно что $(a^{*2} + b^{*2} + c^{*2} + d^{*2}) = C^*$, поэтому

$1+\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = CC^* = |C|^2$, обычно модуль опускают и пишут просто C^2.
Таким образом, собственные значения равны:

$\lambda_1 = 1+\sqrt{1-C^2}$
$\lambda_2 = 1-\sqrt{1-C^2}$.

Матрица ρ_B в диагональной форме будет иметь вид:

$$\rho^D{}_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-C^2}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-C^2}) \end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись формулами (10)-(11), мы можем посчитать теперь, чему равна запутанность. Не забудем про множитель $\frac{1}{2}$, который необходим, чтобы выполнялось условие $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, которое у нас было в (11). Сумма диагональных элементов частичной матрицы плотности равна 1, это одно из ее основных свойств (см. [3]).

$$E(\psi) = S(\rho_B) = -\sum_{i=1}^{2} \lambda_i \log_2 \lambda_i =$$
$$= -\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{1-C^2})\log_2[\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{1-C^2})] - \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{1-C^2})\log_2[\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{1-C^2})],$$

введя обозначение $x = \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-C^2})$, мы получим

$$E(\psi) = -x\log_2 x - (1-x)\log_2(1-x),$$

Таким образом, мы вывели формулы (15), (16).

В работе [9] Вуттерс предложил аналитический метод для вычисления согласованности. Основан он на применении так называемого “spin-flip” преобразования, или матрицы “перевернутых спинов”, которая определяется следующим образом:

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y), \tag{17}$$

где ρ^* – матрица, комплексно-сопряженная исходной матрице плотности ρ,
$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ – стандартная матрица Паули (y-составляющая).

После того, как найдена матрица $\tilde{\rho}$, необходимо найти произведение матриц $\rho\,\tilde{\rho}$. Полученная в итоге матрица является неэрмитовой, но имеет вещественные и неотрицательные собственные значения [10]. Тогда согласованность C может быть найдена из выражения

$$C = \max\{\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4},\ 0\}, \tag{18}$$

где λ_i – собственные значения матрицы $\rho\,\tilde{\rho}$. Если есть только два ненулевых собственных значения, то

$$C = |\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2}|. \tag{19}$$

Для того чтобы понять, как на практике работает данный способ вычисления согласованности, рассмотрим пример.

Возьмем вектор состояния $|\psi\rangle = a\,|00\rangle + b\,|11\rangle$, где $|a|^2+|b|^2=1$. Как мы уже знаем, матрица плотности в этом случае имеет вид

$$\rho = \begin{pmatrix} |a|^2 & 0 & 0 & ab^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ ba^* & 0 & 0 & |b|^2 \end{pmatrix}, \text{ тогда комплексно сопряженная матрица } \rho^* = \begin{pmatrix} |a|^2 & 0 & 0 & a^*b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b^*a & 0 & 0 & |b|^2 \end{pmatrix}.$$

Тензорное произведения матриц Паули σ_y равно

$$\sigma_y \otimes \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} & -i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (20)$$

Найдем матрицу $\tilde{\rho}$, согласно (17) она равна:

$$\tilde{\rho} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |a|^2 & 0 & 0 & a^*b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b^*a & 0 & 0 & |b|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -b^*a & 0 & 0 & -|b|^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -|a|^2 & 0 & 0 & -a^*b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |b|^2 & 0 & 0 & b^*a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^*b & 0 & 0 & |a|^2 \end{pmatrix}, \qquad (21)$$

Теперь можно найти произведение $\rho\,\tilde{\rho}$.

$$\rho\,\tilde{\rho} = \begin{pmatrix} |a|^2 & 0 & 0 & ab^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ ba^* & 0 & 0 & |b|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |b|^2 & 0 & 0 & b^*a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^*b & 0 & 0 & |a|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2|a|^2|b|^2 & 0 & 0 & 2|a|^2\,ab^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2|b|^2\,ba^* & 0 & 0 & 2|a|^2|b|^2 \end{pmatrix}. \qquad (22)$$

Найдем собственные значения матрицы $\rho\,\tilde{\rho}$. Для этого нужно решить уравнение

$$\det(\rho\,\tilde{\rho} - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 2|a|^2|b|^2 - \lambda & 0 & 0 & 2|a|^2\,ab^* \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 2|b|^2\,ba^* & 0 & 0 & 2|a|^2|b|^2 - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Определитель найдем, используя разложение Лапласа по первой строке:

$(2|a|^2|b|^2 - \lambda)[\lambda^2(2|a|^2|b|^2 - \lambda)] - 2|a|^2ab^*(\lambda^2\ |b|^2ba^*) = 0$

$\lambda^2(2|a|^2|b|^2 - \lambda)^2 - \lambda^2 4|a|^4|b|^4 = 0$

$\lambda^2(4|a|^4|b|^4 - 4|a|^2|b|^2\lambda + \lambda^2 - 4|a|^4|b|^4) = 0$

$\lambda^3(\lambda - 4|a|^2|b|^2) = 0$

Таким образом, имеем одно ненулевое собственное значение $\lambda = 4|a|^2|b|^2$. Из (18) получаем C=2$|a||b|$ и C^2=4$|a|^2|b|^2$.

