

УДК 536.46:662.612

М.А. Утемесов, Р.М. Утемесов

Влияние прерывателя потока на течение вязкой несжимаемой среды в цилиндрической трубе

Влияние различных возмущающих факторов на процессы горения и воспламенения пылеугольного факела привлекали внимание многих исследователей. Одним из таких факторов могут быть возмущения, вносимые в поток пылевоздушной смеси механическим пульсатором.

Рассмотрим влияние пульсатора на распространение несжимаемой среды (жидкости или газа) в цилиндрической трубе. Прототипом такого устройства может быть пульсатор, конструкция которого описана в авторском свидетельстве 857642 [1]. Схема пульсатора приведена на рисунке 1.

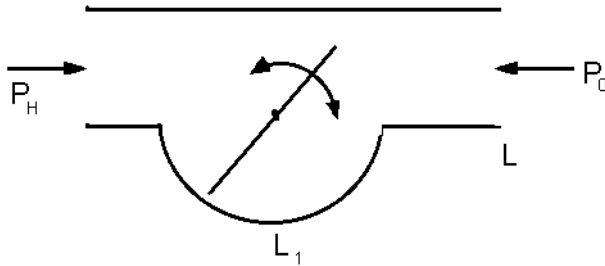


Рис.1. Распределение давления в трубе:
 P_H – давление, создаваемое внешним устройством; P_0 – атмосферное давление

Пусть пульсатор, общая длина которого равна L , находится на расстоянии L_1 от входа в трубу. Наиболее существенным фактором его влияния будет перераспределение давления в трубе. Когда пульсатор открыт, давление, действующее на среду в точке L_1 , будет максимальным:

$$P(L_1) = P_H + \frac{P_0 - P_H}{L} L, \quad (1)$$

где P_H – давление на входе в трубу, создаваемое внешним устройством; P_0 – давление на выходе.

При закрытом пульсаторе давление в точке L_1 будет минимальным – $P(L_1)_{min}$. Это давление зависит от степени закрытия пульсатором поперечного сечения трубы. При периодическом действии пульсатора давление в точке L_1 можно представить в виде

$$P(L_1) = a \cos \omega t + b, \quad (2)$$

где ω – частота перекрытий пульсатором поперечного сечения трубы (для вращающегося шибера $\omega = 2 \cdot \omega_1$, ω_1 – частота вращения); a и b равны соответственно

$$a = \frac{P(L_1)_{max} - P(L_1)_{min}}{2}; \quad (3a)$$

$$b = \frac{P(L_1)_{min} + P(L_1)_{max}}{2}. \quad (3b)$$

так как из выражения (2) видно, что

$$a + b = P(L_1)_{max};$$

$$b - a = P(L_1)_{min}.$$

Рассмотрим стабилизированное течение среды, т.е. течение за начальным участком входа в трубу. В соответствии с этим будем считать траектории всех частиц прямолинейно параллельными. В этом случае уравнение движения вязкой несжимаемой среды в цилиндрической системе координат будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (4)$$

где u – скорость движения; ν – кинематическая вязкость; ρ – плотность жидкости; t – временная координата; ось x направлена по оси трубы, ось r – по радиусу. Используя формулы (1) и (2), запишем перепад давления в следующем виде:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P(L_1) - P_0}{\rho(L - L_1)} = \frac{a \cos \omega t + b - P_0}{\rho(L - L_1)} = A + B \cos \omega t, \quad (5)$$

где постоянные A и B выражаются через известные в точках трубы:

$$A = \frac{b - P_0}{\rho(L - L_1)} = \frac{P(L_1)_{max} + P(L_1)_{min} - 2P_0}{2\rho(L - L_1)};$$

$$B = \frac{a}{\rho(L - L_1)} = \frac{P(L_1)_{max} - P(L_1)_{min}}{2\rho(L - L_1)}. \quad (6)$$

В этом случае уравнение движения среды примет следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) + A + B \cos \omega t, \quad (7)$$

с граничными условиями:

$$u(r, t = 0) = 0;$$

$$u(r = r_0, t) = 0, \quad (8)$$

где r_0 – радиус трубы.

Общую задачу (7) разобьем на две отдельные, из которых первая будет учитывать действие по-

стоянной составляющей перепада давления, а вторая – зависимость перепада от времени. Разбивая соответственно скорость на две составляющие: $u = u_1 + u_2$, получим для первой составляющей:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = v \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) + A \quad (9)$$

и для второй:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = v \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial r} \right) + B \cos \omega t. \quad (10)$$

Решение уравнения (9), приведенное в работе Д.Н. Попова [2], имеет вид:

$$u_1(r, t) = \frac{Ar_0^2}{4v} \left[1 - \frac{r^2}{r_0^2} - 8 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_0(r/r_0 \lambda_k)}{\lambda_k^3 I_1(\lambda_k)} \cdot \exp \left(- \frac{v \lambda_k^2}{r_0^2} t \right) \right], \quad (11)$$

где r – радиус трубы; I_0, I_1 – функции Бесселя нулевого и первого порядка; λ_k – нули функции

Бесселя: $\lambda_k = ir_0 \sqrt{\frac{s_k}{v}}$.

