МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

С.Н. Стребуляев
Д.В. Воробьев

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией института ИТММ
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»,
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
09.03.03 «Прикладная информатика»,
09.03.04 «Программная инженерия»

Нижний Новгород
2020

УДК 519. (075)
ББК В19
С-84

С-84 Стребуляев С.Н., Воробьев Д.В.,ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2020. – 38 с.

Рецензент: доктор ф.-м., наук, профессор **Г.В. Осипов**

Методические указания предназначены для студентов и специалистов, занимающихся математическим моделированием и исследованием решений и устойчивости динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами и отклонениями аргумента.
Изложены теоретические положения Флоке-Хана об особенностях получения матрицы монодромии и характеристического уравнения для указанного класса систем. Дана оценка устойчивости на основе анализа вспомогательного годографа, определяющего расположение мультипликаторов на комплексной плоскости.
Описаны алгоритм и программное обеспечение, выполненное с использованием современных средств – языков Go и Python, позволяющие, в автоматическом режиме строить границы областей устойчивости в плоскостях различных параметров рассматриваемой системы и анализировать решение.
В учебно-методическом пособии, в отличие от предыдущего издания, приведен более обширный перечень примеров исследования параметрического возбуждения колебаний в конкретных динамических системах, в том числе и системах с запаздыванием.

УДК 519. (075)
ББК В19

Содержание

Введение

Периодический характер работы большинства машин предопределяет периодичность нагружения и деформации, как отдельных звеньев, так и тех конструкций, которые служат опорами или фундаментами. Практически во всех случаях упругие колебания сопутствуют работе различных машин.

В ряде случаев колебания, возникают и при отсутствии периодического возмущения. При этом параметры механической системы не остаются неизменными, а являются некоторыми заданными функциями времени.

Если нарушить состояние равновесия такой системы, то будут совершаться своеобразные колебания: с одной стороны, их нельзя назвать свободными, поскольку система испытывает определённое внешнее воздействие в виде изменения жёсткости или другого параметра, а с другой стороны, они не являются вынужденными, так как внешнее воздействие не проявляется в виде заданной силы. Эти колебания называются параметрическими и в зависимости от свойств системы и характера изменения её параметров могут иметь ограниченные или возрастающие амплитуды; последний, очевидно, опасный случай, называется параметрическим резонансом.

Трудно назвать такую область техники, в которой не была бы актуальной проблема изучения упругих колебаний. Большое внимание исследователей привлечено к вопросам колебаний конструкций самых различных назначений: роторов турбин, валов двигателей внутреннего сгорания, турбинных лопаток, воздушных и гребных винтов, автомобилей и железнодорожных вагонов, кораблей, инженерных сооружений, перекрытий промышленных зданий, деталей, обрабатываемых на металлорежущих станках и т.п. В ряде случаев колебания мешают нормальной эксплуатации или даже непосредственно угрожают прочности, постепенно подготовляя усталостное разрушение; в таких случаях теория может указать пути для уменьшения вредных колебаний. Наряду с этим она позволяет обосновать и оптимизировать технологические процессы, в которых колебания используются целенаправленно.

Можно указать, по крайней мере, следующие четыре категории различных по своей природе колебательных процессов:

свободные колебания, т. е. колебания, совершаемые механической системой, лишённой притока энергии извне, если система выведена из состояния равновесия и затем предоставлена самой себе;

- вынужденные колебания, которые возникают вследствие действия на механическую систему внешних переменных сил (возмущающих сил);
- параметрические колебания, вызываемые периодическими изменениями параметров системы (например, её жёсткости);

- автоколебания – колебательные процессы, поддерживаемые постоянными источниками энергии не колебательного характера.