Посчитаем по формулам (15), (16), чему равна запутанность. Найдем сначала значение аргумента $x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-C^2})$. Единицу под корнем расписываем, как мы уже делали раньше, возводя в квадрат, т.е. $1^2= (|a|^2+|b|^2)^2= |a|^4 + 2|a|^2|b|^2+ |b|^4$.

$$x = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{1-C^2}) = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{|a|^4 + 2|a|^2|b|^2 + |b|^4 - 4|a|^2|b|^2}) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{|a|^4 - 2|a|^2|b|^2 + |b|^4}) = \tfrac{1}{2}[1+\sqrt{(|a|^2-|b|^2)^2}] \text{ или } \tfrac{1}{2}[1+\sqrt{(|b|^2-|a|^2)^2}]$$

В итоге имеем:

$$x = \tfrac{1}{2}[1\pm(|a|^2 - |b|^2)] = \tfrac{1}{2}[|a|^2 + |b|^2 \pm (|a|^2 - |b|^2)].$$

Получаем два значения $x_1= |a|^2$, $x_2= |b|^2$. Подставляя любое из этих значений в (16), и, учитывая, что $|a|^2+|b|^2=1$, имеем

$$E(\psi)=H(x_1)=H(x_2)= - |a|^2\log_2|a|^2 - |b|^2 \log_2|b|^2. \qquad (23)$$

Сравнивая этот результат с (11), мы видим, что получили то же самое выражение.

Заключение

Мы подробно рассмотрели только одну из мер запутанности. Существуют и другие количественные характеристики и критерии запутанности. Из них наиболее известные: Peres-Horodecki или PPT (positive partial transpose)- критерий сепарабельности [11], и основанная на нем мера запутанности – *отрицательность* (negativity) [12,13]; *относительная энтропия* запутанности (relative entropy of entanglement) [14]; CCN (computable cross-norm) – критерий [15]; мера запутанности, основанная на метрике гильбертова пространства (расстоянии Гильберта-Шмидта), эту меру можно рассматривать как информационное расстояние между двумя состояниями [16]; мера, основанная на ранге Шмидта [17] и некоторые другие.

Литература

[1] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).

[2] A. Einstein, in *Albert Einstein, Philosopher-Scientist*, edited by P. A. Schilpp (Library of Living Philosophers, Evanston, 1949) p. 85.

[3] J. Preskill, Quantum Computation, Lecture Notes, (1997-99), http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph219/#lecture
[4] J. S. Bell, Physics **1**, 195 (1964).
[5] И.В. Баргатин, Б.А. Гришанин, В.Н. Задков, УФН **171 (6)**, 625 (2001).
[6] C. H. Bennett, H. J. Bernstein, S. Popescu, and B. Schumacher, Phys. Rev. A **53**, 2046 (1996).
[7] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, and W. K. Wootters, Phys. Rev. A **54**, 3824 (1996).
[8] S. Hill and W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **78**, 5022 (1997).
[9] W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998).
[10] V. Coffman, J. Kundu, and W. K. Wootters, Phys. Rev. A **61**, 052306 (2000).
[11] A. Peres, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996); M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, Phys. Lett A **223**, 1 (1996).
[12] K. Życzkowski, P. Horodecki, A. Sanpera, and M. Lewenstein, Phys. Rev. A **58**, 883 (1998).
[13] G. Vidal and R.F. Werner, Phys. Rev. A **65**, 032314 (2002).
[14] V. Vedral, M.B. Plenio, K. Jacobs, and P.L. Knight, Phys. Rev. A **56**, 4452 (1997).
[15] O. Rudolph, Phys. Rev. A, **67**, 032312 (2003).
[16] J. Lee, M.S. Kim, Časlav Bruker, Phys. Rev. Lett. **91**, 087902 (2003).
[17] J. Eisert, and H.J. Briegel, Phys. Rev. A **64**, 022306 (2001).