противоречит тому, что те же переменные состояния оказуются детерминированными по отношению к другой, более удачной математической модели. В этом отношении принятая концепция указывает на то, что граница предсказуемость – непредсказуемость подвижна и зависит от способности выбрать удачно математическую модель.

В условиях неопределенности и случайных взаимодействий факторов, определяющих тенденции изменений переменных состояния НЭЭС, является энтропия Н, зависящая от состояния НЭЭС, а точнее говоря, ее вторая вариация $\delta^2 H$.

Увеличение энтропии при эволюции переменных состояния к стационарному состоянию оказывается возможным из-за того, что заданные параметры НЭЭС достаточны лишь для определения стационарного состояния, а выбор начального распределения P(v,0) остается произвольным.

При произвольном изменении параметров НЭЭС стационарные решения уравнения (16) притягиваются к трем типам устойчивых структур плотностей вероятностей переменных состояния: пик - $P_1(x)$, кратер со сходящимися стенками - $P_2(x)$, плато - $P_3(x)$. Точки бифуркаций, соответствующие переходу $P_1(x) \Rightarrow P_2(x) \Rightarrow P_3(x)$, определяются критическими значениями обобщенного параметра L_c.

Структуре $P_1(x)$ соответствует функциональная устойчивость НЭЭС (вероятность Р нахождения показателей качества функционирования в допустимых пределах высока и может только возрастать). $P_2(x)$ соответствует мягкая потеря функциональной устойчивости НЭЭС (Р циклически меняется: то она высока, то мала). $P_3(x)$ соответствует жесткая потеря функциональной устойчивости НЭЭС (нахождение показателей качества функционирования в допустимых пределах и вне их равновероятно).

Хотя каждая из перечисленных структур $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ сопряжена с качественным изменением режима НЭЭС, между ними имеется существенное различие. При мягкой потере функциональной устойчивости НЭЭС $P_1(x) \rightarrow P_2(x)$ среднеквадратичное отклонение переменных состояния увеличивается медленно и остается пропорциональным $\sqrt{L_c}$. При жесткой потере функциональной устойчивости $P_1(x) \rightarrow P_3(x)$, $P_2(x) \rightarrow P_3(x)$ среднеквадратичное отклонение переменных состояния обладает наибольшей непредсказуемостью, оно может достигать предельной величины, после чего наступает режим, не имеющий ничего общего с исходным режимом.

Таким образом, энтропия является основной мерой устойчивости системы. Устойчивость НЭЭС определяется изменением энтропии, вернее, ее первой δH и второй $\delta^2 H$ вариациями.

Литература

1. Кравцов Ю.А. Случайность, детерминированность, предсказуемость // УФН.- 1989.-№ 5.-С. 92-102.

2. Красовский А.А. Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем. – М.: Наука, 1974. – 230 с.

3. Федоров В.К. Функциональная устойчивость и чувствительность электроэнергетических систем // Изв. СО АН СССР Техн. науки – 1984. – 1.-№ 4-С. 120-124.

4. Федоров В.К. Вторая вариация энтропии в статистическом анализе функциональной устойчивости электроэнергетических систем // Изв. вузов СССР. Энергетика. – 1989. - № 2. – С. 19-23.

5. Федоров В.К. Случайность и детерминированность в теории функциональной устойчивости электроэнергетических систем // Изв. вузов СССР. Энергетика. – 1990. - № 12. – С. 8-14.

6. Федоров В.К. Формирование устойчивых структур плотности вероятностей отклонений частоты в электроэнергетических системах // Изв. СО АН СССР. Техн. науки. – 1988.-вып.4. - № 15. – С. 38-46.

7. Федоров В.К. Инвариантность оптимальных решений при анализе угрожающих аварией режимов энергетических систем // Изв. вузов СССР Энергетика. – 1985. - № 3. – С. 17-21.

8. Федоров В.К. Статистический анализ функциональной устойчивости изолированных электроэнергосистем // Изв. вузов СССР. - Энергетика. – 1987.- № 4. – С. 8-12.

ФЕДОРОВ Владимир Кузьмич, доктор технических наук, профессор кафедры электроснабжения промышленных предприятий.

СУРИКОВ Валерий Иванович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой физики.

РЫСЕВ Павел Валерьевич, студент 5-го курса электротехнического факультета.