Параметрические колебания в динамических системах описываются дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами. Такие колебания можно наблюдать в таких процессах, как обработка металлов резанием, в процессе долгосрочного прогнозирования в экономике, биофизических процессах и других. Исследование устойчивости таких динамических систем представляет достаточно сложную в теоретическом плане задачу. Параметрические колебания вызываются и поддерживаются изменением во времени параметров системы. Такими параметрами могут быть периодическое изменение жесткости, периодическое изменение параметрических нагрузок, периодическое изменение инерции системы. Так, например, при вращении вала, сечение которого имеет неодинаковые главные жесткости при изгибе, могут возникнуть параметрические колебания. Причиной их возникновения является периодическое изменение изгибной жесткости вращающегося вала относительно неподвижных осей координат. А, например, в процессе фрезерования причиной неустойчивости может стать некоторая периодическая сила, возникающая при обработке детали с помощью фрезы, имеющей несколько зубьев.

Другие достаточно распространенные динамические системы – системы с отклонением аргументов, запаздывающего типа. В биологии и физиологии известны динамические системы с запаздывающим аргументом, описывающие изменение численности популяций, регенерацию белых кровяных клеток, нелинейную динамику воздухообмена в легких Подобные бесконечномерные динамические системы чаще всего представляются дифференциальными или разностными уравнениями с запаздыванием, каждое состояние которых задается непрерывной функцией на интервале времени равном длительности запаздывания. При численном расчете и представлении сложных нелинейных процессов естественно возникает проблема конечномерного описания динамических систем с запаздыванием.

Наличие запаздывания в динамических системах является часто дополнительной причиной возникновения неустойчивых режимов работы. Так одной из причин неустойчивости горения в жидкостных ракетных двигателях является наличие времени запаздывания, необходимого для превращения топливной смеси в продукты сгорания.

Параметрические колебания в динамических системах с переменными коэффициентами и запаздыванием описываются дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами и отклоняющимся аргументом. Исследование их устойчивости представляет собой достаточно сложную в теоретическом плане задачу.

Излагаемый материал можно условно разделить на три взаимосвязанные части.

В первой части изложены теоретические результаты Флоке и Хана для уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием. Во второй части описан алгоритм и комплекс программ, позволяющие в диалоговом режиме строить диаграммы устойчивости в пространстве параметров системы. В третьей части разработанный комплекс программ применен для исследования параметрической неустойчивости конкретных динамических систем.

В отличие от предыдущих методических указаний [1], в настоящей разработке рассмотрено большее число примеров и приведены контрольные задания для выполнения лабораторной работы на ЭВМ. Кроме того, предлагаемое программное обеспечение выполнено на более высоком уровне с использованием современных компьютерных технологий.

Учебно-методическое пособие позволяет более детально разобраться в теоретическом материале, дает навыки работы на персональном компьютере в режиме диалога и может быть использована для решения практических задач в технических системах, где наблюдается явление параметрического резонанса

1. Теоретические положения по исследованию устойчивости дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием

В связи со спецификой и сложностью рассматриваемых дифференциальных уравнений (наличием запаздывания и периодических коэффициентов) теоретическую часть методических указаний целесообразно разбить на три этапа. На первом этапе необходимо рассмотреть задачу исследования устойчивости уравнений с запаздыванием, далее с периодическими коэффициентами и наконец уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием.

Для линейного дифференциального уравнения [2] с постоянными коэффициентами и с постоянными отклонениями аргумента

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{m} a_{k\ i}\frac{d^k x(t-c_i)}{dt^k} = f(t) \tag{1}$$

(k– индекс параметра a и порядок производной от x).

Основная начальная задача заключается в определении непрерывного решения $x(t)$ при $t > t_0$ при условии, что $x(t) = \phi(t)$ при $t_0 - \tau \le t \le t_0$, где $\phi(t)$ – заданная непрерывная функция, называемая начальной (рис. 1).

