МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

§ 1. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ. ТРУБКИ ТОКА

При исследовании электроннооптических систем, ис пользующих весьма низкие плотности электронного то ка и большие ускоряющие напряжения, влиянием соб ственного поля пространственного заряда можно пренебречь. В этом случае распределение потенциала, описываемое уравнением Лапласа (1.4), весьма просто находится путем моделирования рассматриваемой си стемы па сетке сопротивлении и в найденном поле не представляет затруднений вычисление траекторий, не обходимых для определения параметров электроинооптической системы.

Значительно сложнее расчет электроннооптических систем с интенсивными потоками заряженных частиц, собственное поле которых существенно «возмущает» лапласовское поле. Как поле, так и траектории заря женных частиц в данном случае могут быть получены в результате совместного решения системы дифференци альных уравнений (1.5) — (1-9), описывающих так на зываемое самосогласованное поле. Сетка сопротивлений как аналоговое устройство может решать лишь уравне ние потенциала. Так как распределение заряда, как правило, заранее неизвестно, то задача об определении самосогласованного поля с применением методов моде лирования распадается на отдельные разделенные во времени этапы: 1) определение потенциала; 2) расчет траекторий заряженных частиц; 3) нахождение прост ранственного распределения свободных зарядов. Само согласованное поле средствами аналогового моделиро вания может быть получено методом последовательных

приближений [55], суть которого в данном случае за ключается в следующем. Сначала с помощью моделиро вания при заданных граничных условиях определяется исходное распределение потенциала, например решает ся уравнение Лапласа; затем в этом поле рассчитыва ются траектории и вычисляется пространственный заряд, который моделируется на сетке сопротивлений то ками, вводимыми в узловые точки сетки. Эти токи «воз мущают» исходное распределение, что адекватно вли янию пространственного заряда в исследуемой элект роннооптической системе. Полученное распределение потенциала может рассматриваться как исходное для уточнения конфигурации электронного потока и плотно сти заряда в следующем приближении и т. д. Процесс последовательных приближений продолжается до тех пор, пока результаты *п* и л+1-го приближений не сов падут с точностью до наперед заданной величины. При этом результат в силу единственности решения задачи о потенциале совпадает в пределах заданной погрешно сти с самосогласованным полем. В качестве критерия сходимости процесса последовательных приближений можно принять равенство в пределах заданной точно сти в *п* и /I—|—1 -м приближениях, например, потенциалов в узловых точках сетки, снимаемой с катода плотности тока или совпадение траекторий заряженных частиц. Строго говоря, каждый из этих критериев имеет одина ковую силу и предпочтение тому или иному из них да ется, в зависимости от того, какой из параметров важ но получить с максимально возможной точностью. Отсюда видно, что моделирование поля с учетом влия ния пространственного заряда является довольно трудо емкой задачей в связи с необходимостью использова ния метода последовательных приближений, предпо лагающего многократное повторение этапов расчета траекторий, вычисления и моделирования пространствен ного заряда и определения потенциала.

Рассмотрим поле с плоскопараллельной или осевой симметрией, созданное системой *п* электродов, на кото

рых заданы постоянные потенциалы фо,ь фо,2, •••, Фо,п, пе
ременные потенциалы с частотами toi, шг...... ш,,,началь
ными фазами *outplt a>2tpt,* ..., to и амплитудами срь
Ф2. •••, Фп относительно электрода, для которого ф0,о и ср0
приняты равными нулю. Влиянием пространственного за ряда и запаздыванием потенциала пренебрегаем. При мем, что переменные потенциалы на электродах исследу емой системы изменяются по синусоидальному закону.