В. К. ФЕДОРОВ
В. Н. ГОРЮНОВ
В. И. СУРИКОВ
П. В. РЫСЕВ

Омский государственный технический университет

СЛУЧАЙНЫЕ И ХАОТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

УДК 621.317

В СТАТЬЕ ПРЕСЛЕДУЕТСЯ ЦЕЛЬ ОТРАЗИТЬ ПРОСТЫМИ МАТЕМАТИЧЕСКИМИ СРЕДСТВАМИ ОСНОВНЫЕ ПОДХОДЫ К АНАЛИЗУ СЛУЧАЙНЫХ И ХАОТИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ РАБОТЫ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ.

Детерминистские законы, некогда бывшие наиболее приемлемыми научными законами, сейчас предстают перед нами как чрезмерные упрощения. В классическом представлении считают, что если бы в некоторый момент времени состояние НЭЭС было известно с достаточной точностью, то, в принципе, будущее поведение НЭЭС можно было бы предсказать, а прошлое – восстановить. Такого рода теоретическая схема указывает, что в определенном смысле настоящее содержит в себе прошлое и будущее.

В классическом понимании выражение «вскрыть причинно-следственные связи» означает «понять динамику процессов», происходящих в НЭЭС. При этом предполагается, что причина и следствие соизмеримы. Для устойчивых и нейтральных процессов это имеет место. В неустойчивых процессах ситуация иная: очень малая причина приводит к следствию, которое по масштабу несоизмеримо с причиной. Обычно в таких случаях говорят, что причиной явилась неустойчивость, а не малое начальное воздействие. Но тогда происходит существенный сдвиг понятий: в качестве причины фигурирует внутреннее свойство НЭЭС, а не внешнее воздействие и внезапное качественное изменение поведения НЭЭС при изменении некоторого ее параметра принято обозначать термином «бифуркация».

Числа Ляпунова являются собственными числами НЭЭС, они не зависят от начальных условий и внешних возмущений. Устойчивость и неустойчивость есть внутреннее свойство НЭЭС, а отсюда следует, что неустойчивость можно рассматривать в качестве причины определенных следствий в неустойчивой НЭЭС.

Описание НЭЭС требует привлечения понятий порядка и хаоса. Выясняется, что хаос может появляться из упорядоченного состояния (детерминированный хаос), а порядок – из хаотического состояния. Отмечают два свойства и одну особенность хаотических состояний НЭЭС. Термин «хаос» применяется к таким состояниям НЭЭС, траектории которых в фазовом пространстве обнаруживают сильную зависимость от начальных условий. Другое свойство НЭЭС в хаотическом состоянии – потеря информации о начальных условиях. Возбуждение непрерывного спектра частот реакции – отклика НЭЭС, расположенного ниже частоты внешнего воздействия, является особенностью НЭЭС в хаотическом состоянии.

1. Автономная НЭЭС

Автономная НЭЭС n-го порядка определяется уравнением состояния вида:

$$\frac{dx}{dt}=f(x),\ x(t_0)=x_0, \qquad (1)$$

где $x(t)\in R^n$ - вектор состояния системы в момент времени t, $f:R^n\to R^n$ - векторное поле.

Поскольку такое векторное поле не зависит от времени, то нулевым всегда может быть выбран любой момент времени.

Решение системы уравнений (1) с начальным условием с называется траекторией и обозначается как $F_t(x_0)$. Отображение $F_t:R^n\to R^n$ называется потоком системы.

2. Неавтономная НЭЭС

Неавтономная НЭЭС n-го порядка определяется уравнением состояния с зависящей от времени правой частью.

$$\frac{dx}{dt}=f(x,t),\ x(t_0)=x_0, \qquad (2)$$

В этом случае векторное поле $f:R^n\to R^n$ зависит от времени, а начальный момент не может быть произвольно перенесен в некоторую точку. Решение системы уравнений (2), проходящее в момент времени t_0 через точку x_0, обозначается как $F_t(x_0,t_0)$. В тех случаях, когда существует такое значение $T>0$, что выполняется равенство $f(x,t)=f(x,t+T)$ для всех x, говорят, что система является периодической по времени с периодом T.