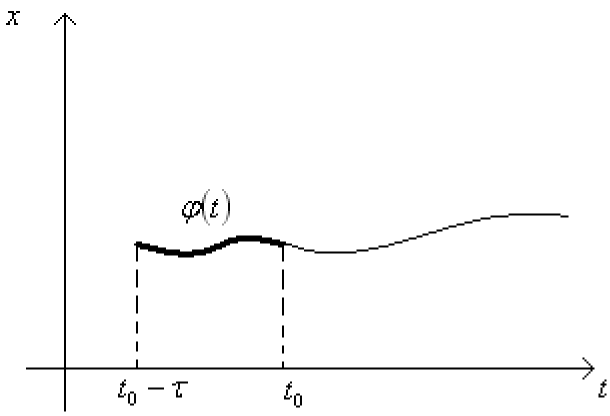

Рис. 1. Начальная задача для определении непрерывного решения

Отрезок $t_0 - \tau \le t \le t_0$, на котором задана начальная функция, называется начальным множеством и обозначается E_{t_0}: точка t_0 называется начальной точкой. Обычно предполагается, что $x(t_0 + 0) = \phi(t_0)$.

В [3] доказывается существование решения начальной задачи, которое обозначается $\underset{\phi}{x}(t)$.

Для исследования устойчивости решений уравнения (1) рассмотрим соответствующему ему однородное уравнение:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{m} a_{k\ i}\frac{d^k x(t-c_i)}{dt^k} = 0 \qquad (2)$$

Ищем частное решение уравнения (2) в виде

$$x(t) = ce^{zt}, \qquad (3)$$

где c – произвольная постоянная, $\mathrm{Re}\, z > 0$.
Подставляя (3) в (2) и сокращая на e^{zt} получим для определения z характеристическое уравнение:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{m} a_{k\ i} z^k e^{-zc_i} = 0 \qquad (4)$$

Левая часть уравнения (4)

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{m} a_{k\ i} z^k e^{-zc_i} \qquad (5)$$

называется характеристическим квазиполиномом. Уравнение (4) является трансцендентным относительно z и имеет бесконечное множество корней. Каждому корню z_i^0 соответствует решение $e^{z_i t}$. Линейные комбинации решений $\sum_{j=0}^{q} c_j e^{z_j t}$ с постоянными коэффициентами c_j также являются решениями уравнения (2).

Если все коэффициенты a_{ki} действительны, то комплексным корням

$z_i = \delta_i \pm \omega_i j$ (j – комплексная единица) характеристического уравнения (4) соответствуют комплексные решения $e^{(\delta_i \pm \omega_i j)t}$ или действительные решения $e^{\delta_i t} cos(\omega_i t)$ и $e^{\delta_i t} sin(\omega_i t)$, являющиеся, соответственно действительной и мнимой частями решения $e^{(\delta_i \pm \omega_i j)t}$. Доказано, что кратным корням z_i уравнения (4) кратности α_i соответствует не только решение $e^{z_i t}$, но и $te^{z_i t}$, $t^2 e^{z_i t}$ … $t^{\alpha_i - 1} e^{z_i t}$ и , следовательно, если ряд

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(t) e^{-c_i z}, \qquad (6)$$

где $P_i(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_{\alpha -1} t^{\alpha_i - 1}$, $b_i = const$, сходится и допускает n – кратное, почленное дифференцирование, то его сумма является решением уравнения (2).

Введем определения устойчивости в малом и асимптотической устойчивости применительно к дифференциальному уравнению с отклоняющимся аргументом [2,3].

Решение $\underset{\phi}{x}(t)$ уравнения (1) называется устойчивым, если для каждого

$\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $|\phi(t) - \psi(t)| < \delta(\varepsilon)$ на начальном множестве следует $|\underset{\phi}{x}(t) - \underset{\psi}{x}(t)| < \varepsilon$ при $t \geq t_0$, где $\psi(t)$ – любая непрерывная начальная функция.

Не обладающие этим свойством решения называются неустойчивыми.

Устойчивое решение $\underset{\phi}{x}(t)$ называется асимптотически устойчивым, если $\lim\limits_{t\to\infty} |\underset{\phi}{x}(t) - \underset{\psi}{x}(t)| = 0$ для любой непрерывной начальной функции $\psi(t)$.