Для решения уравнения (10) в соответствии с методикой, приведенной в [3], применим преобразование Лапласа, при этом используем выражение

$$\cos \omega t = \frac{s}{\omega^2 + s^2}$$

Уравнение для образа скорости запишется так:

$$\frac{\partial^2 u_2^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_2^*}{\partial r} - \frac{s}{v} u_2^* = - \frac{B}{v} \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (12)$$

Полученное уравнение есть уравнение Бесселя, решение которого имеет следующий вид:

$$u_2^*(r, s) = C_1 I_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{v}} \right) + C_2 K_0 \left(r \sqrt{\frac{s}{v}} \right) + \frac{B}{\omega^2 + s^2}. \quad (13)$$

Из соображения ограниченности решения по оси трубы полагаем $C_2 = 0$ и, применив к уравнению (13) обратное преобразование Лапласа, получим:

$$u_2(r, t) = \frac{iB}{2\omega} \left\{ \frac{I_0 \left(r \sqrt{i \frac{\omega}{v}} \right) - I_0 \left(r_0 \sqrt{i \frac{\omega}{v}} \right)}{I_0 \left(r_0 \sqrt{i \frac{\omega}{v}} \right)} e^{i\omega t} - \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4ir_0^2 \omega v \lambda_k}{v^2 \lambda_k^4 + \omega^2 r_0^4} \cdot \frac{I_0 \left(\frac{r}{r_0} \lambda_k \right)}{I_1(\lambda_k)} e^{-\frac{v \lambda_k^2}{r_0^2} \omega t} \right\} + \quad (14)$$

Замечая сопряженность первого и второго слагаемых в (14) и вводя безразмерный параметр

$$x = r_0 \sqrt{\frac{\omega}{v}}, \text{ перепишем: } u_2(r, t) = \frac{B}{\omega}$$

$$\left\{ \operatorname{Im} \left[\frac{I_0(x\sqrt{-i}) - I_0 \left(x \frac{r}{r_0} \sqrt{-i} \right)}{I_0(x\sqrt{-i})} e^{-i\omega t} \right] - 2x^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\lambda_k^4 + x^4} \cdot \frac{I_0 \left(\frac{r}{r_0} \lambda_k \right)}{I_1(\lambda_k)} e^{-\frac{1}{x^2} \lambda_k^2 \omega t} \right\} \quad (15)$$

При установившемся движении (время $t \gg r_0^2/v$) вторым слагаемым можно пренебречь. Полная скорость в трубе есть сумма постоянной и пульсирующей составляющих:

$$u(r, t) = \frac{Ar_0^2}{4v} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) + \frac{B}{\omega} \operatorname{Im}$$

$$\left[\frac{I_0(x\sqrt{-i}) - I_0 \left(x \frac{r}{r_0} \sqrt{-i} \right)}{I_0(x\sqrt{-i})} e^{-i\omega t} \right] \quad (16)$$

и, как видно из этого выражения, второй член зависит от частоты пульсаций.

Таким образом, при гармонических пульсациях скорость потока состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое не зависит от времени и частоты; второе изменяется с ростом частоты.

Для дальнейшего анализа необходимо получить значение объемного расхода. Объемный расход жидкости по определению равен

$$W(t) = 2\pi \int_0^{r_0} ru(r, t) dr, \quad (17)$$

где r_0 – радиус трубы. Постоянная составляющая расхода определяется формулой Пуазейля [2]:

$$Q_1(t) = \frac{\pi A r_0^4}{8v}$$

Для определения расхода, обусловленного пульсациями давления с частотой ω , подставим (15) (без последнего члена) в выражение (17):

$$Q_2(t) = 2\pi \frac{B}{\omega} \left\{ \text{Im} \left[e^{-i\omega t} \int_0^{r_0} \frac{I_0(x\sqrt{-i}) - I_0(x\frac{r}{r_0}\sqrt{-i})}{I_0(x\sqrt{-i})} r dr \right] \right\}$$

$$= 2\pi \frac{r_0^2 B}{\omega} \left\{ \text{Im} \left[e^{-i\omega t} \frac{\frac{1}{2} I_0(x\sqrt{-i}) - \frac{1}{x} \sqrt{i} I_1(x\sqrt{-i})}{I_0(x\sqrt{-i})} \right] \right\}. \quad (18)$$

Расчет по формуле (18) во всем диапазоне параметра x затруднителен. Он достаточно прост при малых значениях x и в этом случае может быть получен на основе результатов, приведенных в [2, 3]. Однако оценки показывают, что случай $x \ll 1$ возможен только для очень вязких жидкостей и малых диаметров или сверхнизких частот. Для систем подачи угольной пыли параметр x на два порядка больше единицы. Рассмотрим случай $x \gg 1$. При этом для функций Бесселя справедливо следующее асимптотическое представление:

$$I_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (19)$$

Выражение под знаком мнимой части в формуле (18) преобразуется следующим образом:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{x} \sqrt{i} \frac{I_1(x\sqrt{-i})}{I_0(x\sqrt{-i})} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} \sqrt{i} \frac{\cos(z - 3/4\pi)}{\cos(z - \pi/4)} =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{x} \sqrt{i} \frac{\sin z - \cos z}{\sin z + \cos z}, \quad (20)$$

где $z = x\sqrt{-i} = x \frac{1-i}{\sqrt{2}}$.

