УДК 004.725.7

В.О. Жарикова, С.Н. Новиков

Математическая модель анализа многоадресной маршрутизации в мультисервисной сети связи

Предложена математическая модель функционирования мультисервисной сети связи (МСС) при многоадресной маршрутизации, включающая в себя: модель входящих информационных потоков, модель маршрутизации, модель сетевых элементов (маршрутизаторов).

Ключевые слова: многоадресная маршрутизация, математическая модель, мультисервисная сеть.

Известно, что протоколы сетевого уровня значительно влияют на функционирование сети связи и параметры качества обслуживания (QoS) приложений [1]. Проведение экспериментальных исследований на действующих МСС с использованием различных методов маршрутизации связано с техническими, организационными и финансовыми трудностями. Одним из решений данной проблемы является разработка математической модели функционирования МСС. В настоящее время анализу функционирования протоколов сетевого уровня посвящено множество работ [1–5, 9]. Предложены математические модели функционирования МСС, учитывающие в том числе самоподобный трафик при одноадресной маршрутизации [2]. Однако вопросы анализа функционирования МСС с учетом протоколов многоадресной маршрутизации рассмотрены недостаточно. В связи с этим возникает необходимость разработки подобных моделей.

1. Определение исходных данных, ограничений математической модели и критериев анализа функционирования МСС

Исходные данные.

1. Представим структуру сети связи в виде неориентированного графа $G(A_S, L_{s,s})$, где A_S – множество вершин графа, $A_S = (a_1,..,a_i,..,a_s)$; S – количество узлов коммутации (УК); $L_{s,s}$ – множество ребер графа, отражающих линии связи (ЛС); $L_{s,s} = \{l_{ij}\}$, $i, j = \overline{1,S}; i \neq j$, причем $l_{ij} = (0,1)$. В каждой ЛС l_{ij} имеется k_{ij} каналов связи (КС), $i, j = \overline{1,S}; i \neq j$; $K = \|k_{ij}\|_{s,s}$ – матрица КС в ЛС.

2. Тяготение узлов-источников (УИ) a_i и групп узлов-получателей (УП) a_j, при поступлении потока данных r-го приложения в МСС, зададим матрицей тяготений $\Pi^{мк}$:

$$\Pi_r^{мк} = \|\pi_{rij}\|_{s,s};\ 0 \le \pi_{rij} \le 1;\ \sum_{i,j}^{s} \pi_{rij} = 1.$$

3. Поступающий в сеть связи поток данных r-го приложения считается самоподобным:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^k \Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}, x \ge 0, \\ 0,\ x < 0, \end{cases}$$

где $\Gamma(k) = \int_0^\infty x^{k-1} e^{-x} dx$, с параметрами k_r – количество сообщений, поступающих на обслуживание; θ – параметр гамма-распределения.

4. Закон распределения длительности обслуживания заявки в каждом УК подчиняется экспоненциальному закону:

$$\mu_{об}(t_{дл}) = \mu_{дл.r} e^{-\mu_{дл.r} t_{дл}}$$

с параметром: $\mu_{дл.r}$ – интенсивность обслуживания сообщения r-го приложения.

5. Метод маршрутизации [2] M_i:

M_1 – лавинный, формирование дерева с корнем в УИ при последовательном выборе исходящих трактов передачи сообщений (ИТПС);

M_2 – игровой, формирование дерева с корнем в УИ при параллельном выборе ИТПС;

M_3 – лавинный, формирование остового дерева при последовательном выборе ИТПС;

M_4 – игровой, формирование остового дерева при параллельном выборе ИТПС представим в виде таблиц маршрутизации (ТМ) $P_r^{\text{мк}(t)} = \left\| P_r^{\text{мк}(t)}{}_{ij} \right\|_{S,S}$; $i, j = \overline{1,S}$, где $P_r^{\text{мк}(t)}{}_{ij}$ – вероятность перехода из узла i в узел j при поиске t-го узла группы получателей для r-го приложения.

Ограничения математической модели

1. В сети используется метод коммутации пакетов с предварительным установлением соединения.
2. Элементы сети (УК, ЛС) абсолютно надежны.
3. Пакеты, поступающие в сеть постоянной длины.

Определение критериев анализа функционирования МСС

В качестве критериев оценки функционирования МСС примем:

1) дифференциальную оценку качества обслуживания пользователей для r-го приложения, $\hat{P}_r = \left\| \hat{P}_{ij} \right\|_{s,s}$; $\hat{P}_{ij}; i, j = \overline{1,S}; i \neq j$ – вероятность блокировки r-го приложения между i-м и j-м УК;

2) интегральную оценку качества обслуживания пользователей; $\hat{P}_{0,r}$ – вероятность блокировки r-го приложения в целом по МСС.