3. НЭЭС с дискретным временем

Любое отображение $f:R^n\to R^n$ определяет НЭЭС с дискретным временем, которая задается своим уравнением состояния

$$x_{k+1}=f(x_k),\ \ k=0,1,2,\dots, \qquad (3)$$

где $x_k\in R^n$ называется состоянием системы; f – отображение состояния x_k в состояние x_{k+1}.

Если отображение f последовательно применять к вектору состояния с начальным значением x_0, то будет получена последовательность точек x_k, называемая орбитой системы с дискретным временем.

4. Поведение НЭЭС в установившемся режиме и предельные множества

Установившееся состояние означает асимптотическое поведение при $t\to\infty$. Это состояние обязательно должно характеризоваться ограниченными значениями соответствующей функции.

Точка y является предельной точкой для x, если для каждой окрестности U точки y траектория $F_t(x)$ неоднократно попадает в окрестность U при $t\to\infty$. Множество всех предельных точек y называется предельным множеством L(x) для x. Предельные множества являются замкнутыми и инвариантными относительно $F_t(x)$. Множество L называется инвариантным относительно преобразования F_t, если для всех $x\in L$ и всех t значения $F_t(x)\in L$.

Предельное множество L является притягивающим, если существует открытая окрестность U множества L, такая, что $L(x)=L$ для всех $x\in U$. Бассейном притяжения B(L), притягивающего множество L, называется объединение всех таких окрестностей U. Каждая траектория, берущая начало в бассейне B(L), стремится к L при $t\to\infty$. Исторически сложилось так, что термину «притягивающее множество» соответствует термин аттрактор, а притягивающее множество, в котором накапливаются траектории НЭЭС с хаотическим поведением, называется странным аттрактором.

У каждой устойчивой линейной системы существует лишь одно предельное множество, поведение ее в установившемся состоянии зависит от начального условия. В типичной нелинейной системе может быть несколько предельных множеств, каждое из которых характеризуется своим отдельным бассейном притяжения. При этом окончательное установление в системе того или иного предельного множества определяется конкретным видом начального условия.

Теперь рассмотрим четыре типа поведения НЭЭС в установившемся состоянии и начнем наше рассмотрение с наиболее простого типа, переходя затем к наиболее сложному. Каждое установившееся состояние будем рассматривать с трех точек зрения: во временной области, в частотной области и как предельное множество (область пространства состояний).

4.1. Положение равновесия

Положение равновесия x_p автономной системы представляет собой постоянное решение уравнения (4) $F_t(x_p)=x_p$ для всех t. Такому положению равновесия соответствует точка, в которой исчезает векторное поле, и выполнение равенства f(x) = 0 означает, что точка x представляет положение равновесия. Предельным множеством для положения равновесия является само положение равновесия.

В неавтономных НЭЭС, поскольку векторное поле меняется со временем, обычно не имеется положений равновесия.

4.2. Периодические решения

Функция $F_t(x,t_0)$ называется периодическим решением, если для всех t и некоторого периода $T>0$ выполняется равенство

$$F_t(x,t_0)=F_{t+T}(x,t_0) \qquad (5)$$

Периодическое решение представляется рядом Фурье, содержащим некоторую составляющую с циклической частотой $f=\frac{1}{T}$ и гармоники, расположенные равномерно (эквидистантно) с частотами $k\cdot f$, где k = 2,3,... При этом ненулевую амплитуду могут иметь не все указанные спектральные составляющие.

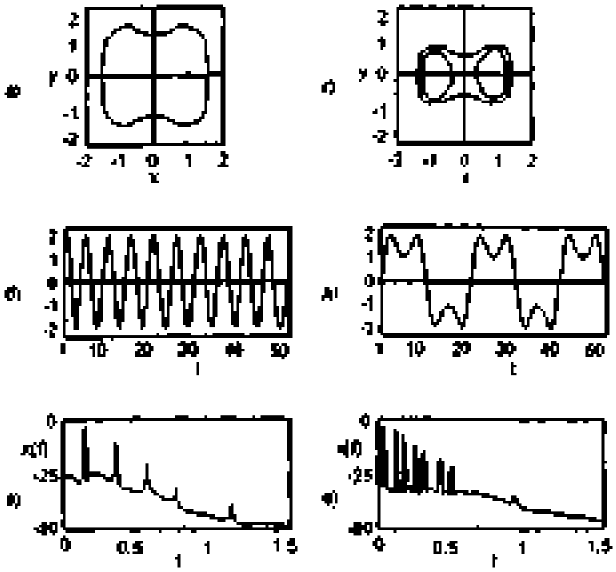

Рис. 1. Периодические решения уравнения Дуффинга для $\gamma = 0{,}3; \omega = 1$:

а) решение периода 1: $\delta = 0{,}15$;
б) форма временных колебаний первой компоненты решения «а»;
в) спектр первой компоненты решения «а»;
г) субгармоника периода 3: $\delta = 0{,}22$;
д) форма временных колебаний первой компоненты решения «г»;
е) спектр первой компоненты решения «г».