На основе принципа суперпозиции потенциал в произ вольной точке исследуемой области в любой момент вре мени определяется следующим образом:

Ф(x, y, t) = Аг (x, y)[ф0,1 -\- cPiSino}^ + tP)\ -f

-г *А (х, у)* [фо,2 -|- ф2 sinco2 (*t* 4- ip,)] -f . .. 4-

-М n(*> *У)* [фо,п + Фп sin *(t* -p ipn)], (2.39)

где Ai(x, y) (i — *1, 2, 3, п)* — безразмерные коэффици енты, представляющие собой частные решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа при единичном значе нии потенциальной функции на t-м электроде и при рав ных нулю значениях этой же функции на остальных. Ко эффициенты *A i(x , y)* можно просто измерить на сетке сопротивлений, если задавать поочередно на каждом ра бочем электроде исследуемой системы значение потенциа ла *u,* равное единице, при нулевых потенциалах на осталь ных электродах. Для каждой узловой точки получим столько коэффициентов *Ai(x, y),* сколько, вообще говоря, имеется рабочих электродов в электроннооптической системе. Тогда потенциалы в узловых точках сетки могут быть определены по (2.39) для любого момента времени. Если сетка достаточно «густая», то с незначительной погрешностью можно предположить, что компоненты на

пряженности электрического поля *E x (t)* *и E v(t)* не зави сят от координатв элементарном квадрате *A B C D* (см. рис. 2.1), а их зависимость от времени выражается сле дующим образом:

£ (Л — _ (О фй—1.П» (0 _

* U *2h* ~ (2.40)

S [фо.гЕФг sincO;^+Д>.)][Лг(& -)-1, *m)—At(k—* 1, *m)]*

2*h*

i=I

Фй,т-|-

£ _ __ 1 *(t)* ф/;,т—1*(t)*

у U “ 2*h* ~ (2.41)

V 4 1фо.г'-фг sin ы;(г1-|-^.)][Лг(^, т-1 *1)—А^k, m— 1)]*

2 j 2*h*

Используя (2.40), (2.41), запишем уравнения движения за ряженной частицы в квадрате *ABCD* для данного случая в

виде

d~x *П*

~dF — *V [фо,£ - г Ф£ sin co^ (t 4- tp.)} ait*

/no *(2.42)*

п

*#У_* — *У [Фо,£ + Фг siruo* (t + tp)] b„*

dt2 *m° iSi*

г д е

At (k + 1. tn) — Ai (k — 1, m)

2h

Aj(k, m -f-1)— At{k, in — 1)

bt = *2h*

Для упрощения дальнейших выкладок обозначим т =

=1 / ^6° t, coi = — Задавая начальные условия

V »10 Г 2вд

V Щ

m = 0, x — xP , y = yP , = Y ^ Z p, (~) =
Vdr /m=o Vdr /x=o

=) срУ'Р, получим решение системы (2.42) в квадрате ABCD

x = xP -1- Угц>x,pm -|- -i- V a; ^ фо" Ф< X
2 ^£=1 , 1 2 co/

*X [sinco,-(m;mp.)—co*tcosco; mp.—sinco,-mp.]|, (2.43)*

1 V I /. I Фодтз._.Фг
У — Ур + У ъ яТ + Y У} bi I 2 X
£=1 co,-

X [sinco (m -г- mp.) — coJtcos co£mp. — sinco,* Tp.]j. (2.44)*

Процесс расчета координат траектории по этим форму лам аналогичен описанному в § 1. Компоненты началь ной скорости находятся дифференцированием (2.43), (2.44) по т

/ ax . ___ j л
) = V Фдг.д = У ъ Ур I - V a ; X
V dr Tl t=I
*mp.) — cosco*Tp.]j,*
X Фо.гД------[cosco,(mx + (2.45)*
I co£ г ‘ J

(~ f r) = = vvu·p + Y ^ bi X

X jcpo,;Ti----- ~y— [costo* (тj + тр.) — cos©£ тр.]|, (2.46)

где ti — приведенное время, необходимое для достижения электроном точки Q на выходе из квадрата. При расчете координат траектории в следующем квадрате, а также

Рис. 2.6. Траектории электронов в переменном элек трическом поле: *1, 2* рассчитаны при со*=зх/50 н на чальных фазах вылета соответственно 0 и л/2; *3, 4* — при удвоенной частоте и тех же фазах

при расчете компонент скорости выхода из этого квадра та приведенное время тр.в формулах (2.43) — (2.46) за меняется на *x* q; , которое для точки *Qi* имеет значение

т. е. в отличие от методов, изложенных в предыдущих па раграфах, где перед началом расчета координат траекто рии в следующем квадрате т полагается равным нулю, здесь т от квадрата к квадрату суммируется.