Таким образом, будем оценивать функционал $\left\{ \hat{P}_r; \hat{P}_{0,r} \right\} = F\left\{ G(A_s, K_{s,s}); \Pi_r, \lambda, \mu, M_i \right\}$.

2. Математическая модель входящих информационных потоков

Чтобы случайный процесс являлся самоподобным, должны выполняться следующие условия:

– случайный процесс должен обладать медленно убывающей зависимостью, т.е. его автокорреляционная функция должна убывать по гиперболическому закону с увеличением лага;

– случайный процесс должен иметь распределение с тяжелым (весовым) хвостом, т.е. хвост распределения должен затухать по степенному закону.

Воспользуемся следующими свойствами гамма-распределения:

1) если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимые случайные величины, такие что $X_i \sim \Gamma(k_i, \theta)$, то

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} k_i, \theta \right); \tag{1}$$

2) если $X \sim \Gamma(k, \theta)$, и $a > 0$ – произвольная константа, то $aX \sim \Gamma(k, a\theta)$.

Пусть на вход сетевого элемента поступают пакеты данных от различных УИ. Поступающие потоки образуют гамма-распределение с параметрами k, θ. Тогда суммарный поток на входе сетевого элемента также образует гамма-распределение:

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sim \Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} k_i, \theta \right) = \Gamma(K, \theta).$$

Математическое ожидание и дисперсия суммарного потока равны соответственно

$$M[X] = \theta \sum_{i=1}^{n} k_i = \theta \cdot K; \quad D[X] = \theta^2 \sum_{i=1}^{n} k_i = \theta^2 \cdot K.$$

3. Математическая модель маршрутизации на сети связи

Таблица маршрутизации строится в результате работы имитационных алгоритмов маршрутизации, представленных в [8].

Пусть $\Lambda^{\text{мк}}$ – общая интенсивность потока информации многоадресного трафика. Следовательно, выражение

$$\Lambda_{\xi,r} = \Pi_r^{\text{мк}} \Lambda^{\text{мк}},$$

где ξ – обозначает выбор одного из деревьев оптимальных маршрутов, определяет интенсивности поступления потоков информации r-го приложения для данной группы получателей.

Тогда объединенный во входной части сетевого элемента поток для ξ-дерева распределяется в соответствии с таблицами маршрутизации на выходные потоки $\lambda_1 = \Lambda_{\xi,r} P_1$, $\lambda_2 = \Lambda_{\xi,r} P_2$,

…, $\lambda_n = \Lambda_{\xi,r} P_n$. В соответствии со свойством (1) гамма-распределения выходные потоки λ_ξ будут также иметь гамма-распределение:

$$\lambda_\xi = \Lambda_{\xi,r} P_i \sim \Gamma(K \cdot P_i, \theta) = \Gamma\left(P_i \sum_{j=1}^{n} k_j, \theta \right).$$

Математическое ожидание и дисперсия в этом случае

$$M[X] = P_i \cdot \theta \cdot K = P_i \cdot \theta \sum_{j=1}^{n} k_j \quad , \qquad D[X] = \theta^2 K P_i = \theta^2 P_i \sum_{j=1}^{n} k_j \; .$$

В результате, согласно особенности многоадресной маршрутизации, которая заключается в передаче одной и той же информации от УИ к группе получателей, распределение интенсивности потока $\lambda_{\xi,r}$ по одному из деревьев оптимальных маршрутов будет таким, как показано на рис. 1.

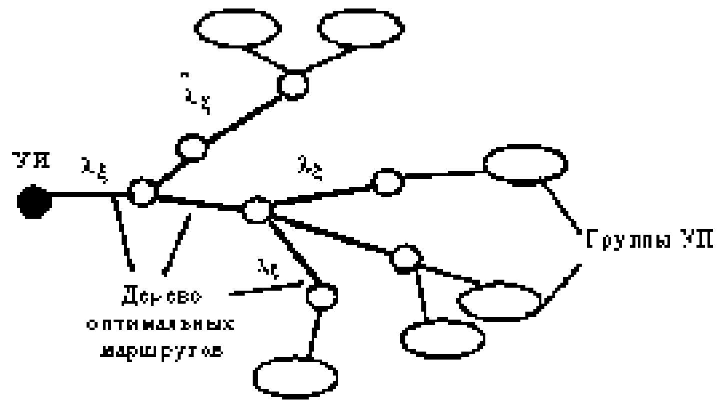

Рис. 1. Пример распределения интенсивности потока информации по дереву оптимальных маршрутов