В произвольной неавтономной системе обычно значение T' кратно периоду T внешнего возмущающего воздействия с коэффициентом кратности k = 1,2,... . Если $k \geq 2$, такое решение называется субгармоническим k – го порядка. Например, для асимптотически устойчивой линейной системы синусоидальное установившееся состояние представляет собой решение 1-периодное, а субгармонические не возникают. На рис. 1 показаны основное (фундаментальное) и субгармоническое решения и соответствующие им Фурье-преобразования для уравнения Дуффинга.

$$\frac{dx}{dt} = y$$
$$\frac{dy}{dt} = x - x^3 - \delta y + \gamma \cdot \cos(\omega \cdot t). \qquad (6)$$

Изолированное периодическое решение $F_i(x)$ для автономной системы называется предельным циклом. Периодическое решение называется изолированным, если ему принадлежит некоторая окрестность, которая не содержит других периодических решений.

Предельный цикл представляет собой самоподдерживающееся колебание и не может возникать в линейных системах.

Классический пример предельного цикла обнаруживается при исследовании решений уравнения Ван дер Поля

$$\frac{dx}{dt} = y$$
$$\frac{dy}{dt} = \mu(1 - x^2)\, y - x. \qquad (7)$$

Существование предельного цикла Ван дер Поля можно объяснить, если представить систему дифференциальных уравнений (7) в виде скалярного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (x^2 - 1)\cdot\frac{dx}{dt} + x = 0. \qquad (8)$$

Демпфирующий член этого уравнения содержит коэффициент $(x^2 - 1)$, который имеет отрицательное значение при $|x| < 1$, что означает получение решения с нарастающей амплитудой, и положительное значение при $|x| > 1$, что соответствует решению с убывающей амплитудой. Поскольку траектории, исходящие из области вблизи начала координат, «раскручиваются», траектории, исходящие из внешних областей, «сжимаются», а единственное положение равновесия располагается в нуле, должен существовать предельный цикл, охватывающий начало координат. В противном случае траектории должны были бы пересекаться, так как они располагаются на одной и той же плоскости.

Предельное множество, соответствующее предельному циклу, представляет собой замкнутую кривую, описываемую решением $F_i(x)$ за один период.

4.3. Квазипериодические решения

Квазипериодическим называется такое решение, которое может быть представлено в виде суммы периодических функций

$$x(t) = \sum_i h_i(t), \qquad (9)$$

где h_i имеет минимальный период T_i и частоту $f_i = \frac{1}{T_i}$. При этом существует некоторое конечное множество базисных частот $\{f_1, \ldots, f_p\}$, обладающее следующими двумя свойствами:

1) элементы этого множества являются линейно независимыми;

это множество образует конечный полный базис для частоты f_i, т.е.

$$f_i = k_1 \cdot f_1 + \ldots + k_p \cdot f_p, \qquad (10)$$

где $k_1, \ldots, k_p$ – набор целых чисел.

Другими словами, квазипериодическое колебание представляет собой сумму периодических колебаний, частота каждого из которых образуется путем сложения и вычитания базисных частот, выбираемых из некоторого множества. Отметим, что указанные базисные частоты определяются неоднозначно, но их число P задано.

Квазипериодическое решение с P базисными частотами называется P-периодным.

1) амплитудная модуляция

$$x(t) = A(t)\cdot\sin(2\pi \cdot f_c \cdot t), \qquad (11)$$

где A(t) – периодическая функция времени.