Таким образом, для определения устойчивости дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и запаздывающим аргументом необходимо знать расположение на комплексной плоскости корней квазиполинома

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} a_{k\,i} z^k e^{-zc_i} \tag{7}$$

Если функция $\Phi(z)$ не вырождается в полином, т.е. если в уравнение (1) существенно входит отклонение аргумента, то $\Phi(z)$ имеет бесконечное множество нулей, единственной предельной точкой которых является бесконечность. В общем случае, для уравнения с запаздывающим аргументом все корни z_iквазиполинома $\Phi(z)$ лежат в левой полуплоскости: $Re\, z_i \leq N$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и без запаздывания, следующего вида

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = [A(t)]\bar{x}, \tag{8}$$

где$\bar{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, $[A(t)]$ – непрерывная (или кусочно-непрерывная) на $(-\infty, +\infty)$ периодическая матрица: $[A(t+\omega)] = [A(t)], \quad \omega > 0$

Совокупность n независимых решений системы (8) образует фундаментальную матрицу $[x(t)] = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}$.

Фундаментальная матрица, удовлетворяющая начальному условию $[x(0)] = [E]$, называется фундаментальной матрицей Коши или матрицантом. Значения матрицанта в конце первого периода называется матрицей монодромии.

<u>Теорема Флоке [5]</u>

Для линейной системы (8) с ω – периодической матрицей $[A(t)]$ фундаментальная матрица Коши имеет вид

$$[x(t)] = [\Phi(t)]e^{[z]t}, \tag{9}$$

где $[\Phi(t)]$ – класса C' (или кусочно-гладкая) ω – периодическая неособенная матрица, причем $[\Phi(0)] = [E]$ и $[z]$ – некоторая постоянна матрица, $[E]$ – единичная матрица.

<u>Доказательство.</u> Пусть $[x(t)]$ – нормированная фундаментальная матрица решений системы (8)

$$[x(0)] = [E] \tag{10}$$

Матрица $[x(t+\omega)]$ также является фундаментальной. Действительно, на основании тождества $\frac{d[x(t)]}{dt} = [A(t)][x(t)]$ имеем

$\frac{d[x(t+\omega)]}{dt} = \frac{d[x(t+\omega)]}{d(t+\omega)} \frac{d(t+\omega)}{dt} = [A(t+\omega)][x(t+\omega)] = [A(t)][x(t+\omega)]$,
т.е. $[x(t+\omega)]$– фундаментальная матрица решений для системы (8).

Отсюда имеем

$$[x(t+\omega)] = [x(t)][c], \tag{11}$$

где $[c]$ – постоянная неособенная матрица.

При подстановке $t = 0$ в (11) и учитывая (10), получим $[c] = [x(\omega)]$.

Следовательно, фундаментальная матрица решений для системы (8) имеет вид $[x(t+\omega)] = [x(t)][x(\omega)]$, где $[x(\omega)]$– матрица монодромии.

Очевидно,$det[x(\omega)] \neq 0$.

Пусть $\frac{1}{\omega} ln[x(\omega)] = [z]$, тогда $[x(\omega)] = e^{[z]\omega}$.

Имеем тождество

$$[x(t)] \equiv [x(t)]e^{-[z]t}e^{[z]t} = [\Phi(t)]e^{[z]t}, \tag{12}$$

где $[\Phi(t)] = [x(t)]e^{-[z]t}$.

Имеем

$$[\Phi(t+\omega)] = [x(t+\omega)]e^{-[z](t+\omega)} = [x(t+\omega)]e^{-[z]\omega}e^{-[z]t}.$$

С учетом предыдущего получаем:

$$[\Phi(t+\omega)] = [x(t)]e^{[z]\omega}e^{-[z]\omega}e^{-[z]t} = [x(t)]e^{-[z]t} = [\Phi(t)],$$

т.е. матрица $[\Phi(t)]$ – периодическая с периодом ω. Кроме того, если $[A(t)] \in C(-\infty, +\infty)$, то из (12) выводим $[\Phi(t)] = [x(t)]e^{-[z]t} \in C'(-\infty, +\infty)$, причем $[\Phi(0)] = [E]$ и $det[\Phi(t)] = det[x(t)]\, det\, e^{-[z]t} \neq 0$.