Пример расчета траекторий в нестационарном элект рическом поле для системы с плоскопараллельной сим метрией представлен на рис. 2.6. На электродах *П, А, А* i задано постоянное напряжение *и* относительно электро да *К.* На электрод *П* подано, кроме того, переменное синусоидальное напряжение с амплитудой 5м.

цнруя систему уравнений (2.15) по / и подставляя

При тех же предположениях о независимости компонент напряженности электрического поля от координат в преде лах квадрата *ABCD* рассмотрим движение электрона в пе ременном электрическом и скрещенном с ним магнитном поле. Как и выше, потенциалы па граничных электродах изменяются по синусоидальному закону, вектор индукции магнитного поля В направлен перпендикулярно плоскости рис. 2.1 (от нас). Пусть электрическое поле в квадрате *ABCD* определяется выражениями (2.40), (2.41). Дифферен-

dEx (t)

dt

dEv (t)

из (2.40), (2.41), получим

dt

= *J I .* у ч ф а© cos о),. (/ ; *t*Pf) +

d r *ma Aspi I*

" t=i

Be, [tpo.f-!-Фr81пй)r(/ /P)] *Be0 \2* *dx*

~ b i

mn *m0 I* *dt*

ri

day = — "V,((Pi^WjCOSfO;^ -l *ip .)*— (2.47)

til *1*

dt3 *mn*

" i=i

Be, *Be0* \2 *dy*

- «; [фо,< Ф,- sin 0i; (*l* -j- *tP.)}* —

m, *tn0* *j* *dt*

Эта система при начальных условиях

O, л' -- -Г/- , J)' -- *f d x)* *I dy * *— °y .P <*

[dt) {=0 *X'1 ' V dt / ,=|*

*d2x * *eo* *ai (фо,1 +* *Cp;Sino);/p.) -L Bvy,p*

dt2 /1=0 *m0* *A*

^ 1 = 0

dhy \ _ *eo* *bt(фо.£ +* *ф« sin co;/P.) — BvXl!*

dt2 li= 0 *in0* *1=1*

имеет следующее решение:

п

x = (*x* — *Xp)* = V |cp0ilb,.(x' — sinт') ! (1 — cost') X

/л,, i= i

(bi cos Q , т p . — п;Й£sin

X (Pj^i Й£тр.) O; (cpo.i ~i •

q;2 — 1

-|- Ф,-sin йгтр.)-*i- Bvy,p* sin т Ф» (b £ s i n f i £T p . i-

m - 1

■\- *alQi* cosQ;Tp;) -r *BvXtP* ■l- - (Pi- x

' Й? — 1

X *b,*—(cos £2j (t' + т p ;)— COS f i j T p .) —

Й;

z£(sinQ£(x' !-xp.) — sinQjTp.) (2.48)

7 - (y - yp) = V (— To,.** (t' - sin t') -
mn -«ssd (
1=1
(a£ cos Й;тр; -j- b p .tsin й,тр.)
— (1 — cos t') ФА —
Of — 1

— b t (cpo.i-!ф£ Sin QjTp.) ь BvXtp sin т Ф; X
« £ — 1
Ф/ Cl:i \f
X {bP i cos йгтр. — atsin Q£t'P.) -f- Bvy>P ---- /4
Й £ - 1 fi,

X(cosQ £(x'-'r тр.)— cosQ£xp.)-|-ft£(sinQ£(T'-bTp£)— sinQ£xp.)

(2.49)

где т = t, Q; = — —— . Это решение справедливо
mn Be0/m0

для всех частот, за исключением случая, когда частота электрических колебаний на одном из электродов равна

циклотронной частоте (Q = 1). Если это имеет место, на пример, для п-го электрода, то общее решение системы (2.47) получаем в виде

X = — 1л-(x — xP) = (m' — sinx') V cpo.i^-l- (1 — cost')X
m0 XaЛ
1= 1
[П—1 -
S 1 ^cos —uiQi sinQiT^+
IS 1 1
П