Известно, что спектр колебания x(t) содержит дискретные составляющие на частотах $f_c + k \cdot f_m$, где f_m – фундаментальная частота сигнала A(t), а k принимают значение из некоторого множества целых чисел. Если значения частот f_c и f_m несоизмеримы, то функция x(t) является квазипериодической при P = 2 и базисными частотами $\{f_c, f_m\}$;

2) фазовая модуляция

$$x(t) = A(t)\cdot\sin(2\pi \cdot f_c \cdot t + m(t)) \qquad (12)$$

Если сигнал m(t) представляет собой периодическую функцию с фундаментальной частотой f_m и частоты f_c и f_m не соизмеримы между собой, то спектр колебания x(t) содержит такие же составляющие, как и спектр амплитудно-модулированного колебания.

Эти примеры нам нужны для демонстрации того факта, что квазипериодические колебания могут быть образованы вследствие нелинейного взаимодействия двух (или большего числа) периодических функций.

Вновь обратимся к уравнению Ван дер Поля (7) и рассмотрим на его примере процесс возникновения квазипериодических решений в НЭЭС. Для этого добавим

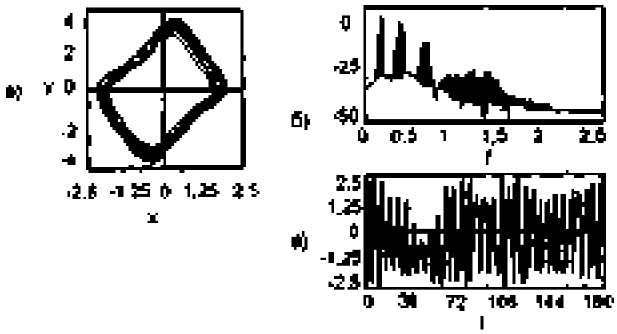

Рис. 2. Квазипериодическое поведение решения неавтономного уравнения Ван дер Поля с $A = 0,4$; $T = \frac{2\pi}{1,1}$:
а) траектория – решение;
б) форма временных колебаний первой компоненты решения «x»;
в) спектр первой компоненты решения «x».

к правой части второго уравнения этой системы синусоидальный возмущающий член.

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = y \\
&\frac{dy}{dt} = (1 - x^2) \cdot y - x + B \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)
\end{aligned}
\qquad (13)
$$

Решение такой системы дифференциальных уравнений с внешним воздействием может быть синхронизировано с колебанием, период которого кратен периоду внешнего воздействия T, что приводит к соответствующим субгармоническим колебаниям. На рис. 2 показаны форма колебаний во времени и спектр двухпериодной траектории уравнения ван дер Поля с внешним воздействием. Эта траектория располагается в области пространства состояний, похожей на кольцо, равномерно распределена в указанной области и не выходит за ее внутренние и внешние границы. Анализ фазных колебаний во времени указывает на явное наличие в рассматриваемом колебании амплитудной модуляции. Спектр колебаний образуется из спектра системы дифференциальных уравнений без внешнего воздействия с близко примыкающими друг к другу боковыми полосами, что обусловлено наличием относительно медленной модуляции.

Двухпериодная траектория располагается на диффеоморфном образе двухмерного тора $S^1 \times S^1$, причем каждая окружность S^1 соответствует одной из базисных частот. Поскольку такая траектория представляет собой кривую, а двухмерный тор является поверхностью, на указанной траектории лежат не все точки тора. Однако можно полагать, что такая траектория многократно проходит сколь угодно близко к каждой точке тора, вследствие чего тор представляет собой предельное множество квазипериодической траектории.

5. Устойчивость предельных множеств

5.1. Положение равновесия

Рассмотрим положение равновесия x_p для системы дифференциальных уравнений (1). Известно, что локальное поведение векторного потока, задаваемого таким уравнением, в окрестности точки x_p можно определить путем линеаризации функции f в точке x_p. В частности, изменения возмущений вектора состояния вблизи положения равновесия может быть задано с помощью линейного векторного поля

$$\frac{d\delta(x)}{dt} = D \cdot f(x_p) \cdot \delta(x). \qquad (14)$$

В линейном приближении соответствующая траектория с начальным условием $x_p + \delta x_0$ задается выражением

$$F_t(x_p + \delta \cdot x_0) = x_p + c_1 \cdot \eta_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + \ldots + c_n \cdot \eta_n \cdot e^{\lambda_n t}, \qquad (15)$$

где $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ и $\{\eta_i\}_{i=1}^{n}$ – собственное значение и собственные векторы фундаментальной матрицы, $\{c_i\}_{i=1}^{n}$ – некоторые скалярные постоянные, выбор которых определяется требованием удовлетворения начального условия. Действительная часть числа λ_i обуславливает скорость растяжения (если $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$) или сжатия (если $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$) в окрестности положения равновесия вдоль направления, задаваемого собственным вектором η_i.