Теорема доказана.

Таким образом, полагаем доказанным, что для исследуемой системы дифференциальных уравнений (8) фундаментальная матрица решений представима в виде $[x(t)] = [\Phi(t)]e^{[z]t}$, где $[\Phi(t)]$ – ω – периодическая матрица и $[z]$ – постоянная матрица.

Прежде чем перейти к выявлению условий устойчивости системы уравнений (8) дадим определения.

Собственные значения z_i матрицы $[z]$ т.е. корни векового уравнения $det([z] - z[E]) = 0$, называются характеристическими показателями системы (8).

Собственные значения ρ_i $(i = \overline{1, n})$ матрицы монодромии $[x(\omega)]$, т.е. корни векового (характеристического) уравнения

$$det([x(\omega)] - \rho[E]) = 0 \tag{13}$$

называются мультипликаторами.

Условия устойчивости систем дифференциальных уравнений (8) следующие: решение $\bar{x} = 0$ устойчиво по Ляпунову, если все мультипликаторы $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ лежат в единичном круге $|\rho| \leq 1$, причем мультипликаторы, лежащие на граничной окружности $|\rho| = 1$ – либо простые корни уравнения (13), либо имеют простые элементарные делители. Решение $\bar{x} = 0$ уравнения (8) асимптотически устойчиво, если все мультипликаторы лежат внутри единичного круга $|\rho| < 1$. Решение $\bar{x} = 0$ неустойчиво, если среди мультипликаторов имеется хотя бы один, по модулю больший единицы, или найдутся кратные

$|\rho| = 1$ с непростыми элементарными делителями.

Для исследования условий устойчивости дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием рассмотрим матричное уравнение:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = [A_0(t)]\bar{x}(t) + [A_1(t)]\bar{x}(t - r_1) + \cdots + [A_m(t)]\bar{x}(t - r_m),$$

$$[A_i(t + \omega)] = [A_i(t)], \quad r_i = k_i\omega \tag{14}$$

k_i – целое положительное число $0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_m$.

В работе [4] Ханом дано расширение теоремы Флоке на случай систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием. Основные принципы доказательства состоят в следующем. Поскольку коэффициенты уравнения (14) периодические, то новое решение $\tilde{x}(t)$ получаем в виде $\tilde{x}(t) = x(t + \omega)$. Замена $t \to t + \omega$ индуцирует линейный оператор L, который действует в пространстве решений $\tilde{x} = Lx$.

В дальнейшем, в процессе доказательства вводится понятие сопряженного уравнения. Уравнение, сопряженное (14), записывается в следующем виде:

$$\frac{dy}{dt} = -[A_0(t)]^T\bar{y}(t) - [A_1(t)]^T\bar{y}(t + r_1) - \cdots - [A_m(t)]^T\bar{y}(t + r_m), \tag{15}$$

где $[A_i(t)]^T$ – транспонированная матрица $[A_i(t)]^T$. Тогда соответствующий оператор L^* получается заменой $t \to t - \omega$. Оба оператора L и L^* имеют одни и те же собственные значения, определяемые как нули функции:

$$f(z) = det(z[E] - [\Phi_0^\omega([A_0(t)] + z^{-k_1}[A_1(t)] + \cdots + z^{-k_m}[A_m(t)])]).$$

При этом фундаментальная матрица решений для системы уравнений (14) будет зависеть не только от времени t, но и от комплексного параметра z, т.е. $[\Phi(t, z)]$.

В [4] также доказано, что система уравнений (14) асимптотически устойчива, если все мультипликаторы соответствующего характеристического уравнения лежат внутри единичного круга на комплексной плоскости.

Очевидно, что определение мультипликаторов характеристического уравнения, получение вспомогательного годографа и его анализ затруднителен без использования ЭВМ.

Для нахождения решений дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и запаздыванием используется метод шагов.