В результате формируется взвешенный граф сети связи, ребрам которого присвоены интенсивности проходящих потоков данных:

$$\lambda^{\text{мк}}{}_{\xi,r} = \Lambda_{\xi,r} P^{\text{мк}}_{r,kl}; \; k,l = \overline{1,S} \; .$$

Далее к весу каждого ребра полученного графа прибавляется значение нагрузки, создаваемой применяемым методом маршрутизации. Нагрузка, создаваемая методами маршрутизации, состоит из следующих компонент:

- нагрузка, создаваемая в процессе формирования ТМ информации на сети связи;
- нагрузка, создаваемая в процессе построения дерева многоадресных маршрутов;
- нагрузка, создаваемая в процессе выбора исходящих трактов передачи сообщений.

Соотношения для поиска величины нагрузки при различных методах маршрутизации приведены в [8].

4. Математическая модель сетевых элементов

Представим маршрутизатор в терминах системы массового обслуживания – *G/M/1/N*, с абсолютным приоритетом обслуживания. На рис. 2 приведена модель маршрутизатора, где $\lambda_{\text{вх}}$ – интенсивности пакетов данных, поступающих на *i*-й вход сетевого элемента; μ – производительность обслуживающей линии маршрутизатора; P_j – вероятность выбора *j*-го исходящего тракта передачи сообщений (элемент таблицы маршрутизации); $\Lambda^{\text{мк}}$ – суммарная нагрузка, создаваемая каждым из поступающих на вход потоков, заданных случайными процессами X_i.

5. Вероятность блокировки СМО с ограниченным буфером при входящем гамма-потоке

Известно [6], что вероятность блокировки в системе массового обслуживания *G/M/1/N* вычисляется по формуле

$$p_N = \frac{1-\sigma}{1-\sigma^{N+1}} \sigma^N , \qquad (2)$$

где σ – единственное решение уравнения

$$h(\mu - \mu\sigma) = \sigma , \qquad (3)$$

здесь h – преобразование Лапласа–Стильтьеса.

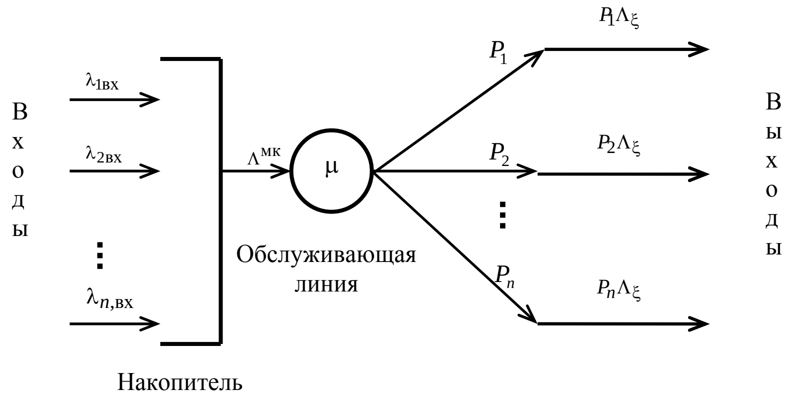

Рис. 2. Математическая модель маршрутизатора

В [7] приведено решение уравнения (3) для случаев гамма-распределения различного порядка. В общем случае решение уравнения (3) сводится к решению уравнений вида

$$(k\rho)^k - \sigma(1-\sigma+k\rho)^k = 0, \quad k\rho - \sigma^{\frac{1}{k}}(1-\sigma+k\rho) = 0,$$

где $\rho = \lambda/\mu$, λ – интенсивность поступления заявок на входе СМО; μ – производительность обслуживающей линии СМО.

Для исследования сетей с самоподобным трафиком коэффициент k должен удовлетворять условию: $0 < k < 1$. В этом случае гамма-распределение будет тяжеловесным, т.е. будет выполняться необходимое условие самоподобности трафика.

Для практических исследований подойдет значение коэффициента k = 0,5. При k = 0,5 [7] имеем следующее решение:

$$k\rho - \sigma^{\frac{1}{k}}(1-\sigma+k\rho) = 0, \qquad \frac{\rho}{2} - \sigma^2\left(1-\sigma+\frac{\rho}{2}\right) = 0, \qquad \frac{\rho}{2}\left(1-\sigma^2\right) - \sigma^2(1-\sigma) = 0, \quad (1-\sigma)\left(\frac{\rho}{2}+\frac{\rho}{2}\sigma-\sigma^2\right) = 0. \quad (4)$$