Воспользовавшись выражениями для мнимой и действительной частей оси геометрических функций комплексного переменного $z = x + iy$, получим

$$\frac{\sin z - \cos z}{\sin z + \cos z} = \frac{\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - i\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - i\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - i\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - i\frac{x}{\sqrt{2}}\right)} =$$

$$\frac{\text{ch} \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot (1 - \sin\sqrt{2}x) - i \cdot \text{sh} \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot \cos\sqrt{2}x}{\text{ch} \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot \cos\sqrt{2}x - i \cdot \text{sh} \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot (1 - \sin\sqrt{2}x)} =$$

$$= -\frac{\text{cth} \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot (1 - \sin\sqrt{2}x) - i \cos\sqrt{2}x}{\text{cth} \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot \cos\sqrt{2}x - i (1 - \sin\sqrt{2}x)} \approx$$

$$= -\frac{1 - \sin\sqrt{2}x - i \cos\sqrt{2}x}{\cos\sqrt{2}x - i (1 - \sin\sqrt{2}x)} =$$

$$= -(\cos\sqrt{2}x - i \sin\sqrt{2}x). \quad (21)$$

В выражении (21) учтено, что при больших значениях аргумента котангенс гиперболический стремится к 1.

Выражение (18) в этом приближении преобразуется следующим образом:

$$Q_2 = 2\pi \frac{r_0^2 B}{\omega};$$

$$\left\{ \text{Im} \left[e^{-i\omega t} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}x} (1+i) \cdot (\cos\sqrt{2}x - i \sin\sqrt{2}x) \right) \right] \right\} =$$

$$= \pi \frac{r_0^2 B}{\omega};$$

$$\left\{ \text{Im} \left[\cos\omega t \left(1 + \frac{\cos\sqrt{2}x + \sin\sqrt{2}x}{\frac{x}{\sqrt{2}}} \right) + \sin\omega t \frac{\cos\sqrt{2}x - \sin\sqrt{2}x}{\frac{x}{\sqrt{2}}} - \right. \right.$$

$$\left. - i \sin\omega t \left(1 + \frac{\cos\sqrt{2}x + \sin\sqrt{2}x}{\frac{x}{\sqrt{2}}} \right) + i \cos\omega t \frac{\cos\sqrt{2}x - \sin\sqrt{2}x}{\frac{x}{\sqrt{2}}} \right] \right\} =$$

$$= \pi \frac{r_0^2 B}{\omega};$$

$$\left[-\sin\omega t \left(1 + \frac{\cos\sqrt{2}x + \sin\sqrt{2}x}{\frac{x}{\sqrt{2}}} \right) + \cos\omega t \frac{\cos\sqrt{2}x - \sin\sqrt{2}x}{\frac{x}{\sqrt{2}}} \right]. \quad (22)$$

При больших значениях параметра x объемный расход равен:

$$Q(t) = \pi r_0^2 \left(\frac{r_0^2 A}{8v} - \frac{B}{\omega} \sin\omega t \right) \quad (23)$$

Как видно из этого выражения, пульсации расхода не совпадают по фазе с пульсациями давления. Для двухфазного воздушно-пылевого потока это означает, что вследствие инерционности частиц пыли следует ожидать периодического изменения концентрации пыли

в потоке и образования пылевых «пакетов», условия зажигания в которых сильно отличаются от условий в однородном потоке. Данный вывод подтверждается экспериментальными результатами и результатами численных расчетов процесса горения пылеугольного факела.

Второй вывод, который можно сделать из полученного результата (23), – при увеличении частоты колебаний воздействие пульсатора на поток ослабевает, а при больших час-

тотах это воздействие стремится к нулю. Этот вывод подтверждается экспериментальными результатами: при частотах более 50 Гц пульсации не оказывают влияния на процесс зажигания.

Таким образом, существует достаточно узкий диапазон частоты вращения пульсатора, при котором условия зажигания пылеугольного факела оптимальны. Этот диапазон будет зависеть от фракционного состава пыли и содержания летучих составляющих в сжигаемом угле.

Литература

1. Устройство для сжигания топлива. А.С. 857642 СССР, МКЛЗ F23 C11/04./А.А. Мальцев, В.И. Волков, М.А. Утемесов и др. Опубл. 23.08.81. Бюл. №31, приоритет от 28.05.79.
2. Попов Д.Н. Нестационарные гидромеханические процессы. М., 1982.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., 1974.