Рассмотрим простейшее дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - r)), \tag{16}$$

где запаздывание r будем считать положительной постоянной, основная начальная задача заключается в определении непрерывного решения $x(t)$ уравнения (16) при $t > t_0$, при условии, что $x(t) = \phi(t)$ при $t_0 - r \leq t \leq t_0$, где $\phi(t)$ – заданная непрерывная функция, называемая начальной рис.1.
Отрезок $t_0 - r \leq t \leq t_0$, на котором задана начальная функция, называется начальным множеством и обозначается E_{t_0}. Обычно предполагается, что $\phi(t_0) = x(t_0 + 0)$.

Если в уравнении (16) и в начальных условиях $x(t)$, f и $\phi(t)$ считать вектор-функциями, то мы получим постановку основной начальной задачи для систем уравнений.

В случае переменного запаздывания $r(t)$ в уравнении

$\dot{x}(t) = f\ (t,\ x(t),\ x(t - r(t)))$ также требуется найти решение этого уравнения при

$t > t_0$, причем на начальном множестве E_{t_0}, состоящем из точки t_0 и из тех значений $t - r(t)$, которые меньше t_0 при $t \geq t_0$, $x(t)$ считается совпадающим с заданной начальной функцией $\phi(t)$. Обычно предполагается, что

$x(t_0 + 0) = \phi(t_0)$.

Например, в уравнении $\dot{x}(t) = f(t, x(t),\ x(t - cos^2 t))$ при $t_0 = 0$ начальная функция должна быть задана на начальном множестве E_0, являющемся отрезком $-1 \leq t \leq 0$. В уравнении $\dot{x}(t) = f\ (t,\ x(t),\ x\ (\frac{t}{2}))$ при $t_0 = 0$ начальное множество состоит из одной точки t_0. В том же уравнении при $t_0 = 1$ начальное множество E_1 является отрезком $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$.

В прикладных задачах начальную функцию часто находят экспериментально. Нередко начальная функция определяется из другого дифференциального уравнения без отклонения аргумента, которое, например, в некоторых задачах автоматического регулирования описывает процесс до момента начала действия обратной связи.

Уравнения n-го порядка с отклоняющимся аргументом можно заменить, так же как и для уравнений без отклонений аргумента, соответствующей системой уравнений, однако при некоторых постановках задач при этом не будет полной эквивалентности.

Для уравнений n-го порядка с запаздывающим аргументом

$$x^{(n)}(t) = f\ (t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t), x(t - r), \dot{x}(t) \dots, x^{n-1}(t - r)) \qquad (17)$$

или для уравнений нейтрального типа

$$x^{(n)}(t) = f\ (t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t), x(t - r), \dot{x}(t) \dots, x^{n}(t - r)) \qquad (18)$$

где для простоты пока считаем r постоянным, $r > 0$, в основной начальной задаче требуется определить $(n - 1)$ раз непрерывно дифференцируемое решение $x(t)$ при $t > t_0$, причем на начальном множестве $t_0 - r \leq t \leq t_0 x_k(t)$

считаются равными заданным начальным функциям $\phi_k(t)$ (для уравнения (17) $k = 0,\ 1,\ \dots,(n-1)$, а для уравнения (18) $k = 0,\ 1,\ \dots,n$). Обычно требуется, чтобы $\phi_k(t_0) = x^{(k)}(t_0 + 0) k = 0,\ 1,\ \dots,(n-1)$.

При такой постановке начальной задачи уравнение (17) может быть заменено эквивалентной системой:

$$\dot{x}_0(t) = x_1(t),$$

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) = x_1(t), \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dot{x}_{n-2}(t) = x_{n-1}(t) \\ x_{n-1}(t) = f\,(t,\ x_{0,}\ x_1(t), \dots,\ x_{n-1}(t),\ x_0(t-r),\ \dots, x_{n-1}(t-r)) \end{cases} \qquad (19)$$

с начальными условиями

$$x_k(t) = \phi_k(t) \text{ на} E_{t_0} \quad (k = 0,\ 1,\ \dots,\ (n-1)) \qquad (20)$$

(аналогичную систему получим и для уравнения (18)).