Решение уравнения (4) дает три корня – σ = 1 и два корня уравнения:

$$\sigma^2 - \frac{\rho}{2}\sigma - \frac{\rho}{2} = 0. \quad (5)$$

Корни уравнения (5)

$$\sigma_{1,2} = \frac{\rho}{4} \pm \sqrt{\frac{\rho^2}{16} + \frac{\rho}{2}}.$$

Для определения возможности использования корней уравнения используется условие

$$0 < \sigma < 1.$$

Данному условию удовлетворяет лишь один корень уравнения (5):

$$\sigma = \frac{\rho}{4} + \sqrt{\frac{\rho^2}{16} + \frac{\rho}{2}}.$$

Подставляя значение решения уравнения (3) в (2), получаем вероятность блокировки системы массового обслуживания $\Gamma_{0,5}/M/1/N$:

$$p_n = \frac{1-\sigma}{1-\sigma^{N+1}}\sigma^N = \frac{\left(1-\frac{\rho}{4}-\sqrt{\frac{\rho^2}{16}+\frac{\rho}{2}}\right)}{1-\left(\frac{\rho}{4}+\sqrt{\frac{\rho^2}{16}+\frac{\rho}{2}}\right)^{N+1}}\left(\frac{\rho}{4}+\sqrt{\frac{\rho^2}{16}+\frac{\rho}{2}}\right)^N.$$

6. Оценка дифференциального критерия качества обслуживания пользователей МСС

Для оценки параметров $\hat{P}_r$ и $\hat{P}_{0,r}$ воспользуемся методами [9], которые сводятся к определению вероятности связности:

1) анализируемого графа – $\hat{P}_{0,r}$;

2) отдельных вершин графа – $\hat{P}_r$.

Выводы

1. Разработана математическая модель функционирования МСС с учетом самоподобного трафика при многоадресной маршрутизации.

2. Математическая модель позволяет проводить целенаправленный анализ параметров качества обслуживания пользователей в МСС при многоадресной маршрутизации.

Литература

1. Вишневский В.М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. – М.: Техносфера, 2003. – 512 с.

2. Новиков С.Н. Методы маршрутизации на цифровых широкополосных сетях связи: учеб. пособие. – Ч. 1. – Новосибирск: СибГУТИ, 2000. – Ч. 1 – 84 с.

3. Буров А.А. Анализ методов маршрутизации в широкополосных цифровых сетях интегрального обслуживания (Ш-ЦСИО) / А.А. Буров, С.Н. Новиков // Компьютерные учебные программы и инновации. – 2004. – № 6. – 13 с.

4. Математические модели исследования маршрутизации в сетях передачи данных / М.П. Березко, В.М. Вишневский, Е.В. Левнер, Е.В. Федотов // Информационные процессы. – 2001. – Т. 1, № 2. – С. 103–125.

5. Wittmann R. Multicast Communication: protocols and applications / R. Wittmann, M. Zitterbart. – Academic press, 2001. – 369 p.

6. Пономарев Д.Ю. Исследование моделей телекоммуникационных систем с непуассоновскими входными потоками // Проблемы информатизации региона. ПИР-2001: сб. науч. тр. – Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2002. – С. 145–152.

7. Пономарев Д.Ю. Об обслуживании в системе с входным гамма-потоком [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.sbras.ru/ws/YM2004/8510/, свободный (дата обращения: 24.04.2012).

8. Жарикова В.О. Введение в курс «Моделирование систем» методики анализа функционирования методов многоадресной маршрутизации на сети связи // Матер. 53-й (LIII) науч.-метод. конф. «Дидактические особенности образовательного процесса в условиях перехода на новые образовательные стандарты». – Новосибирск: СибГУТИ, 2012. – 110 с.

9. Новиков С.Н. Методы оценки структурной надежности телекоммуникационных систем: учеб. пособие / С.Н. Новиков, Е.В. Сафонов (Методический комплекс). – Новосибирск, 2003. – 44 с.

Жарикова Виктория Олеговна
Ст. преподаватель каф. безопасности и управления в телекоммуникациях (БиУТ) Сибирского государственного университета телекоммуникаций и информатики (СибГУТИ), г. Новосибирск
Тел.: (383) 269-82-45, 913-741-73-93
Эл. почта: zharikova_viktoria@mail.ru

Новиков Сергей Николаевич
Канд. техн. наук, доцент, зав. каф. БиУТ, проф. ФГОУ ВПО «СибГУТИ»
Тел.: (383) 269-82-45, 913-923-7234
Эл. почта: snovikov@mbit.ru

Zharikova V.O., Novikov S.N.

A mathematical model analysis of multicast routing in multi-service network

The paper presents a mathematical model of the multi-service network for multicast routing, comprising: a model of incoming information flow, routing model, model of network elements (routers).

Keywords: multicast routing, mathematical model, multi-service network.