Если $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ для всех собственных значений λ_i, то для любых достаточно малых возмущений вектор δx стремится по модулю к нулю при $t \to \infty$, а точка положения равновесия x_p называется асимптотически устойчивой. Если для некоторых собственных значений выполняется условие $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$, то точка положения равновесия x_p не является устойчивой и будет или вполне неустойчивой (в этом случае $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$ для всех собственных значений λ_i), или просто неустойчивой (в этом случае для некоторых λ_i $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$, а для других $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$). Введение двух понятий неустойчивости является полезным, поскольку при обращении времени в описании потока вполне неустойчивое положение равновесия становится асимптотически устойчивым, а просто неустойчивое положение по прежнему остается просто неустойчивым. Его также называют седловой точкой. Положения равновесия, для которых все собственные значения имеют ненулевую вещественную часть, называются гиперболическими. Гиперболические положения равновесия обладают важным свойством структурной устойчивости. Положения равновесия, обладающие этим свойством, не исчезают при малых возмущениях векторного поля, причем новое положение равновесия, получаемое в результате такого возмущения, имеет прежний тип устойчивости. Обычно негиперболические положения равновесия не обладают свойством структурной устойчивости, а поэтому не могут наблюдаться при проведении экспериментальных исследований или при моделировании.

5.2. Периодические решения

Устойчивость любого периодического решения определяется его характеристическими множителями, называемыми также множителями Флоке. Они представляют собой обобщение собственных значений, соответствующих положению равновесия.

Как известно, периодическому решению системы дифференциальных уравнений соответствует некоторая неподвижная точка отображения последования Пуанкаре R. Определения отображения Пуанкаре различаются для автономных и неавтономных НЭЭС. Для неавтономных НЭЭС отображение R определяется равенством $R(x) = F_t(x, t_0)$. Отображение F_t представляет собой диффеоморфизм, и поэтому отображение R является взаимно однозначным и дифференцируемым.

Отображение R можно рассматривать с двух позиций:

а) R(x) указывает, где под действием потока окажется точка x по истечении T секунд;

б) орбита $\{R_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ представляет собой выборку одной траектории каждые T секунд. Это означает, что

$$R_k(x_0) = F_{kT}(x_0, t_0) \qquad (16)$$

Выполнение таких операций аналогично действию стробоскопа, вспыхивающего с периодом T.

Для автономных систем дифференциальных уравнений отображение Пуанкаре R определяется только в некоторой окрестности точки предельного цикла Г, при этом не гарантируется изменение положения точки x. отображение R является диффеоморфизмом.

По аналогии с положением равновесия устойчивость неподвижной точки x^* отображения R можно определить, если произвести линеаризацию отображения R в этой точке. Локальное поведение отображения R вблизи точки x^* описывается линейной системой с дискретным временем вида

$$\delta x_{k+1} = R(x^*) \cdot \delta x_k . \qquad (17)$$

Орбита отображения R для начального условия $x_0 + \delta x_0$ в линейном приближении определяется уравнением

$$x_k = x^* + c_1 \cdot \eta_1 \cdot m_1^k + \ldots + c_p \cdot \eta_p \cdot m_p^k , \qquad (18)$$

где $\{m_i\}_{i=1}^{p}$, $\{\eta_i\}_{i=1}^{p}$ – собственные значения и собственные векторы матрицы $R(x^*)$; $\{c_i\}_{i=1}^{p}$ – скалярные константы, определяемые начальными условиями; P = n для неавтономных и P = n - 1 для автономных систем дифференциальных уравнений.

Собственные значения $\{m_i\}_{i=1}^{p}$ представляют собой характеристические множители для рассматриваемой неподвижной точки и определяют степень сжатия (при $|m_i| < 1$) и растяжения (при $|m_i| > 1$) соответствующей траектории вблизи точки x^* в направлении, определяемом вектором η_i для одной итерации отображения R.