' ^ | a^ ф0'1' Г Фг S'n QixPi) -\- Фп Фп COS Трп — £ZJtSin Xpп) -\-

/1—1
- BvUtp /sin т' у] ~0 2Фr, (b i SinfiiTpjH -fljQjCOSQ;Tp.)
1= 1 1

/1—1
-Г- - у 1 (bn sin mpп н- an cos TpJ \BvXtP

X {~Q~ ^C°S Q' " ~ c°s ~

— a, [sin Q; (т' + тр.) — sin £2rтр.]| —

f ~ K sin (т' трп) + ап cos(t' -|- tpn)], (2.50)

у = — — (У — Ур) = — (т ' — sin-r') ^ <p0,£ar — (1—cost') x
mo 1=1

r "rl ~ Q
x i=l & — \ (a*cosQiX'Pi + biQis i n ~
n

— ^ *bi* (фон + Фг sin QjTp.) + ф„ *(an* cos Tpn + *bn* sin TpJ +
1= 1

n— I
■•! ■*Bvxj* -t-sinr Ф/ •(*b p I* cos Q;Tp.—fijSinQjtp.) -f-
44 f i ? - I

n — I
(bn cos r'pn — a„ sin TpJ -f *Bv,,,f* Ф*i* X
i — I *Of — I*

X 1 ^ - [cos й; (t' •|- т p .) — cos Q fт p .] -I- ft, [sin йг (т' -|- *x'P.)*—

— sin йгтр;] — - у 1 т' *[bn* cos (т' + *x 'рп)* — *an* sin (t *- j- xPn)}.*

(2.51)

Величины *BvXiq, BvUiQ* определяются из следующих выра жений:

dX , = *BvXiQ*= V cpo,i5; (1 — cos t !) - [- Sinxi X
dx' *)* Tji *JmsA*
i=l

X 2PiQ<- *(bfios* Йгтр.—агйгзтЙ гтр.)-|-яг(сро,£+фг8тй/гр.)-!-
Q&l --- 1

Фг
BvU.P COS T| *Qj — 1* *(bt5*|'пйгтр.-|-агйг cos й гтр;)+

Bvxj ф| ■[5рзп1ЙДтН-тр.)-Ьагй гсо5ЙДт1 + гр.)]}г
Oj — 1

(2.52)

dY
BVy.Q = j— фо,га г (1 — cos tJ) sin tJ x
dx'
1=1

X CPjQi (QjCosQjTp.+fcjfijSin йгтр.)—^(Vo.i-f-cpjSinQjTp.J-b
ebj --- 1

-! *BvXtP* + cos Ti Фг *(b p t*cos йгтр. — аг sin й гтр.) -Ь
ог — i

[ajSinQjCr'i+Tp.)— b;Q;cos Ц (т1+тр.)]|,

(2.53)

где t'j — приведенное время движения электрона от точ ки *P* до *Q.* Как и выше, при расчете траектории в следую щем квадрате *x'p ,* заменяется на т'д.= Тр -|-т[. Процесс расчета траектории аналогичен описанному выше случаю движения электрона в электрическом поле.

При выводе уравнений траектории коэффициенты по добия /<ф, Кв , *Ка, Kl* предполагались равными единице; в противном случае следует иметь в виду соотношения К1„ЛФ = Кф/2, *к 9 = к 1 К*-2

Изложенные в этой главе методы применимы к рас чету траекторий широких потоков заряженных частиц и преследуют цель выяснить общую картину потока. Ис следование приосевой области электроннооптических си стем с применением результатов моделирования па сетке сопротивлений связано с рядом требований как к самой сетке, так и к методике расчета. Прежде всего для этой цели

необходимы прецизионные сетки, значения сопро тивлений которых лежат в узких допусках [72, 43]. Отно сительно высокая принципиальная погрешность в приосе вой области осесимметричных сеток, рассчитанных по формулам (1.46), может быть снижена, например, спосо бом, предложенным в работе [104]. Благодаря этим ме рам распределение потенциала на оси удается получить с точностью, удовлетворительной для вычисления произ водных высшего порядка и интегрирования уравнения траектории известными методами [21, 51, 65].

Судя по публикациям последних лет [39, 42, 60, 66, 100, 101], методы определения приосевых траекторий, фокусов, аберраций и т. п. с помощью сетки сопротивле ний продолжают совершенствоваться.