Однако в приложениях часто функции $\phi_k(t)$ для уравнения n-го порядка должны быть производными одной и той же функции $\phi(t)$

$$\phi_k(t) = \phi^{(k)}(t) \qquad (k = 0,\ 1,\ \dots,\ (n-1)) \qquad (21)$$

Очевидно, что уравнение n-го порядка (17) с начальными условиями (21) не эквивалентно системе (19) с условиями (20). Оно эквивалентно системе (19) с условиями (21), но эти условия обычно не естественны для систем.

Все сказанное, очевидно, распространяется и на случай переменного запаздывания $r(t)$, но только начальные функции при этом задаются на начальном множестве E_{t_0} , состоящем из точки t_0 и из тех значений $t - r(t)$, которые меньше t_0 при $t \geq t_0$, $x(t)$ считается совпадающим с заданной начальной функцией $\phi(t)$.

Если уравнение первого или более высокого порядка содержит несколько отклонений аргумента $r_i(t)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$, например

$$\dot{x}(t) = f\,(t,\ x(t), x(t - r_1(t)),\ x(t - r_2(t)),\ \dots, x(t - r_m(t))),$$

то начальное множество E_{t_0} состоит из точки $t = t_0$ и из всех значений $t - r_i(t)$, которые, при $t \geq t_0$, меньше t_0 $(i = 1, 2, \dots, m)$.

В частности, если все r_i постоянны, то начальным множеством является отрезок $t_0 - \max\limits_{1 \leq i \leq m} r_i \leq t \leq t_0$

Рассмотрим основную начальную задачу для простейшего дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) = f(t,\ x(t),\ x(t-r)), \qquad (22)$$

где постоянное запаздывание $r > 0$, $x(t) = \phi_0(t)$ при $t_0 - r \leq t \leq t_0$

Наиболее естественным методом решения этой задачи является так называемый метод шагов (или метод последовательного интегрирования), заключающийся в том, что непрерывное решение $x(t)$ рассматриваемой задачи определяется из дифференциальных уравнений без запаздывания $\dot{x}(t) = f(t, x(t), \phi_0(t-r))$ при $t_0 \le t \le t_0 + r$, $x(t_0) = \phi(t_0)$, так как при $t_0 \le t \le t_0 + r$ аргумент $t - r$ изменяется на начальном множестве $[t_0 - r,\ t_0]$ и, следовательно, третий аргумент $x(t-r)$ функции f равен начальной функции $\phi_0(t-r)$. Предполагая существования решения $x = \phi_1(t)$ этой начальной задачи на всем отрезке $[t_0, t_0 + r]$, аналогично получим:

$$\dot{x}(t) = f(t,\ x(t),\ \phi_1(t-r))$$

при $t_0 + r \le t \le t_0 + 2r, \quad x(t_0 + r) = \phi_1(t_0 + r),$

……………………………………………………………………

$$\dot{x}(t) = f(t,\ x(t),\ \phi_n(t-r))$$

при $t_0 + nr \le t \le t_0 + (n+1)r, \quad x(t_0 + nr) = \phi_n(t_0 + nr),$

где $\phi_j(t)$ – решение рассматриваемой начальной задачи на отрезке

$t_0 + (j-1)r \le t \le t_0 + jr.$

Этот метод дает возможность определить решение $x(t)$ на некотором конечном отрезке и одновременно доказывает существование решения в окрестности точки $(t_0,\ \phi(t_0))$, если функции ϕ и f непрерывны в рассматриваемой области изменения переменных, и его единственность, если функция f удовлетворяет одному из условий, обеспечивающих единственность решения уравнения $\dot{x}(t) = f(t,\ x(t),\ \phi_0(t - r))$ без отклонений аргумента, например условию Липшица по второму аргументу.

Таким образом, в настоящем разделе рассмотрены основные теоретические положения исследования устойчивости и нахождения решений дифференциальных уравнений указанного класса. В дальнейшем, на основе этого материала разработаны алгоритм и программное обеспечение расчета указанных динамических характеристик