Такие характеристические множители определяют устойчивость периодического решения. Периодическое решение является асимптотически устойчивым, если все собственные значения m_i располагаются строго внутри единичной окружности. Периодическое решение является вполне неустойчивым, если неравенство $|m_i| > 1$ выполняется для всех m_i; периодическое решение просто неустойчиво, если одни значения m_i располагаются внутри единичной окружности, другие вне ее. По аналогии с положениями равновесия гиперболическими называются периодические решения, которые не имеют характеристических множителей на единичной окружности. Гиперболические периодические решения являются структурно устойчивыми. В тех случаях, когда хотя бы один характеристический множитель располагается на единичной окружности, устойчивость соответствующего ему периодического решения не может быть определена с использованием характеристических множителей без привлечения других средств.

Характеристические множители в случае неавтономных систем определяются через матрицу $R(x^*)$, которая представляет собой якобиан n – вектора $F_t(x_0, t_0)$ по n – мерному вектору x_0, вычисляемой в точке $x_0 = x^*$, т.е. матрица $R(x^*)$ представляет собой переходную матрицу состояний системы дифференциальных уравнений

$$\delta x(t) = F_t(x_0, t_0) \cdot \delta x_0 . \qquad (19)$$

Таким образом, матрица – функция $F_t(x_0, t_0)$ определяет эволюцию малых возмущений во времени. В тех случаях, когда время t фиксировано, а вектор δx_0 достаточно мал по модулю, в линейном приближении можно записать

$$F_t(x_0 + \delta x_0, t) = F_t(x_0, t_0) + F_t(x_0, t_0) \cdot \delta x_0 . \qquad (20)$$

Такая интерпретация имеет смысл, поскольку функция F была определена как производная (якобиан) от функции $F_t(x_0, t_0)$ по начальному значению.

Характеристические множители в случае автономных систем определяются с помощью уравнения в вариациях

$$\frac{dF}{dt} = f(F_t(x_0)) \cdot F, \quad F_0 = I, \qquad (21)$$

а решением этого уравнения является матрица $F_t(x_0)$. Собственные значения матрицы $F_t(x_0)$ совпадают с (n-1) характеристическими множителями, а еще одно собственное значение всегда равно единице.

Итак, можно отметить, что характеристические множители отражают степень сжатия или растяжения траектории за один период в области, располагаемой вблизи какого-либо периодического решения. При этом n характеристических множителей периодического решения неавтономной системы представляют собой собственные значения матрицы $F_t(x^*, t_0)$. В случае автономной системы (n-1) собственные значения матрицы $F_t(x^*)$ представляют собой характеристические множители предельного цикла.

5.3. Показатели Ляпунова

Дальнейшим обобщением собственных значений соответствующей матрицы, вычисляемой для положения равновесия, и характеристических множителей являются показатели Ляпунова. Эти показатели используются для определения устойчивости любых типов поведения НЭЭС в установившемся состоянии, включая те, которым отвечают квазипериодические и хаотические решения.

Показатели Ляпунова определяются формулой

$$\lambda_i = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \cdot \ln|m_i(t)|, \ i = 1, \ldots, n, \qquad (22)$$

если указанный предел существует.

Отсюда следует, что $m_i(t) = e^{\lambda_i t}$ и выполняется равенство

$$\lambda_i = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \cdot \ln\left|e^{\lambda_i t}\right| = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \cdot \mathrm{Re}[\lambda_i] \cdot t = \mathrm{Re}[\lambda_i] . \qquad (23)$$

Следовательно, показатели Ляпунова равны действительным частям собственных значений, которые вычисляются для положения равновесия, и соответствуют скорости сжатия (при $\lambda_i < 0$) или растяжения (при $\lambda_i > 0$) траекторий вблизи равновесия.

Предположим теперь, что $x_0 \neq x_p$, но $F_t(x_0) \to x_p$ при $t \to \infty$, т.е. x_0 располагается в бассейне притяжения положения равновесия x_p. Показатели Ляпунова для точек x_0 и x_p одинаковы, поскольку, согласно определению, они вычисляются путем перехода к пределу при $t \to \infty$ и переходные процессы, характеризуемые конечной продолжительностью, можно не принимать во внимание. Вообще все точки, располагаемые в бассейне притяжения какого-либо аттрактора, имеют те же показатели Ляпунова, что и сам аттрактор.

Путем аналогичных рассуждений можно прийти к выводу, что в случае автономных систем показатели Ляпунова для какого-либо идеального цикла связаны с (n-1) характеристическими множителями следующим простым соотношением

$$\lambda_i = \frac{1}{T} \cdot \ln|m_i|, \ i = 1, \ldots, n, \qquad (24)$$

а один из показателей Ляпунова всегда равен нулю, он соответствует собственному значению матрицы $F_t(x^*)$, которое равно единице.

Показатели Ляпунова являются удобным средством классификации поведения решений системы дифференциальных уравнений в установившемся режиме. Для произвольного аттрактора степень сжатия должна превосходить степень расширения, так что должно выполняться неравенство $\sum_i \lambda_i < 0$.

Далее классификация аттракторов производится следующим образом. В случае устойчивых положений равновесия неравенство $\lambda_i < 0$ выполняется для всех i. В случае устойчивого предельного цикла $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_i < 0$ для $i = 2,\ldots,n$. В случае устойчивого тора $\lambda_1, \lambda_2 = 0$ и $\lambda_i < 0$ для $i = 3,\ldots,n$.

Характерной особенностью хаотического поведения является высокая чувствительность к вариациям начальных значений. Такая высокая чувствительность возникает в растягивающем потоке. Таким образом, странный аттрактор от аттракторов других типов отличает наличие не менее одного положительного показателя Ляпунова. В трехмерном случае, с учетом того, что $\sum_i \lambda_i < 0$, странный аттрактор может существовать только при показателях Ляпунова, которые условно могут быть записаны в виде (+,0,-), т.е. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 < 0$. В системах четвертого порядка воз-можны следующие сочетания: (+,0,-,-) $\rightarrow \lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 < 0, \lambda_4 < 0$ и (+,+,0,-) $\rightarrow \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 < 0$.

Литература

1. Кравцов Ю.А. Случайность, детерминированность, предсказуемость // УФН. – 1989. – № 5. – С. 92-102.
2. Красовский А.А. Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем. – М.: Наука, 1974. – 230 с.
3. Мун Ф. Введение в хаотическую динамику. – М.: Наука, 1990. – 140 с.
4. Пригожин И. От существующего к возникающему. – М.: Наука, 1985. – 325 с.
5. Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. – М.: Прогресс, 1986. – 421 с.
6. Федоров В.К. Функциональная устойчивость и чувствительность электроэнергетических систем // Изв. СО АН СССР. Техн. науки. – 1984. – 1. – № 4. – С. 120-124.
7. Федоров В.К. Вторая вариация энтропии в статистическом анализе функциональной устойчивости электроэнергетических систем // Изв. вузов СССР. Энергетика. – 1989. – № 2. – С. 19-23.
8. Федоров В.К. Случайность и детерминированность в теории функциональной устойчивости электроэнергетических систем // Изв. вузов СССР. Энергетика. – 1990. – № 12. – С. 8-14.
9. Федоров В.К. Формирование устойчивых структур плотности вероятностей отклонений частоты в электроэнергетических системах // Изв. СО АН СССР. Техн. науки. – 1988. – вып.4. – № 15. – С. 39-46.
10. Федоров В.К. Инвариантность оптимальных решений при анализе угрожающих аварией режимов энергетических систем // Изв. вузов СССР. Энергетика. – 1985. – № 3. – С. 17-21.
11. Федоров В.К. Статистический анализ функциональной устойчивости изолированных электроэнергосистем // Изв. вузов СССР. – Энергетика. – 1987. – № 4. – С. 8-12.

ФЕДОРОВ Владимир Кузьмич, доктор технических наук, профессор кафедры электроснабжения промышленных предприятий.

ГОРЮНОВ Владимир Николаевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой электроснабжения промышленных предприятий.

СУРИКОВ Валерий Иванович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой физики.

РЫСЕВ Павел Валерьевич, студент 5-го курса электротехнического факультета.

Книжная полка

Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле: Учеб. для техн. вузов по направлениям "Электротехника", "Электротехнологии", "Электромеханика", "Электроэнергетика" и "Приборостроение" / Л. А. Бессонов. - 9-е изд. - М.: Гардарики, 2001. - 316 с. + Прил. - (Univers). - Библиогр.

Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: Учеб. / Л. А. Бессонов. - 10-е изд. - М.: Гардарики, 2002. - 637, [1] с.: ил., табл. + Прил.. - (Univers).